Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 335-340
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141034

Hans汉斯

型为t^r的5-半循环可分组设计

杜　珺[1]，黄月梅[1,2*]

[1]内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
[2]内蒙古自治区应用数学中心，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2023年11月27日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2024年1月31日

摘　要

半循环可分组设计在组合编码中有着广泛的应用。根据半循环可分组设计的定义，给出型为t^r，区组长度为5的半循环可分组设计存在的必要条件。再利用循环差阵、t-正则的循环填充及两种递归构造法，得到了型为t^r，区组长度为5的半循环可分组设计存在的若干充分条件。

关键词

半循环可分组设计，循环差阵，循环填充，递归构造

Semi-Cyclic Group Divisible Design of Type t^r with Block Size 5

Jun Du[1], Yuemei Huang[1,2*]

[1]College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia
[2]Inner Mongolia Center for Applied Mathematics, Hohhot Inner Mongolia

Received: Nov. 27th, 2023; accepted: Dec. 14th, 2023; published: Jan. 31st, 2024

Abstract

Semi-cyclic group divisible design has many applications in combinatorial coding. The necessary condition of semi-cyclic group divisible design of type t^r with block size 5 was obtained from the definition. In addition, several spectrums of semi-cyclic group divisible design with block size 5 were obtained by employing cyclic difference matrix, t-regular cyclic packing with the aid of two recursive constructions.

*通讯作者。

文章引用: 杜珺, 黄月梅. 型为 t^r 的 5-半循环可分组设计[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 335-340.
DOI: 10.12677/pm.2024.141034

Keywords

Semi-Cyclic Group Divisible Design, Cyclic Difference Matrix, Cyclic Packing, Recursive Construction

1. 引言

设 r,t 和 k 都是正整数，$I_r=\{0,1,2,\cdots,r-1\}$ 且 Z_t 表示模 t 剩余类加群。令 $\mathcal{B}^*$ 是点集 $X=I_r\times Z_t$ 的 k 元子集族(基区组集)。对 I_r 中任意两个整数 x 和 y 及 $\mathcal{B}^*$ 中的 k-子集 B 定义

$$\Delta_{xy}B=\{j-i:(x,i),(y,j)\in B\text{且}(x,i)\neq(y,j)\},$$

则 $\Delta_{xy}\mathcal{B}^*=\bigcup_{B\in\mathcal{B}^*}\Delta_{xy}B$，其中减法模 t 计算。$\Delta_{xy}\mathcal{B}^*$ 中的差称为 $\mathcal{B}^*$ 的 (x,y) 差。若当 $x\neq y$ 时，$\Delta_{xy}\mathcal{B}^*=Z_t$，否则 $\Delta_{xy}\mathcal{B}^*=\varnothing$，则称 $(X,\mathcal{G},\mathcal{B}^*)$ 是 $X=I_r\times Z_t$ 上，组集为 $\mathcal{G}=\{\{x\}\times Z_t:x\in I_r\}$ 的一个型为 t^r 的半循环可分组设计(semi-cyclic group divisible design)，简记为 k-SCGDD。

例 1 令 $X=I_5\times Z_7$，$\mathcal{G}=\{\{x\}\times Z_7:x\in I_5\}$，则下列 7 个区组构成型为 7^5 的 5-SCGDD 的基区组：

$$\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\},\ \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,0)\},$$

$$\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,1),(4,0)\},\ \{(0,3),(1,6),(2,2),(3,5),(4,0)\},$$

$$\{(0,4),(1,1),(2,5),(3,2),(4,0)\},\ \{(0,5),(1,3),(2,1),(3,6),(4,0)\},$$

$$\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,0)\},$$

通过对以上七个基区组的每个元素的第二分量加 1 并模 7 运算就可以得到型为 7^5 的 5-SCGDD 的所有区组。

半循环可分组设计的定义由 Yin J. [1]提出。半循环可分组设计在其它设计和光正交码的构造中有重要的应用，因此它的存在性和组合构造问题被进行了系统地研究。Gallant R. P.等[2]解决了 3-SCGDD 存在的充要条件。Wang J. [3]和 Wang K. [4]等给出型为 m^n 的 k-SCGDD 的递归构造方法，并解决了 4-SCGDD 的存在问题。近期，Wang L.等[5]给出当 p 为奇素数，t 为正整数时，型为 $(p^r)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)^t}$ 的 $\frac{p+1}{2}$-SCGDD 的存在条件。

