Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 326-334
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141033

双曲方程组Goursat问题整体光滑解

赵佳敏，陈柳诗

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2023年12月15日；录用日期：2023年12月29日；发布日期：2024年1月31日

摘　要

本文主要研究一个广义压力下二维退化双曲守恒方程组Goursat问题存在解且具有光滑性。考虑该问题为混合型方程的Goursat问题，首先引入该方程组的特征角，并且对该特征角进行限制，求出特征角的方向导数从而得到压力P的特征分解。通过特征分解得到解的不变三角形，由此得出解的边界值估计以及局部存在性。根据压力P的特征分解，利用连续性方法建立解的梯度估计，将局部解扩展到全局，从而证明半双曲片整体解的存在性。

关键词

半双曲片，退化方程，特征分解，梯度估计，不变三角形，平面稀疏波

Global Smooth Solution of Goursat Problem for Hyperbolic Systems

Jiamin Zhao, Liushi Chen

College of Science, Chang’an University, Chang’an Shaanxi

Received: Dec. 15th, 2023; accepted: Dec. 29th, 2023; published: Jan. 31st, 2024

Abstract

In this paper, we study the existence of global smooth solutions for Goursat problem of two-dimensional degenerated hyperbolic conservation systems under generalized pressure. Considering this problem as a Goursat problem with mixed equations, the characteristic angles of the equations are introduced first, and the directional derivatives of these characteristic angles are obtained by limiting the characteristic decomposition of pressure P that is obtained. The invariant triangle of the solutions is obtained by the method of characteristic decomposition, and the boundary value estimation and local existence of the solution are obtained. According to the characteristic decomposition of the pressure, the gradient estimation of the solution is established by the continu-

文章引用: 赵佳敏, 陈柳诗. 双曲方程组 Goursat 问题整体光滑解[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 326-334.
DOI: 10.12677/pm.2024.141033

ity method, and the local solutions are extended to the global solutions, so as to prove the existence of the global solutions of the semi-hyperbolic plates.

Keywords

Semi-Hyperbolic Plates, Degenerated Equation, Characteristic Decomposition, Gradient Estimation, Invariant Triangle, Planar Rarefaction Wave

1. 引言

对于偏微分方程组在航空航天、燃烧与爆破理论、大气物理等诸多方面的研究一直都是人们关注的重点，有着十分广泛的应用。而其自身在发展中也极大的丰富了数学研究的理论，充分推动了数学学科理论的发展。理想流体，即忽略流体中的粘性因素以及热传导因素，常在气体动力学的研究中出现。而描述理想流体进行运动的具体方程为包括质量守恒、能量守恒、动量守恒方程在内的欧拉方程。因此本文中所研究的退化双曲欧拉方程具有十分重要的物理意义，是研究流体力学的重要内容。黎曼问题作为双曲守恒律方程组的具有标度不变量的初值的柯西初值问题，是分片的具有常状态的初值问题，其初始状态的间断线汇聚在原点处成为几何奇异点。一般黎曼问题所取形式为有限个常状态，取该形式的意义在于可将该方程组进行自相似变换。针对欧拉方程二维黎曼问题的研究由[1]开创，利用广义特征分析法和数值实验提出了关于问题解的多个猜想。非线性退化双曲守恒律方程组在初值充分光滑或充分小的情况下，该方程组问题的解随时间的发展可能会出现间断点，即该问题的局部解易证明。而该问题解的间断现象存在于各种物理现象中，比如在流体力学中与激波的产生与传播相对应。对于带有初值的二维黎曼问题，研究其整体光滑解时，可利用特征分解的方法将局部解进行延拓从而得到问题的全局解。对含跨音速激波的可压缩流问题的研究已具有较为成熟的理论方法，例如 Chen 和 Zhang 在[2]中定义了二维守恒律方程组中的双曲性、凸性、中心简单波等，对二维欧拉方程黎曼问题的研究发展提供了重要准备。Zhang 和 Zheng 在[3]中研究了某个单个二维守恒律方程黎曼问题，从中得到五类解。针对多方气体二维绝热欧拉方程黎曼问题，其中该问题的初值为四片常数，分布在四个象限中，文章中将问题归于初始间断线上发出的四道平面基本波之间的相互作用。利用广义特征分析法得到解的性质。具体方法参考[4] [5] [6] [7] [8]。在文章[9]中针对一类二维黎曼问题利用特征分解法及数值模拟法给出了十二类分析与猜想。在超音速解的范围中，Dai 和 Zhang [10]利用特征分解法得到静止的气体在向真空扩散的过程中存在超音速解。Yang 和 Zhang 在[11]中证明了压差方程在两个平面稀疏波的相互作用下所存在的整体经典解，将[10]中 Dai 和 Zhang 的结果进行了拓展延伸。

