Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 237-244
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145181

Hans汉斯

模糊赋范Riesz空间上模糊算子的研究

陈　强，周姮媛

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月29日；发布日期：2024年5月29日

摘　要

本文在模糊赋范Riesz空间中引入-α范数，给出弱模糊范数有界线性泛函的定义。研究了模糊序有界线性泛函与弱模糊范数有界线性泛函之间的关系。在模糊Banach格上，模糊序有界线性泛函和弱模糊范数有界线性泛函是等价的。

关键词

模糊Riesz空间，模糊赋范Riesz空间，模糊序有界线性泛函，弱模糊范有界线性泛函

Research on Fuzzy Operators on Fuzzy Normed Riesz Space

Qiang Chen, Hengyuan Zhou

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 29th, 2024; published: May 29th, 2024

Abstract

In this paper, α-norm is introduced in fuzzy normed Riesz space, and the definition of fuzzy weak norm bounded linear functional is given. The relationship between fuzzy ordered bounded linear functionals and fuzzy weakly norm bounded linear functionals is studied. On fuzzy Banach lattices, fuzzy order bounded linear functionals and fuzzy weak norm bounded linear functionals are equivalent.

Keywords

Fuzzy Riesz Space, Fuzzy Normed Riesz Space, Fuzzy Ordered Bounded Linear Functional, Fuzzy Weakly Norm Bounded Linear Functional

文章引用: 陈强, 周姮媛. 模糊赋范 Riesz 空间上模糊算子的研究[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 237-244.
DOI: 10.12677/pm.2024.145181

1. 引言

模糊数学是一门研究模糊概念和模糊集合理论的学科，而泛函分析是研究赋范空间和度量空间的数学分支。模糊赋范 Riesz 空间是具有模糊结构和范数的 Riesz 空间。在实际应用中，模糊赋范 Riesz 空间可以用来描述一些模糊性质较强的问题，比如模糊逻辑和模糊决策问题。其理论和方法可以为处理这类模糊问题提供一种新的算法和工具。

自 1965 年，Zadeh [1] [2]提出模糊集和模糊序的概念后，1984 年，Katsaras [3]引入模糊半赋范和模糊赋范线性空间的概念，并研究它们的一些基本性质。1992 年 Venugopalan [4]系统讨论模糊序集的一些基本性质，如上(下)确界、幂等性、交换性、吸收性等，引入了模糊偏序集的概念。同年，Felbin [5]引入一种模糊赋范线性空间，证明模糊赋范线性空间的有限维模糊子空间是完备模糊赋范线性空间。

1994 年，Beg 和 Islam [6]讨论了模糊 Riesz 空间中元素与其正部、负部、绝对值之间的运算关系，并研究了模糊 Riesz 分解性。1995 年，Beg 和 Islam [7]讨论了模糊序收敛的相关性质，并讨论了模糊序线性空间中元素上确界和下确界的相关等式。2003 年，Bag 和 Samanta [8]给出了线性空间上模糊范数的定义。建立了模糊范数的分解定理并研究了有限维模糊赋范空间的相关性质。2005 年，Bag 和 Samanta [9]引入模糊赋范线性空间上线性算子有界性概念，定义两类模糊有界线性算子(强算子和弱算子)，并研究了模糊连续性与模糊有界性之间的关系。在模糊赋范线性空间中，证明了 Hahn-Banach 定理、开映射定理、闭图像定理和一致有界定理。2015 年，Hong [10]定义并研究了模糊 Riesz 子空间、模糊理想、模糊带和模糊带投影等概念。2018 年，Park [11]在模糊赋范 Riesz 空间中研究了模糊序列的一致有界性和收敛性，并证明了模糊 Banach Riesz 空间中格同态的 Hyers-Ulam 稳定性。2020 年，Iqbal [12]给出了模糊 Riesz 同构的条件。2021 年，Guirao [13]等人研究了模糊 Riesz 空间上模糊正算子绝对值的存在性，并讨论了模糊序有界线性算子的格运算公式。2022 年，Bashir 和 Iqbal [14]研究了模糊 Banach 格中的无界模糊范数收敛。