目前关于 5-SCGDD 还没有独立的研究结果，因此本文对 5-SCGDD 的存在谱和构造问题进行了研究。首先从半循环可分组设计的定义出发，给出了型为 t^r 的 5-SCGDD 存在的必要条件，再借助循环差阵和 t-正则循环填充设计及递归构造方法得到了型为 t^r 的 5-SCGDD 存在的部分充分条件，所得结果丰富了半循环可分组设计的研究内容。

2. 辅助设计及构造方法

半循环可分组设计的结构与循环差阵、循环填充及平衡不完全区组设计等设计有密切联系，下面给出相关设计的定义。

设 k,t 是正整数。一个循环差阵(CDM)是一个 $k\times t$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}\in Z_t$，且任意两行都满足

$\{a_{mj}-a_{nj}\,(\bmod t):0\le j\le t-1\}=Z_t$，其中$0\le m$，$n\le k-1$，$m\ne n$，记作$(k,t)$-CDM。

令$v=rt$，$X=Z_{rt}$，$\mathcal{A}$是X的s个k元子集(基区组)的集合。若$\Delta\mathcal{A}=\{b-a(\bmod v):A_i\in\mathcal{A},a,b\in A_i,a\ne b,1\le i\le s\}$包含$Z_{rt}$中的每个非零元至多一次，则$(X,\mathcal{A})$称为一个循环填充设计，记作CP $(k,1;rt)$。特别地，若$Z_{rt}\setminus\Delta\mathcal{A}$可构成$Z_{rt}$的一个阶为$t$的加法子群，则CP$(k,1;rt)$又记作$t$-正则CP $(k,1;rt)$。在文献[6]中，t-正则CP $(k,1;v)$也被称作差族，简记为$(v,t,k,1)$-DF。

设v,k,λ是正整数。一个平衡不完全区组设计，记作BIBD $(k,\lambda;v)$ (或B $(k,\lambda;v)$)，是一个二元组$(X,\mathcal{B})$，需满足条件：1) $|X|=v$；2) 对任意的$B\in\mathcal{B}$，都有$|B|=k$；3) X中任意两个不同的元素都恰好包含在λ个区组B中。

半循环可分组设计与以上几个设计之间的关系有如下几个结论。

引理1 [3]型为t^k的k-SCGDD与(k,t)-CDM等价。

引理2 [3]若t-正则CP $(k,1;rt)$存在，则存在型为t^r的k-SCGDD。

以下是与半循环可分组设计有关的两个递归构造法。

构造法1 [3]若型为t^r和型为m^k的k-SCGDD都存在，则存在型为$(tm)^r$的k-SCGDD。

构造法2 [3]若B$(k,1;v)$和型为t^k的k-SCGDD存在，则存在型为t^v的k-SCGDD。

以上两种构造方法具有一定的普适性，有助于我们得到更多类型的半循环可分组设计。

文献[7]-[13]中给出关于B $(5,1;v)$、$(5,t)$-CDM和t-正则CP $(5,1;rt)$的存在条件如下：

引理3 [7]当$v\equiv 1,5(\bmod 20)$且$v\ge 5$时，B $(5,1;v)$存在。

引理4 [8]当t是奇数，$t\ne 3$且$\gcd(t,27)\ne 9$时，$(5,t)$-CDM存在；当$t=9p$，$p\in\{3,5,7,9,11,13,17,19,23,27,29,31,109\}$时，$(5,t)$-CDM也存在。

引理5 [9]当$k\ge 3$，t为偶数时，(k,t)-CDM不存在；$(4,9)$-CDM也不存在。

推论1 $(5,9)$-CDM不存在。

证明：设A是一个(k,t)-CDM。由循环差阵的定义，移除A中任意一行得到一个$(k-1,t)$-CDM；因此，若$(k-1,t)$-CDM不存在，则(k,t)-CDM也不存在。由引理5可知，$(4,9)$-CDM不存在，故$(5,9)$-CDM也不存在。