Song 和 Zheng [12]为了得到在某一固定条件下退化到声速线上的解的存在性，在二维压力梯度系统中构造了解的半双曲片这样的新型波。由二维超音速流在绕开拐角向真空区域扩散所引起的多方气体向真空扩散问题，该问题与一中心稀疏波和一平面稀疏波相互作用有关。在数学研究中，该问题即为某一二维可压缩欧拉方程的一个 Goursat 问题，且该方程组具有自相似性。Feng 和 Xiao [13]证明了一类压强定律的二维可压缩欧拉方程半双曲片解的存在性。本文与[14]中考虑欧拉方程 Goursat 型边值型问题利用特征分解法及自举法的思想二维黎曼问题在真空边界处的整体解的方法不同，主要根据特征角建立估计

从而证明了存在解且解具有整体光滑性。

本文主要研究一个二维欧拉方程组的整体光滑解的存在性。具体分为四个部分：第二节建立压力 P 的特征分解；第三节利用解的边界值估计得到局部解的存在性；第四节主要进行解的梯度估计；第五节利用先验估计结合三四节得到退化双曲方程组 Goursat 问题整体解的存在性。

2. 提出问题

我们首先引入以下二维可压缩欧拉系统

$$\begin{cases} u_t + P_x = 0, \\ v_t + P_y = 0, \\ P_t + \mathrm{e}^P \left(u_x + v_y\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 P 为压力，(u,v) 为速度。将系统(1)进行自相似变换，令 $(\xi,\eta)=\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t}\right)$，有

$$\begin{cases} -\xi u_\xi - \eta u_\eta + P_\xi = 0, \\ -\xi v_\xi - \eta v_\eta + P_\eta = 0, \\ -\xi P_\xi - \eta P_\eta + \mathrm{e}^P \left(u_\xi + v_\eta\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

且(2)可简化为

$$\left(\mathrm{e}^P - \xi^2\right) P_{\xi\xi} + \left(\mathrm{e}^P - \eta^2\right) P_{\eta\eta} - 2\xi\eta P_{\xi\eta} - 2\left(\xi P_\xi + \eta P_\eta\right) + \left(\xi P_\xi + \eta P_\eta\right)^2 = 0. \tag{3}$$

(3)的正负特征线定义为如下方程的特征曲线

$$\Gamma^\pm:\ \Lambda_\pm := \frac{\xi\eta \pm \sqrt{\mathrm{e}^P\left(\xi^2+\eta^2-\mathrm{e}^P\right)}}{\xi^2-\mathrm{e}^P}\left(=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right) \tag{4}$$

进一步地，类似于[14] [15]中的方法，我们定义特征角的概念：

$$\tan\alpha = \Lambda_+, \tan\beta = \Lambda_- \tag{5}$$

且引入 $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$，$\sigma = \frac{\alpha+\beta}{2}$。则有

$$\begin{cases} \tan\sigma = \dfrac{\eta}{\xi}, \\ \sin\delta = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^P}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}. \end{cases} \tag{6}$$