本文的结构如下：在第二节中，我们给出了与本文研究相关的一些定义和定理，以及相关结论。第三节是本文的主要结论，其中我们在模糊赋范 Riesz 空间中引入 α -范数，给出弱模糊范数有界线性泛函的定义。讨论了模糊序有界线性泛函与弱模糊范数有界线性泛函之间的关系。在模糊 Banach 格上，模糊序有界线性泛函和弱模糊范数有界线性泛函是等价的。

2. 预备知识

定义 2.1 [2] 设 H 是论域。H 中的模糊关系如果满足以下条件：

(i) 假设 $k\in H$，则 $\mu(k,k)=1$ (自反性)；

(ii) 假设 $k,l\in H$，若 $\mu(k,l)+\mu(l,k)>1$，则 $k=l$ (反对称性)；

(iii) 假设 $k,s\in H$，则 $\mu(k,s)\geq\vee_{l\in H}\left[\mu(k,l)\wedge\mu(l,s)\right]$ (传递性)。

则称其为模糊偏序关系，其中 $\mu:H\times H\to[0,1]$ 是 $H\times H$ 的模糊子集的隶属函数。若集合 H 存在模糊偏序关系 μ，则称 H 是模糊偏序集，记作 (H,μ)。

定义 2.2 [4] 设 (H,μ) 是模糊偏序集。若 H 的所有有限子集都有上确界和下确界，则称 H 是模糊格。若 H 的任意子集都有上确界和下确界，则 H 称为完备的模糊格。

定义 2.3 [5] 设(H,μ)是模糊序线性空间。若(H,μ)也是模糊格，则(H,μ)是模糊 Riesz 空间。

定义 2.4 [10] 设(H,μ)是模糊 Riesz 空间。H中所有正元素组成的集合称为H的正部，记为H^{+}，且$H^{+}=\left\{u\in H\mid \mu(0,u)>\frac{1}{2}\right\}$。

定义 2.5 [10] 假设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，Q是H的子空间，如果它满足以下两个条件：

(i) $u\in Q$当且仅当$|u|\in Q$；

(ii)对任意$v\in Q$，且$\mu(u,v)>\frac{1}{2}$，有$u\in Q$。

则Q是H的模糊理想。

定义 2.6 [10] 设(H,μ)是模糊 Riesz 空间，B是H中的模糊理想。B是模糊带当且仅当$Q\subset B$且$u=\sup Q$时，有$u\in B$。设Q是H的子集。H中包含Q最小模糊带被称为由Q生成的模糊带，记作B_Q。如果Q是单元集，即$Q=\{u\}$(其中$u\in H$)，则B_Q常写为B_u，并称B_u为由元素u生成的模糊正则带。

定义 2.7 [10] 设(H,μ)，(L,η)是模糊 Riesz 空间，$G:(H,\mu)\to(L,\eta)$是线性算子。若$\mu(0,u)>\frac{1}{2}$，有$\eta(0,G(u))>\frac{1}{2}$，则称G是模糊正算子。

定义 2.8 [12] 设(H,μ)，(L,η)是模糊 Riesz 空间，$G:(H,\mu)\to(L,\eta)$是正线性算子，则

(i) 当$C\subseteq H$是模糊序有界时，$G(C)\subseteq L$是模糊序有界的，称G是模糊序有界算子；

(ii) 若在H中，可由$k_\lambda\to 0(fo)$推得$G(k_\lambda)\to 0(fo)$，称G是模糊序连续算子；

(iii) 若在H中，可由$(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0(fo)$推得$G(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0(fo)$，称$G$是模糊$\sigma$-序连续算子。

定义 2.9 [11] 设$(H,\le)$是模糊 Riesz 空间。函数$N:H\times R\to[0,1]$称为H上的模糊 Riesz 范数，若对任意$u,v\in H$，$k,l\in R$。