引理6 [10] [11] [12] [13]设t,r是正整数，则对下列参数，t-正则CP$(5,1;rt)$存在：

1) 当$t=5,15$或45，$r\equiv 1(\bmod 4)$是素数且$r>5$；

2) 当$(t,r)\in\{(2,41),(2,61),(3,41),(3,61),(5,25),(8,16),(10,9),(10,13),(10,17),(12,16),(15,9),(20,11),(25,9)\}$；

3) 当$t=4$或20，$r\equiv 1(\bmod 10)$是素数且$r\ne 11$；

4) 当$t=8$或12，$r\equiv 11(\bmod 20)$是素数；

5) 当$t=60$，r是素数且$r>5$。

下面给出利用循环差阵、t-正则循环填充以及递归构造法构造半循环可分组设计的具体例子。

例2 型为5^5的5-SCGDD存在。

证：一个(5,5)-CDM如矩阵A所示：

$$A=\begin{bmatrix}0&2&4&3&1\\0&4&3&1&2\\0&3&1&2&4\\0&1&2&4&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

可以验证，当$0\le m$，$n\le 4$，$m\ne n$时，任意两行都满足$\left\{a_{mj}-a_{nj}\left(\bmod 5\right):0\le j\le 4\right\}=Z_5$，符合循环差阵的定义。令$I_5=\{0,1,2,3,4\}$，$B_j=\left\{\left(0,a_{0j}\right),\left(1,a_{1j}\right),\left(2,a_{2j}\right),\left(3,a_{3j}\right),\left(4,a_{4j}\right)\right\}$，其中$j=0,1,2,3,4$，则$\mathcal{B}^*=\{B_0,B_1,B_2,B_3,B_4\}$构成点集$X=I_5\times Z_5$上，组集为$\mathcal{G}=\left\{\{x\}\times Z_5:x\in I_5\right\}$的型为$5^5$的5-SCGDD的基区组集。

例3 若存在10-正则CP $(5,1;9\times10)$，则存在型为10^9的5-SCGDD。

证明：文献[10]给出一个10-正则CP $(5,1;9\times10)$的基区组集$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$，其中四个区组为$A_1=\{0,1,3,8,58\}$，$A_2=\{0,4,21,51,70\}$，$A_3=\{0,6,16,29,44\}$，$A_4=\{0,11,25,37,59\}$。

对于任意的$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\in\mathcal{A}$，令$a_l=m_l+9n_l$，$0\le m_l\le 8$，$1\le l\le 5$，则得到对应的二元组$B_A=\left\{(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3),(m_4,n_4),(m_5,n_5)\right\}$。定义$A^j=\{a_1+j,a_2+j,a_3+j,a_4+j,a_5+j\}$为$A$的平移，$j=0,1,\cdots,8$。对$\mathcal{A}$的四个区组及它们的平移做上述转换，则$\mathcal{B}=\left\{B_{A_i^j}\mid i=1,2,3,4;j=0,1,\cdots,8\right\}$构成点集$X=I_9\times Z_{10}$上，组集为$\mathcal{G}=\left\{\{x\}\times Z_{10}:x\in I_9\right\}$的型为$10^9$的5-SCGDD的基区组集。

例4 若型为7^5和型为5^5的5-SCGDD都存在，则型为35^5的5-SCGDD也存在。

证明：设型为7^5的5-SCGDD的点集$X=I_5\times Z_7$，组集$\mathcal{G}=\left\{\{x\}\times Z_7:x\in I_5\right\}$，基区组集$\mathcal{B}^*=\{B_i\mid i=1,\cdots,7\}$。对任意$B=\left\{(a_0,b_0),(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3),(a_4,b_4)\right\}\in\mathcal{B}^*$，由例2，存在点集$I_5\times Z_5$上，组集为$\mathcal{G}=\left\{\{x\}\times Z_5:x\in I_5\right\}$，基区组集$\mathcal{C}^*=\{C_i\mid i=1,\cdots,5\}$的型为$5^5$的5-SCGDD。利用构造1，对任意的$C\in\mathcal{C}^*$，$C=\left\{(c_0,d_0),(c_1,d_1),(c_2,d_2),(c_3,d_3),(c_4,d_4)\right\}$，做

$$D_B=\left\{\left(a_{c_0},b_{c_0}+7d_0\right),\left(a_{c_1},b_{c_1}+7d_1\right),\left(a_{c_2},b_{c_2}+7d_2\right),\left(a_{c_3},b_{c_3}+7d_3\right),\left(a_{c_4},b_{c_4}+7d_4\right)\right\}.$$