证：根据特征角概念(4)，得到

$$\tan\alpha = \frac{\xi\eta + \sqrt{\mathrm{e}^P\left(\xi^2+\eta^2-\mathrm{e}^P\right)}}{\xi^2-\mathrm{e}^P},\ \tan\beta = \frac{\xi\eta - \sqrt{\mathrm{e}^P\left(\xi^2+\eta^2-\mathrm{e}^P\right)}}{\xi^2-\mathrm{e}^P} \tag{7}$$

则有

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\mathrm{e}^P}\dfrac{\cos\sigma}{\sin\delta}, \\ \eta = \sqrt{\mathrm{e}^P}\dfrac{\sin\sigma}{\sin\delta}. \end{cases} \tag{8}$$

即证明结论。

为了证明发生在两个连接不连续点以及两个稀疏波的相互作用的半双曲片，我们令 c_1, c_4, v_1 为三个实数且有 $c_1 > c_4 > 0$。令 $v_4 = 0$，定义 $\eta_i \triangleq v_i + c_i, i = 1,4$，思考如下二维稀疏波 $R_{14}(\eta)$：

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{e^P}, \ (\eta_4 \le \eta \le \eta_1) \\ v = \int_{P_4}^{P_1} \frac{1}{\sqrt{e^s}} ds, \ (0 < P_4 \le P \le P_1) \\ u = u_1 = u_4 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

建立一个半双曲片区域：

在二维稀疏波 R_{14} 中，给出一个正特征线 $\widehat{AB}$，作切线的延长线 BD 变为恒定状态。其中 A, D 两点为声速点。同时给出严格凸的负特征线 $\widehat{BC}$，其中点 C 为声速点。该曲线三角形 ABC 为退化双曲区域，在该区域内求解，$\widehat{AC}$ 为声速线。

3. 特征分解

下面给出关于 P 的特征分解。根据[16]中的方法，首先对特征角 α, β 进行限制，令

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \tag{10}$$

且给出方向导数

$$\bar{\partial}^+ = \cos\alpha \partial_\xi + \sin\alpha \partial_\eta, \ \bar{\partial}^- = \cos\beta \partial_\xi + \sin\beta \partial_\eta. \tag{11}$$

将压力 P 代入以上方向导数公式，利用 P 的方向导数 $\bar{\partial}^\pm P$ 表示出特征角 α, β 的一阶方向导数。

3.1. 性质 1

给出 α, β 以及 σ, δ 的一阶方向导数：

$$\begin{cases} \bar{\partial}^+\alpha = \frac{1}{2}\tan\delta \bar{\partial}^+ P, \bar{\partial}^-\alpha = -\frac{2\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}} + \frac{1}{2}\tan\delta \bar{\partial}^- P, \\ \bar{\partial}^+\beta = \frac{2\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}} - \frac{1}{2}\tan\delta \bar{\partial}^+ P, \bar{\partial}^-\beta = -\frac{1}{2}\tan\delta \bar{\partial}^- P, \\ \bar{\partial}^\pm\sigma = \pm\frac{\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}}, \\ \bar{\partial}^\pm\delta = -\frac{\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}} + \frac{1}{2}\tan\delta \bar{\partial}^\pm P. \end{cases} \tag{12}$$

证：对(8)求导结合方向导数定义(11)可得

$$\bar{\partial}^+\alpha = \frac{2\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}} - \bar{\partial}^+\beta. \tag{13}$$

同理，根据以上方法可以得到

$$\bar{\partial}^-\beta = -\frac{2\sin^2\delta}{\sqrt{e^P}} - \bar{\partial}^-\alpha. \tag{14}$$

对(8)求导后结合(13)有

$$\bar{\partial}^{+}\beta=\frac{2\sin^{2}\delta}{\sqrt{e^{P}}}-\frac{1}{2}\tan\delta\bar{\partial}^{+}P. \tag{15}$$