(i) 当$l\le 0$时，有$N(u,l)=0$；

(ii) $u=0$当且仅当对任意$l>0$，有$N(u,l)=1$；

(iii) 若$\alpha\ne 0$，则$N(\alpha u,l)=N\left(u,\frac{l}{|\alpha|}\right)$；

(iv) $N(u+v,k+l)\ge\min\{N(u,k),N(v,l)\}$；

(v) $N(u,\cdot)$是R上的一个非递减函数并且$\lim\limits_{l\to\infty}N(u,l)=1$；

(vi) 若$u\ne 0$，则$N(u,\cdot)$在R上连续；

(vii) 当$|u|\le|v|$时，$N(u,l)\ge N(v,l)$。

则称$(H,\le,N)$是模糊赋范 Riesz 空间。

例子 2.10 [11] 设$(H,\le,\|\cdot\|)$是赋范 Riesz 空间，定义：

$$N(u,t)=\begin{cases}0, & \text{若 } t\le\|u\|\\ 1, & \text{若 } t>\|u\|\end{cases}$$

则$(H,\le,\|\cdot\|)$是模糊赋范 Riesz 空间。

定义 2.11 [11] 设$(H,\le,N)$是模糊赋范 Riesz 空间。对任意序列$\{v_n\}\in H$，如果对任意$\varepsilon>0$，$\delta>0$存在n_0使得$N(v_m-v_n,\delta)>1-\varepsilon$，$(m,n\ge n_0)$，则序列$\{v_n\}$是模糊柯西序列。

定理 2.12 [11] 设$(H,\le,N)$是模糊赋范 Riesz 空间。对任意递增收敛序列$\{v_n\}\in H$都有$\lim\limits_{n\to\infty}N(v_n-u,l)=1$ ($l>0$)，则$u=\sup\{v_n:n=0,1,2,\cdots\}$。

定义 2.13 [9] 设(H,N_1)，(L,N_2)是模糊赋范线性空间，$G:(H,N_1)\to(L,N_2)$是线性算子。G弱模

糊范数有界当且仅当对任意 $\alpha\in(0,1)$，$u\in H$，$l\in R$，存在 $M_\alpha>0$，使得 当 $N_1\left(u,\frac{l}{M_\alpha}\right)\geq\alpha$ 时，有 $N_2\left(T(u),l\right)\geq\alpha$。

3. 弱模糊范数有界线性泛函

本章我们在文献[8] [9]所提出的模糊赋范线性空间和模糊赋范 Riesz 空间的基础上，引入模糊 α-范数，并给出模糊线性泛函的 α-范数形式。证明在 α-范数下 $\left(H',\eta,\|\cdot\|_\alpha'\right)$ 是模糊 Banach 格。最后讨论弱模糊范数有界线性泛函与模糊序有界线性泛函的关系。

定理 3.1 [15] 设 (H,μ,N) 是模糊赋范 Riesz 空间。

(viii) 对任意 $u\in H$，$l>0$，若 $N(u,l)>0$，则 $u=0$。定义：

$$\|u\|_\alpha=\inf\{l>0:N(u,l)\geq\alpha\},\ \alpha\in(0,1)$$

则 $\left\{\|\cdot\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$ 是 H 上的一个升序范数族。这个范数是 H 相对于模糊范数 N 的 α-范数。

注解 3.2 设 (H,μ,N) 是满足条件(viii)的模糊赋范 Riesz 空间，则对任意 $k,l\in H$，当 $\mu(k,l)>\frac{1}{2}$ 时，$\|k\|_\alpha\leq\|l\|_\alpha$。

注解 3.3 在模糊赋范 Riesz 空间中，模糊序列关于模糊范数的收敛性与关于模糊 α-范数的收敛性相同。即对任意 $\{u_n\}\in H$，$l>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}N(u_n-u,l)=1$ 当且仅当对任意 $\alpha\in(0,1)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_\alpha=0$。