再令$\mathcal{D}_B$表示这些D_B构成的集合，其中$\left\{(c_0,d_0),(c_1,d_1),(c_2,d_2),(c_3,d_3),(c_4,d_4)\right\}$取遍$\mathcal{C}^*$中的5个基区组，则$\mathcal{D}^*=\bigcup_{B\in\mathcal{B}^*}\mathcal{D}_B$构成点集$X=I_5\times Z_{35}$上，组集$\mathcal{G}=\left\{\{x\}\times Z_{35}:x\in I_5\right\}$的型为$35^5$的5-SCGDD的基区组集。

3. 型为t^r的5-SCGDD的存在条件

这一小节将讨论型为t^r的5-SCGDD的存在条件。

定理1 型为t^r的5-SCGDD存在的必要条件是$r\ge5$，$(r-1)t\equiv0\left(\bmod 4\right)$且$r(r-1)t\equiv0\left(\bmod 20\right)$。

证明：设$\left(X,\mathcal{G},\mathcal{B}^*\right)$是一个型为$t^r$的5-SCGDD。由可分组设计的定义，区组中的每个点取自不同的组，故$r\ge5$；而包含点集中任意一个点x的区组个数为$r_x=\dfrac{t(r-1)}{4}$，又r_x为正整数，所以$(r-1)t\equiv0\left(\bmod 4\right)$。因为共有$rt$个点，所有的区组个数为$b=\dfrac{t^2r(r-1)}{20}$，而每个区组轨道的长为$t$，所以基区组的个数为$b^*=\dfrac{tr(r-1)}{20}$，因此$r(r-1)t\equiv0\left(\bmod 20\right)$。

定理2 若t是奇数且$t\ne3,9$或$9p$，其中p是素数，$p\ge37$且$p\ne109$时，型为t^5的5-SCGDD存在。当$t\in\{3,9\}$或为偶数时，型为t^5的5-SCGDD不存在。

证明：当$t=3$时，$(5,3)$-CDM不存在，由引理1，型为3^5的5-SCGDD不存在；由引理1、5和推论1，当$t=9$或t是偶数时，型为t^5的5-SCGDD不存在；当t是奇数且$\gcd(t,27)\ne9$以及$t=9p$，p为素数，$3\le p\le31$或$p=109$时，由引理1、4可知，型为t^5的5-SCGDD存在。下面只需考虑$t=9p_1p_2\cdots p_m$，$m\ge2$，其中$p_i\ge5$，$1\le i\le m$是素数的情况。由引理1、4，存在型为$(3p_1)^5$的5-SCGDD和型为$(3p_2p_3\cdots p_m)^5$的5-SCGDD，再由构造法1，型为$(9p_1p_2\cdots p_m)^5$的5-SCGDD存在。综上，结论得证。

定理3 当t为奇数，$t\ne3,9$或$9p$，$p\ge37$为素数且$p\ne109$，$r\equiv1,5\left(\bmod 20\right)$，$r>5$时，型为$t^r$的5-SCGDD存在。

证明：由引理3，当 $r\equiv 1,5\pmod{20}$ 且 $r\geq 5$ 时，B $(5,1;r)$ 存在；又由定理2，当 t 是奇数，$t\neq 3,9$ 或 $9p$，$p\geq 37$ 是素数且 $p\neq 109$ 时，型为 t^5 的5-SCGDD存在；再利用构造法2，结论得证。

由引理2、6及定理3易得下面结论。

推论2 当 t,r 满足下列条件之一时，型为 t^r 的5-SCGDD存在：

1) $(t,r)\in\{(3,41),(3,61),(15,9),(25,9)\}$；

2) $t=5,15$ 或 45，$r\equiv 9,13,17\pmod{20}$ 是素数。

推论3 当 m,q 为奇数，$m,q\neq 3,9$ 或 $9p$，$p\geq 37$ 为素数且 $p\neq 109$，t 和 r 取值为以下情况时，型为 $(tm)^r$ 的5-SCGDD存在：