同理

$$\bar{\partial}^{-}\alpha=-\frac{2\sin^{2}\delta}{\sqrt{e^{P}}}+\frac{1}{2}\tan\delta\bar{\partial}^{-}P. \tag{16}$$

得到(15)后，根据(13)中$\bar{\partial}^{+}\alpha$，$\bar{\partial}^{+}\beta$之间的关系可得$\bar{\partial}^{+}\alpha$，$\bar{\partial}^{+}P$的关系式：

$$\bar{\partial}^{+}\alpha=\frac{1}{2}\tan\delta\bar{\partial}^{+}P. \tag{17}$$

同理可得

$$\bar{\partial}^{-}\beta=-\frac{1}{2}\tan\delta\bar{\partial}^{-}P. \tag{18}$$

根据流角，马赫角与特征角之间的关系，得到

$$\bar{\partial}^{\pm}\sigma=\pm\frac{\sin^{2}\delta}{\sqrt{e^{P}}}. \tag{19}$$

$$\bar{\partial}^{\pm}\delta=-\frac{\sin^{2}\delta}{\sqrt{e^{P}}}+\frac{1}{2}\tan\delta\bar{\partial}^{\pm}P. \tag{20}$$

3.2. 性质 2

计算压力P的二阶导数，得到P的特征分解如下：

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{-}\bar{\partial}^{+}P=\bar{\partial}^{+}P\left[-\dfrac{\sin(2\delta)}{\sqrt{e^{P}}}+\dfrac{1}{4\cos^{2}\delta}\bar{\partial}^{+}P+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4\cos^{2}\delta}\right)\bar{\partial}^{-}P\right],\\ \bar{\partial}^{+}\bar{\partial}^{-}P=\bar{\partial}^{-}P\left[-\dfrac{\sin(2\delta)}{\sqrt{e^{P}}}+\dfrac{1}{4\cos^{2}\delta}\bar{\partial}^{-}P+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4\cos^{2}\delta}\right)\bar{\partial}^{+}P\right].\end{cases} \tag{21}$$

证：首先根据方向导数定义可得

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{-}\bar{\partial}^{+}P=\left(-\sin\alpha P_{\xi}+\cos\alpha P_{\eta}\right)\bar{\partial}^{-}\alpha+\cos\alpha\bar{\partial}^{-}P_{\xi}+\sin\alpha\bar{\partial}^{-}P_{\eta},\\ \bar{\partial}^{+}\bar{\partial}^{-}P=\left(-\sin\beta P_{\xi}+\cos\beta P_{\eta}\right)\bar{\partial}^{-}\beta+\cos\beta\bar{\partial}^{+}P_{\xi}+\sin\beta\bar{\partial}^{+}P_{\eta}.\end{cases} \tag{22}$$

利用(11)，结合(16)有

$$\begin{aligned}\left(-\sin\alpha P_{\xi}+\cos\alpha P_{\eta}\right)\bar{\partial}^{-}\alpha=&-\frac{\tan\delta}{\sqrt{e^{P}}}\left(2\cos^{2}\delta-1\right)\bar{\partial}^{+}P+\frac{\tan\delta}{\sqrt{e^{P}}}\bar{\partial}^{-}P\\&+\frac{1}{4}\frac{2\cos^{2}\delta-1}{\cos^{2}\delta}\bar{\partial}^{+}P\bar{\partial}^{-}P-\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^{2}\delta}\left(\bar{\partial}^{-}P\right)^{2}\end{aligned} \tag{23}$$

且有

$$\cos\alpha\bar{\partial}^{-}P_{\xi}+\sin\alpha\bar{\partial}^{+}P_{\xi}=-\frac{\tan\delta}{\sqrt{e^{P}}}\left(\bar{\partial}^{+}P+\bar{\partial}^{-}P\right)+\frac{1}{4\cos^{2}\delta}\left(\bar{\partial}^{+}P+\bar{\partial}^{-}P\right)^{2}. \tag{24}$$