注解 3.4 定义函数 $N:H\times H\to[0,1]$，$N(u,l)=\begin{cases}0, & 若\ l\leq|u|\\ 1, & 若\ l>|u|\end{cases}$。通过证明 N 构成 R 上的模糊范数，可以得到 R 是具有模糊范数 N 的 Riesz 空间。如果模糊赋范 Riesz 空间 (H,μ,N) 满足条件(viii)，则

$$\|u\|_\alpha=\inf\{l>0:N(u,l)\geq\alpha\},\alpha\in(0,1)=\inf\{l>0:l>|u|\}=|u|$$

定义 3.5 设 (H,μ,N) 是模糊赋范 Riesz 空间，H' 表示 H 上关于弱模糊范数有界的线性泛函的集合。设 $\xi\in H'$，定义：

$$\|\xi\|_\alpha'=\sup\left\{\frac{|\xi(u)|}{\|u\|_\alpha}:u\in H,u\neq0\right\},\quad\forall\alpha\in(0,1)$$

则 $\left\{\|\cdot\|_\alpha':\alpha\in(0,1)\right\}$ 是 H' 上的一个升序范数族。

定理 3.6 设 (H,μ,N) 是满足条件(viii)的模糊赋范 Riesz 空间，设 ξ 是 H 上的模糊线性泛函。则 ξ 是弱模糊范数有界当且仅当对任意 $\alpha\in(0,1)$，存在 $G_\alpha>0$，使得 $|\xi(u)|\leq G_\alpha\cdot\|u\|_\alpha^1$ 成立。

证明：根据文献[9]中定理 3.8，如果我们考虑模糊赋范线性空间上的线性泛函，即使我们用模糊赋范 Riesz 空间代替这个空间，这个证明依然是成立的。

在模糊赋范 Riesz 空间中，每一个模糊收敛序列都是模糊柯西序列。如果每个模糊柯西序列都收敛，则称这个模糊赋范 Riesz 空间为完备空间，也称模糊 Banach 格。

定理 3.7 设 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是满足条件(viii)的模糊赋范 Riesz 空间，设 ξ 是 H 上的弱模糊范数有界线性泛函，则 $\left(H',\eta,\|\cdot\|_\alpha'\right)$ 是模糊 Banach 格。

证明：假设 $\{\xi_n:n=1,2,\cdots\}$ 是 H' 中的模糊柯西序列，则对任意 $\varepsilon>0$，$n\leq m$，都有 $\|\xi_n-\xi_m\|_\alpha'\leq\varepsilon$，且存在 $G_\alpha>0$，使得对任意 $u\in H$ 及一切 ξ_n，有 $|\xi_n(u)|\leq G_\alpha\cdot\|u\|_\alpha^1$。

对任意 $u\in H$，有 $|\xi_n(u)-\xi_m(u)|\leq\|\xi_n-\xi_m\|_\alpha'\|u\|_\alpha^1\to0$ （$n\leq m\to\infty$），则序列 $\{\xi_n(u):n=1,2,\cdots\}$ 是 R 中的模糊柯西序列。注意到 R 是模糊 Banach 格，则存在 $\xi(u)$，使得 $\xi_n(u)\to\xi(u)$，$|\xi_n(u)|\to|\xi(u)|$，且

$\xi \in H'$（对任意 $u \in H$ 及一切 ξ_n，都有 $\left|\xi_n(u)\right| \le G_\alpha \cdot \|u\|_\alpha^1$）。

给定 $\varepsilon > 0$，当 $m \to \infty$ 时，$\left|\xi_n(u) - \xi_m(u)\right| \to \left|\xi_n(u) - \xi(u)\right|$，且对一切 $n(\varepsilon) \le n \le m$，有 $\left|\xi_n(u) - \xi_m(u)\right| \le \varepsilon \cdot \|u\|_\alpha^1$。则对一切 $n(\varepsilon) \le n$，$u \in H$，有