1) $t=2$，$r=41,61$ 且 $m\neq 5q$；

2) $t=4$，$r\equiv 1\pmod{10}$ 是素数且 $r\neq 11$，$m\neq 5q$；

3) $t=8$，$r\equiv 11\pmod{20}$ 是素数或 $r=16$；

4) $t=10$，$r=9,13,17,41,61$；

5) $t=12$，$r\equiv 11\pmod{20}$ 是素数或 $r=16$，$m\neq \frac{1}{3}q,\frac{5}{3}q$ 和 $5q$；

6) $t=20$，$r\equiv 1\pmod{10}$ 是素数，$m\neq 3q$；

7) $t=60$，$r>5$ 是素数。

证明：利用构造法1，结合引理2、6和定理2，结论得证。

4. 小结

本文先确定了型为 t^r 的区组长度为5的半循环可分组设计存在的必要条件，再根据已知的辅助设计，如循环差阵，t-正则循环填充的部分存在条件及两个递归构造方法，给出型为 t^r 的5-SCGDD存在的若干充分条件，即得到了此半循环可分组设计的无穷类，所得结果对半循环可分组设计及带有AM-OPPTS/PW限制的光正交码的研究工作有一定的理论参考价值。

基金项目

国家自然科学基金青年基金项目(11401326)；无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课题(2023KFZR03)；内蒙古自治区高等学校科学研究项目(NJZY19021，NJZY22599，NJZY22600)。

参考文献

[1] Yin, J.X. (2002) A General Construction for Optimal Cyclic Packing Designs. *Journal of Combinatorial Theory* (*Series A*), **97**, 272-284. https://doi.org/10.1006/jcta.2001.3215

[2] Gallant, R.P., Jiang, Z. and Ling, A.C.H. (1999) The Spectrum of Cyclic Group Divisible Designs with Block Size Three. *Journal of Combinatorial Design*, **7**, 95-105. https://doi.org/10.1002/(SICI)1520-6610(1999)7:2%3C95::AID-JCD2%3E3.0.CO;2-K

[3] Wang, J.M. and Yin, J.X. (2010) Two-Dimensional Optical Orthogonal Codes and Semicyclic Group Divisible Designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 2177-2187. https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2043772

[4] Wang, K. and Wang, J.M. (2012) Semicyclic 4-GDDs and Related Two-Dimensional Optical Orthogonal Codes. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **63**, 305-319. https://doi.org/10.1007/s10623-011-9556-3

[5] Wang, L.D., Feng, T., Li, Y.T., *et al.* (2023) Construction for Multichannel Conflict-Avoiding Codes with AM-OPPTS Restriction. *IEEE Transactions on Information Theory*, **69**, 7398-7413. https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3299307

[6] Ge, G.N. and Yin, J.X. (2001) Constructions for Optimal $(v,4,1)$ Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **47**, 2998-3004. https://doi.org/10.1109/18.959278

[7] Hanani, H. (1975) Balanced Incomplete Block Designs and Related Designs. *Discrete Mathematics*, **11**, 255-369. https://doi.org/10.1016/0012-365X(75)90040-0

[8] Pan, R., Abel, R.J.R., Bunjamin, Y.A., *et al.* (2022) Difference Matrices with Five Rows over Finite Abelian Groups. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **90**, 367-386. https://doi.org/10.1007/s10623-021-00981-6

[9] Ge, G.N. (2005) On $(g,4;1)$-Difference Matrices. *Discrete Mathematics*, **301**, 164-174. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.07.004

[10] Yin, J.X. (1998) Some Combinatorial Constructions for Optical Orthogonal Codes. *Discrete Mathematics*, **185**, 201-219. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00172-6

[11] Chang, Y.X. and Ji, L.J. (2004) Optimal $(4up,5,1)$ Optical Orthogonal Codes. *Journal of Combinatorial Designs*, **12**, 346-361. https://doi.org/10.1002/jcd.20011

[12] Ma, S. and Chang, Y.X. (2004) A New Class of Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight Five. *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**, 1848-1850. https://doi.org/10.1109/TIT.2004.831845

[13] Ma, S. and Chang, Y.X. (2005) Constructions of Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight Five. *Journal of Combinatorial Designs*, **13**, 54-69. https://doi.org/10.1002/jcd.20022