则

$$\bar{\partial}^{-}\bar{\partial}^{+}P=\bar{\partial}^{+}P\left[-\frac{\sin2\delta}{\sqrt{e^{P}}}+\frac{1}{4\cos^{2}\delta}\bar{\partial}^{+}P+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cos^{2}\delta}\right)\bar{\partial}^{-}P\right]. \tag{25}$$

同理

$$\bar{\partial}^{+}\bar{\partial}^{-}P=\bar{\partial}^{-}P\left[-\frac{\sin 2\delta}{\sqrt{\mathrm{e}^{P}}}+\frac{1}{4\cos^{2}\delta}\bar{\partial}^{-}P+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cos^{2}\delta}\right)\bar{\partial}^{+}P\right]. \tag{26}$$

由(6)可以得到α,β与ξ,η,e^{P}之间的关系，根据α,β有解可知ξ,η,e^{P}有解。令$M=\dfrac{1}{\sin\delta}$，有

$$\mathrm{e}^{P}M^{2}=\xi^{2}+\eta^{2}. \tag{27}$$

且$\bar{\partial}^{0}=-\cos\sigma\partial_{\xi}-\sin\sigma\partial_{\eta}$。因此，

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{P}M^{2}=\xi^{2}+\eta^{2},\\ \bar{\partial}^{0}\left(\mathrm{e}^{P}M^{2}\right)=-2M\sqrt{\mathrm{e}^{P}}.\end{cases} \tag{28}$$

因此对方程组(2)及(10)的解可转化为(α,β)上的解。

4. 边界值估计及局部存在性

以下做P特征分解的先验估计：首先给出边界$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$上的条件。在B点的位置靠近A点的范围内，圆弧$\overset{\frown}{AB}$弧长不超过1/4圆。假设对于凸负特征线在点C处的倾斜角β_C有$-\pi/2<\beta_C<0$。

且有如下边界值条件：

$$\beta\big|_{\overset{\frown}{AB}}=0,\quad \frac{\pi}{2}\le\alpha\big|_{\overset{\frown}{BC}}\le\pi+\beta\big|_{C},\quad \beta_C\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right).$$

4.1. 推论 1

(P的二阶方程的齐次形式)

$$\begin{cases}\bar{\partial}^{+}\left(-\dfrac{\bar{\partial}^{-}P}{\sin^{2}\delta}\right)=-\dfrac{1}{4}\tan^{2}\delta\left(\dfrac{-\bar{\partial}^{-}P}{\sin^{2}\delta}\right)^{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\bar{\partial}^{-}P}{\sin^{2}\delta}\right)\bar{\partial}^{+}P+\dfrac{\bar{\partial}^{+}P}{4\cos^{2}\delta}\left(\dfrac{-\bar{\partial}^{-}P}{\sin^{2}\delta}\right),\\ -\bar{\partial}^{-}\left(\dfrac{\bar{\partial}^{+}P}{\sin^{2}\delta}\right)=-\dfrac{1}{4}\tan^{2}\delta\left(\dfrac{\bar{\partial}^{+}P}{\sin^{2}\delta}\right)^{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\bar{\partial}^{+}P}{\sin^{2}\delta}\right)\left(-\bar{\partial}^{-}P\right)+\dfrac{-\bar{\partial}^{-}P}{4\cos^{2}\delta}\left(\dfrac{\bar{\partial}^{+}P}{\sin^{2}\delta}\right).\end{cases} \tag{29}$$

根据[17]中的证明可以得到针对退化双曲方程组(1)及边界值条件，有区域$D_{\delta}(\delta>0)$上存在方程组的唯一C^{1}-解，其中δ唯一依赖于边界$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$处α,β,P的C^{1}-范数。