$\left|\xi_n(u) - \xi(u)\right| \le \varepsilon \cdot \|u\|_\alpha^1$

所以 $\|\xi_n - \xi\|_\alpha' \le \varepsilon$。因此，$\left(H', \eta, \|\cdot\|_\alpha'\right)$ 是模糊 Banach 格。

假设 (H,μ)，(L,η) 是模糊 Riesz 空间，G 是 H 到 L 的模糊正线性算子。$\mathcal{L}_b(H,L)$ 表示从 H 到 L 的所有模糊序有界线性算子的集合，$\mathcal{L}_n(H,L)$ 表示从 H 到 L 所有模糊序连续线性算子。此外，H 上所有模糊线性泛函，记为 $H^\sim$，即 $H^\sim = \mathcal{L}_b(H,R)$。同样地，$H_n^\sim = \mathcal{L}_n(H,R)$。

定理 3.8 [16] 设 (H,μ) 是模糊 Riesz 空间，ξ 是 H 上模糊线性泛函。则 ξ 是模糊序有界线性泛函当且仅当对任意模糊(相对)一致收敛于 0 的序列 $\{u_n : n = 1,2,\cdots\} \in H^+$，都有 $\xi(u_n) \to 0$。

引理 3.9 设 $\left(H, \mu, \|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊赋范 Riesz 空间，设 ξ 是 H 上的弱模糊范数有界线性泛函，则 $\xi \in H^\sim$。此外，若 $|\xi| \in H'$，则 $\left\||\xi|\right\|_\alpha' = \|\xi\|_\alpha'$。

证明：要证明 $\xi \in H'$ 是模糊序有界的，则需证明 $\left\{\left|\xi(w)\right| : v, w \in H^+, \mu(|w|, v) > \frac{1}{2}\right\}$ 是有限的。由于 ξ 是弱模糊范数有界的，则存在 $G_\alpha > 0$，使得对任意 $\alpha \in (0,1)$，使得 $\left|\xi(w)\right| \le G_\alpha \|w\|_\alpha^1$ 成立。

假设 $w \in H$ 满足条件 $\mu(w,v) > \frac{1}{2}$，则对任意 $\alpha \in (0,1)$，有 $\|w\|_\alpha^1 \le \|v\|_\alpha^1$。因此，

$$\left|\xi(v)\right| \le \|\xi\|_\alpha' \cdot \|v\|_\alpha^1 \le G_\alpha \cdot \|v\|_\alpha^1 < \infty$$

则 $\xi \in H^\sim$，由此可得 $|\xi| \in H^\sim$。

令 $|\xi| \in H'$，$\xi \le |\xi|$，则 $\|\xi\|_\alpha' \le \left\||\xi|\right\|_\alpha'$。

相反地，对任意 $v \in H^+$，我们有 $|\xi|(v) = \sup\left\{\left|\xi(x)\right| : \mu(|x|, v) > \frac{1}{2}\right\} \le \|\xi\|_\alpha' \cdot \|v\|_\alpha^1$，

则 $\sup\left\{\left|\xi(v)\right| : v \in H^+, \|v\|_\alpha^1 \le 1, \alpha \in (0,1)\right\} \le \|\xi\|_\alpha'$。由文献[17]中引理 25.6 知，对任意 $0 \le \xi \in H^\sim$，有

$$\sup\left\{\xi(v) : v \in H^+, \|v\|_\alpha^1 \le 1, \alpha \in (0,1)\right\} = \sup\left\{\left|\xi(x)\right| : x \in H, \|x\|_\alpha^1 \le 1, \alpha \in (0,1)\right\}$$

又由 $\left\||\xi|\right\|_\alpha' = \sup\left\{\left||\xi|(v)\right| : v \in H, \|v\|_\alpha^1 \le 1, \alpha \in (0,1)\right\}$，得

$$\|\xi\|_\alpha' = \sup\left\{|\xi|(v) : v \in H^+, \|v\|_\alpha^1 \le 1, \alpha \in (0,1)\right\}$$