4.2. 引理 1

(不变三角形)对于任意C^{2}-解，有

$$\alpha\ge\frac{\pi}{2},\beta\le 0,\frac{\pi}{2}\le\alpha-\beta\le\pi,\pm\bar{\partial}^{\pm}\alpha>0,\pm\bar{\partial}^{\pm}\beta<0. \tag{30}$$

证：由方程组(3) (10)的局部解可1得存在$\delta_0\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$使得在区域$D_{\delta_0}$中存在解。对于$\varepsilon\to\dfrac{\pi}{4}$，区域$D_{\varepsilon}$中有$\bar{\partial}^{+}\alpha>0$，$\bar{\partial}^{-}\beta>0$。

由于

$$-\bar{\partial}^{-}\bar{\partial}^{+}\beta-\frac{\tan\delta}{2\sin^{2}\delta}\left(\bar{\partial}^{+}\beta\right)^{2}+\left(-\frac{3}{\sin 2\delta}-\frac{1}{\tan\delta}\right)\bar{\partial}^{-}\beta\bar{\partial}^{+}\beta-\frac{\tan\delta\cos 2\delta}{\sqrt{\mathrm{e}^{P}}}\bar{\partial}^{+}\beta=-\frac{\tan\delta}{\sqrt{\mathrm{e}^{P}}}\bar{\partial}^{-}\beta \tag{31}$$

由于$\bar{\partial}^{+}\beta\big|_{\overset{\frown}{AB}}=0$，结合(32)可得$\bar{\partial}^{+}\beta<0$。

根据(17)得 $\bar{\partial}^+ P\big|_{\widehat{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{e^P}}\sin 2\delta > 0$。由于 $\bar{\partial}^- \beta\big|_{\widehat{BC}} > 0$，结合(19)有 $-\bar{\partial}^- P\big|_{\widehat{BC}} = \dfrac{2}{\tan\delta}\bar{\partial}^- \beta\big|_{\widehat{BC}} > 0$。

则结合(18) (19) (20)，在区域 D_{δ_0} 中有

$$\bar{\partial}^+ \alpha > 0, -\bar{\partial}^- \alpha > 0, -\bar{\partial}^- \beta < 0. \tag{32}$$

5. 梯度估计

在第四节当中，首先利用连续性方法得到关于压力 P 的 $\bar{\partial}^{\pm} P$ 的一致边界，其次利用压力 P 的特征分解，给出其常微分方程形式，从而建立梯度估计。

5.1. 引理 2

($\bar{\partial}^{\pm} P$ 的一致边界)在半双曲片区域 ABC 中，$\bar{\partial}^{\pm} P$ 的最大值是有界的，且

$$\bar{\partial}^+ P > 0,\ -\bar{\partial}^- P > 0,\ \max_{ABC}\left\{\bar{\partial}^+ P, -\bar{\partial}^- P\right\} \le 2\max_{\widehat{AB},\widehat{BC}}\left\{\bar{\partial}^+ P, -\bar{\partial}^- P\right\}. \tag{33}$$

证：根据引理 1 结论 $\bar{\partial}^+ P > 0$，$-\bar{\partial}^- P > 0$，则可知证明(34)即证明

$$\max_{ABC}\left\{\frac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}, \frac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta}\right\} \le 2\max_{\widehat{AB},\widehat{BC}}\left\{\frac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}, \frac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta}\right\} \triangleq M \tag{34}$$

只需证明对任意 $\mu > 0$，有 $\max\limits_{ABC}\left\{\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}, \dfrac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta}\right\} < M + \mu$。当在 B 点附近区域 D_ε 时，结论显然成立。否则一定有 $\delta = \delta_1$ 上的一点 P_1，在 D_{δ_1} 内 $\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta} < M + \mu$，$\dfrac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta} < M + \mu$。在点 P_1 处有 $\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta} = M + \mu$ 或 $\dfrac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta} = M + \mu$。不妨设在 $\delta = \delta_1$ 处，满足 $\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta} = M + \mu$，$\dfrac{-\bar{\partial}^- P}{\sin^2\delta} < M + \mu$。由点 P_1 处开始作负特征线，结合(33)可知 $-\bar{\partial}^-\left(\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}\right)\Bigg|_{P_1} < 0$。根据连续性可得在 P_1 的某邻域 $\cup(P_1)$ 内，有 $-\bar{\partial}^-\left(\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}\right)\Bigg|_{\cup(P_1)} < 0$ 成立。因此在该邻域内必存在点 $P_1' \in D_{\delta_1} \cap \cup(P_1)$，使得 $\dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}\Bigg|_{P_1} < \dfrac{\bar{\partial}^+ P}{\sin^2\delta}\Bigg|_{P_1'}$ 成立，与假设矛盾。根据 μ 的任意性可知引理 2 成立。

5.2. 引理 3

(一阶梯度估计)若在区域 D_ε （$\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$)内存在 C^1-连续解，存在常数 C 且与 ε 无关，有

$$\left\|(\alpha, \beta)\right\|_{C^1(D_\varepsilon)} \le C\tan^2\varepsilon. \tag{35}$$

证：根据引理 2 可得

$$\left|\bar{\partial}^+ \alpha, \bar{\partial}^- \alpha, \bar{\partial}^{\pm} \beta\right| \le C\tan\varepsilon. \tag{36}$$

结合(10)有

$$\left|\partial_\xi \alpha\right| \le \frac{-\sin\beta\left|\bar{\partial}^+ \alpha\right| + \sin\alpha\left|\bar{\partial}^- \alpha\right|}{\sin(\alpha - \beta)} \le C\tan^2\varepsilon. \tag{37}$$

同理，有 $\left|\partial_\eta \alpha, \partial_\xi \beta, \partial_\eta \beta\right| \le C\tan^2\varepsilon$。

6. 全局解

6.1. 引理 4

若在区域 D_ε （$\varepsilon < \frac{\pi}{2}$）内存在 C^2-解，存在常数 C 且与 ε 无关，有

$$\left\|(\alpha,\beta)\right\|_{C^2(D_\varepsilon)} \le C\tan^5\varepsilon. \tag{38}$$

证：结合(18)及(19)有

$$\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha = R_1\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+P + \text{低阶项}，\quad \bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha = S_1\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-P + \text{低阶项}。 \tag{39}$$

则可得 $\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha$，$\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha$ 有界。对于 $\bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\alpha$，利用(19)可得

$$\bar{\partial}^-\left(\bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\alpha\right) + G_1\bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\alpha = \text{低阶项}。 \tag{40}$$

因此 $\bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\alpha$ 有界，同理有 $\bar{\partial}^-\bar{\partial}^-\alpha, \bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\beta, \bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\beta, \bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\beta, \bar{\partial}^-\bar{\partial}^-\beta$ 有界可证。

利用(22)及(18) (19)有

$$\left|\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha\right| \le C\tan^3\varepsilon, \left|\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha\right| \le C\tan^3\varepsilon. \tag{41}$$

同理

$$\left|\bar{\partial}^+\bar{\partial}^+\alpha\right| \le C\tan^3\varepsilon, \left|\bar{\partial}^-\bar{\partial}^-\alpha\right| \le C\tan^3\varepsilon. \tag{42}$$

通过计算有

$$\left|\partial_{\xi\xi}\alpha\right| = \left|\left(\frac{-\sin\beta\bar{\partial}^+\alpha + \sin\alpha\bar{\partial}^-\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\right)_\xi\right| \le C\tan^5\varepsilon. \tag{43}$$

同理 $\left|\partial_{\xi\eta}\alpha, \partial_{\eta\eta}\alpha, \partial_{\eta\xi}\alpha\right| \le C\tan^5\varepsilon$。以上证明过程 β 同理成立。

根据所得方程组的局部存在性定理及先验估计，利用有限覆盖定理将局部解进行延拓从而得到如下定理。

6.2. 定理 2

退化双曲方程组 Goursat 问题(1) (10) (11)在半双曲片区域 ABC 内存在整体光滑解。

参考文献

[1] Zhang, T. and Zheng, Y.X. (1990) Conjecture on the Structure of Solutions of the Riemann Problem for Two-Dimensional Gas Dynamics Systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **21**, 593-630.