由文献[13]中定理 1 可知，$\left\||\xi|\right\|_\alpha' \le \|\xi\|_\alpha'$。因此，$\left\||\xi|\right\|_\alpha' = \|\xi\|_\alpha'$。

定理 3.10 设 $\left(H, \mu, \|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊赋范 Riesz 空间，则 H' 是 $H^\sim$ 中的理想。

证明：在引理 3.9 中，我们已证得 H' 是 $H^\sim$ 的一个子空间，所以下面我们只需证明若 $\xi \in H'$ 使得 $|\rho| \le |\xi|$，则 $\rho \in H'$。由于 $|\rho| \le |\xi|$，对任意 $u \in H$，有 $\left|\rho(u)\right| \le \left|\xi(u)\right|$，并可由 $\left|\xi(u)\right| \le G_\alpha \|u\|_\alpha^1$ 推得 $\left|\rho(u)\right| \le \left|\xi(u)\right| \le G_\alpha \|u\|_\alpha^1$。因此，$\rho \in H'$。

下面我们将用一个例子来说明 $H^\sim$ 中的理想 H' 不是带。

例子 3.11 设 (L,η) 是由所有模糊序有界序列组成的模糊 Riesz 空间，其中的理想 $\left(H, \mu, \|\cdot\|_\alpha\right)$ 是由 $u = (u_1, u_2, \cdots)$ 组成，使得 $u_l = 1$ 仅对有限个 l 成立，其余为 0。设 ξ 是 H 上正线性泛函，对任意 $u \in H$，有 $\xi(u) = \sum_{l=1}^{\infty} l u_l$，则 $\xi \in H^\sim$。令 $\xi_m(u) = \sum_{l=1}^{m} l u_l$（$m = 1,2,\cdots$），则对任意 m，有 $0 \le \xi_m \in H'$ 和 $\xi_m \uparrow \xi$。然而，

$\xi(u) = \sum_{l=1}^{\infty} l u_l$

$$\left|\xi(u)\right|=\left|\sum_{l=1}^{\infty}lu_l\right|\le 1\cdot\|u_1\|_\alpha^1+2\cdot\|u_2\|_\alpha^1+\cdots$$

显然不存在 G_α 使得 $\left|\xi(u)\right|\le G_\alpha\cdot\|u\|_\alpha^1$ 成立，所以 $\xi\notin H'$。因此，H' 不是 $H^{\sim}$ 中的带。

定理 3.12 设 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊赋范 Riesz 空间，若 $H^{\sim}$ 是模糊 Dedekind 完备的，则 H' 也是模糊 Dedekind 完备的，并且 H' 中的模糊范数是模糊 Riesz 范数。此外，若 $\xi_0\in(H')^+$ 且 $Q=\left\{\xi:\xi\in(H')^+\right\}$ 是一向上集，使得 $Q\uparrow\xi_0$ 成立，则有 $\left\{\|\xi\|_\alpha':\xi\in Q\right\}\uparrow\|\xi_0\|_\alpha'$。

证明：假设 Q 是 $(H')^+$ 的非空子集，$\xi\in(H')^+$ 是 Q 的上界。则 $g_0=\sup Q$ 存在于 $H^{\sim}$ 中(由于 $H^{\sim}$ 是模糊 Dedekind 完备)。由 $0\le g_0\le\xi$，可得 $g_0\in H'$，则 H' 是一个模糊的 Dedekind 完备 Riesz 空间。在引理 3.9 中，我们已证得对任意 $\xi\in H'$ 都有 $\left\|\xi\right\|_\alpha'=\|\xi\|_\alpha'$ 成立，且对任意 $\xi,g\in(H')^+$，当 $\xi\ge g$ 时，有 $\|\xi\|_\alpha'\ge\|g\|_\alpha'$，因此 H' 中的模糊范数是模糊 Riesz 范数。

假设 $Q=\left\{\xi:\xi\in(H')^+\right\}$ 是一个向上集满足 $Q\uparrow\xi_0$，$\xi_0\in(H')^+$，则有

$$\xi_0(u)=\sup\left\{\xi(u):\xi\in Q,u\in H^+\right\}$$

记 $\|u\|_\alpha^1\le 1$，有

$$\xi_0(u)=\sup\left\{\xi(u):\xi\in Q,u\in H^+\right\}\le\sup\left\{\|\xi\|_\alpha':\xi\in Q\right\}$$

所以

$$\|\xi_0\|_\alpha'=\sup\left\{\xi_0(u):u\in H^+,\|u\|_\alpha^1\le 1\right\}\le\sup\left\{\|\xi\|_\alpha':\xi\in Q\right\}$$

由于对任意 $\xi\in Q$，有 $0\le\xi\le\xi_0$，则 $\|\xi_0\|_\alpha'\ge\sup\left\{\|\xi\|_\alpha':\xi\in Q\right\}$。

因此，$\left\{\|\xi\|_\alpha':\xi\in Q\right\}\uparrow\|\xi_0\|_\alpha'$。

定理 3.13 设 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊 Banach 格，则 $H'=H^{\sim}$。

证明：在引理 3.9 中我们已经得到 $H'\subseteq H^{\sim}$，则下面我们只需证明 $H^{\sim}$ 中任意模糊线性泛函都属于 H' 即可。首先，我们注意到任何模糊序有界的区间 $[u_1,u_2]$ 都是模糊范数有界的。那么对任意 $u\in[0,u_2-u_1]$ 满足 $\mu\left(\|u\|_\alpha^1,\|u_2-u_1\|_\alpha^1\right)>\frac{1}{2}$，则每一个 $u\in[u_1,u_2]$ 都有 $\mu\left(\|u\|_\alpha^1,\|u_2-u_1\|_\alpha^1+\|u_1\|_\alpha^1\right)>\frac{1}{2}$。

假设 $\xi:R\to\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊序有界线性泛函，但不是弱模糊范数有界的，则存在序列 $\{v_n\}\in H$，使得对一切 n 都有 $\left|\xi(v_n)\right|\ge 2n^2\cdot\|v_n\|_\alpha^1$。

注意到 $v_n\ne 0$，所以(用 $\frac{v_n}{\|v_n\|_\alpha^1}$ 代替 v_n)，令 $\|v_n\|_\alpha^1=1$，$\left|\xi(v_n)\right|\ge 2n^2$ 对一切 n 都成立。因为 $\left|\xi(v_n)\right|\le\left|\xi(v_n)^+\right|+\left|\xi(v_n)^-\right|$，所以 $\left|\xi(v_n)^+\right|$ 和 $\left|\xi(v_n)^-\right|$ 其中之一不会小于 n^2。因此，我们假设 $v_n\in H^+$，$\|v_n\|_\alpha^1\le 1$ 且 $\left|\xi(v_n)\right|\ge n^2$ $(n=1,2,\cdots)$。

记 $k_n=\frac{v_n}{n}$，我们有 $k_n\in H^+$，$\|k_n\|_\alpha^1\le\frac{1}{n}$，$\left|\xi(k_n)\right|\ge n$ $(n=1,2,\cdots)$。假设 $y_n=\sum k_n$ 是单调递增序列，则有

$$\|y_{n+p}-y_n\|_\alpha^1=\|k_{n+1}+\cdots+k_{n+p}\|_\alpha^1\le\|k_{n+1}\|_\alpha^1+\cdots+\|k_{n+p}\|_\alpha^1$$

即 $\lim_{n\to\infty}\|y_{n+p}-y_n\|_\alpha^1=0$。这说明 $\{y_n\}$ 是 H 中的柯西序列。由于 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊 Banach 格，所以 $\{y_n\}$ 是模糊范数收敛的，则 $\{y_n\}$ 的模糊序极限存在并且等于模糊范数极限，记为 y。因此，我们证明了所有的 k_n 都属于模糊序区间 $[0,y]$。此外，由于 ξ 是模糊序有界线性泛函，我们可以得出结论，$\xi(k_n)$ 也是在