[2] Chang, T. and Chen, G. (1986) Some Fundamental Concepts about System of Two Spatial Dimensional Conservation Laws. *Acta Mathematica Scientia*, **6**, 463-474. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30506-X

[3] Zhang, T. and Zheng, Y.X. (1989) Two-Dimensional Riemann Problem for a Single Conservation Law. *Transactions of the American Mathematical Society*, **312**, 589-619. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0930070-3

[4] Zhang, T. and Zheng, Y.X. (1990) Conjecture on the Structure of Solutions of the Riemann Problem for Two-Dimensional Gas Dynamics Systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **21**, 593-630. https://doi.org/10.1137/0521032

[5] Chang, T., Chen, G.Q. and Yang, S. (1999) On the 2-D Riemann Problem for the Compressible Euler Equations II. Interaction of Contact Discontinuities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **6**, 419-430. https://doi.org/10.3934/dcds.2000.6.419

[6] Lax, P.D. and Liu, X.D. (1998) Solution of Two-Dimensional Riemann Problems of Gas Dynamics by Positive Schemes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19**, 319-340. https://doi.org/10.1137/S1064827595291819

[7] Schulz-Rinne, C.W. (1993) Classification of the Riemann Problem for Two-Dimensional Gas Dynamics. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **24**, 76-88. https://doi.org/10.1137/0524006

[8] Schulz-Rinne, C.W., Collins, J.P. and Glaz, H.M. (1993) Numerical Solution of the Riemann Problem for Two-Dimensional Gas Dynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14**, 1394-1414. https://doi.org/10.1137/0914082

[9] Zhang, P., Li, J. and Zhang, T. (1998) On Two-Dimensional Riemann Problem for Pressure-Gradient Equations of the Euler System. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **4**, 609-634. https://doi.org/10.3934/dcds.1998.4.609

[10] Dai, Z. and Zhang, T. (2000) Existence of a Global Smooth Solution for a Degenerate Goursat Problem of Gas Dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **155**, 277-298. https://doi.org/10.1007/s002050000113

[11] Yang, H. and Zhang, T. (2004) On Two-Dimensional Gas Expansion for Pressure-Gradient Equations of Euler System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **298**, 523-537. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.025

[12] Zheng, Y. and Song, K. (2012) Semi-Hyperbolic Patches of Solutions of the Pressure Gradient System. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—Series A*, **24**, 1365-1380. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.1365

[13] Feng, M. and Xiao, W. (2022) On the Existence of Solutions of Semi-Hyperbolic Patches to Two-Dimensional Euler Equations for a Class of Pressure Laws. *Analysis and Mathematical Physics*, **12**, 1-18. https://doi.org/10.1007/s13324-022-00707-4

[14] Li, J., Yang, Z. and Zheng, Y. (2011) Characteristic Decompositions and Interactions of Rarefaction Waves of 2-D Euler Equations. *Journal of Differential Equations*, **250**, 782-798. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.07.009

[15] Chen, X. and Zheng, Y. (2010) The Interaction of Rarefaction Waves of the Two-Dimensional Euler Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **59**, 231-256. https://doi.org/10.1512/iumj.2010.59.3752

[16] Courant, R. and Friedrichs, K.O. (1948) Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience, New York, 399-401.

[17] 王柔怀, 伍卓群. 二自变量准线性双曲型方程组的若干定解问题解的存在与唯一性[J]. 吉林大学自然科学学报, 1963(2): 459-502.