R 上一个模糊序区间内，那么存在 G_α，使得 $\left|\xi(k_n)\right| \le G_\alpha \cdot \|k_n\|_\alpha^1$ 成立，然而对一切 n 都有 $\left|\xi(k_n)\right| \ge n$，产生矛盾。因此，$\xi$ 是弱模糊范数有界的。

定义 3.14 设 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是模糊赋范 Riesz 空间。$\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 具有模糊序连续范数当且仅当如果 H 的任意子集 Q，当 $Q \downarrow 0$ 时，对任意 $\alpha \in (0,1)$，有 $\left\{\|v\|_\alpha^1 : v \in Q\right\} \downarrow 0$。

定理 3.15 设 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 是具有模糊序连续范数的模糊 Banach 格，则有 $H' = H^{\sim} = H_n^{\sim}$。

证明：在定理 3.13 中我们已证得 $H' = H^{\sim}$，则下面我们只需证明任意模糊序有界线性泛函是序连续的。为此，不妨设 $\xi \in \left(H^{\sim}\right)^+$ 且在 H^+ 中 $Q \downarrow 0$。由于 $\left(H,\mu,\|\cdot\|_\alpha\right)$ 具有模糊序连续范数，则 $\left\{\|v\|_\alpha^1 : v \in Q\right\} \downarrow 0$，由此可得

$$\left\{\xi(v) : v \in Q\right\} \le \left\{\|\xi\|_\alpha{}' \|v\|_\alpha^1 : v \in Q\right\} \downarrow 0$$

即 ξ 是模糊序连续泛函。

4. 结论

我们在模糊赋范 Riesz 空间中研究了模糊序有界线性泛函与弱模糊范数有界线性泛函之间的关系：弱模糊范数有界线性泛函是模糊序有界线性泛函的理想，我们给出例子来说明弱模糊范数有界线性泛函与模糊序有界线性泛函的带并不完全相同。在模糊 Banach 格上，模糊序有界线性泛函和弱模糊范数有界线性泛函是等价的。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Zadeh, L.A. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Orderings. *Information Sciences*, **3**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[3] Katsaras, A.K. (1984) Fuzzy Topological Vector Spaces I. *Fuzzy Sets Systems*, **6**, 85-95. https://doi.org/10.1016/0165-0114(81)90082-8

[4] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[5] Felbin, C. (1992) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Space. *Fuzzy Sets Systems*, **48**, 239-248. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90338-5

[6] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.

[7] Beg, I. and Islam, M.U. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-228. https://doi.org/10.1142/9789814447010_0001

[8] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-705.

[9] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[10] Hong, L. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands, and Fuzzy Band Projections. *Seria Matematica-Informatica*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[11] Park, C., Movahednia, E., Mosadegh, S.M.S.M., *et al*. (2018) Riesz Fuzzy Normed Spaces and Stability of a Lattice Preserving Functional Equation. *Journal of Computational Analysis Applications*, **24**, 569-579.

[12] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, 116. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[13] Guirao, J., Iqbal, M., Bashir, Z., *et al*. (2021) A Study on Fuzzy Order Bounded Linear Operators in Fuzzy Riesz Spaces. *Mathematics*, **9**, 1512. https://doi.org/10.3390/math9131512

[14] Bashir, Z. and Iqbal, M. (2022) The Unbounded Fuzzy Norm Convergence in Fuzzy Banach Lattices. *Soft Computing*, **26**, 25-31. https://doi.org/10.1007/s00500-021-06437-2

[15] 赵家锐，李浩，潘相宇．模糊赋范 Riesz 空间的性质[J]．应用数学进展, 2022, 11(4): 2017-2023.

https://doi.org/10.12677/aam.2022.114218

[16] 陈强, 周姮媛, 刘艳丽. 模糊 Riesz 空间上模糊序有界线性算子的研究[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 74-82. https://doi.org/10.12677/pm.2024.143086

[17] Zaanen, A.C. (1997) Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces. Springer, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60637-3