

一类离散捕食-被捕食系统周期解的存在性

何锦玉

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年10月9日; 录用日期: 2024年11月8日; 发布日期: 2024年11月15日

摘要

本文利用向前 Euler 方法, 将具有比率依赖功能反应函数的连续模型离散化, 从而得到一个新的差分方程模型。运用重合度理论以及一些先验估计, 获得了差分系统正周期解的存在性结果。并通过数值模拟对相关理论结果进行了验证。

关键词

捕食-被捕食系统, 非自治差分方程, 周期解, 重合度

Existence of Periodic Solutions for a Class of Discrete Predator-Prey System

Jinyu He

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Oct. 9th, 2024; accepted: Nov. 8th, 2024; published: Nov. 15th, 2024

Abstract

This article draws upon the forward Euler method to discretize a continuous model with a ratio-dependent functional response function, thereby obtaining a new differ-

ence equation mode. By using the coincidence degree theorem and some prior estimates, the existence results of positive periodic solutions for differential systems is obtained. And the relevant theoretical results were verified through numerical simulation.

Keywords

Predator-Prey System, Nonautonomous Difference Equations, Periodic Solutions, Coincidence Degree

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

捕食者和猎物的动力学行为是生态学的主要研究方面之一, 动力学系统的理论研究可以帮助我们理解物种的进化。1963年, Rosenzweig 和 MacArthur [1] 在 Holling II 功能反应的基础上提出了 Rosenzweig-MacArthur 模型, 预测了捕食者-被捕食相互作用的稳定性条件。

Brauer 和 Soudack [2] 得到了种群模型中比例速率捕获比恒定速率捕获对系统干扰更小的结果。Kumar [3] 等人证明了捕食者以恒定的速率收获且收获率超过一定限度时, 稳定的稳态会产生周期解。Wei [4] 研究了一个具有 Holling III 型功能反应和收获项的周期捕食系统, 证明了周期解的存在性。2012年, Chakraborty [5] 等人通过研究捕食-被捕食模型, 得到了在一定参数范围内周期解可表现出双稳态。Marick [6] 等人研究了具有两个物种选择性非线性饱和收获的捕食-被捕食模型的时空动力学。更多有关带有收获项的捕食-被捕食模型的研究结果见 [7-12]。

近几年来, 具有这种仅依赖于猎物的反应功能的模型一直面临着来自生物学和生理学界的挑战 (见 [13-18])。基于越来越多的生物学和生理学依据, 一些生物学家认为, 在诸多情况下, 特别是当捕食者必须分享或竞争食物时, 捕食模型中的功能反应应该是比例依赖的。当捕食者的数量变化缓慢时 (相对于猎物的变化), 捕食者之间经常存在竞争, 人均捕食率取决于被捕食者和捕食者的数量, 很可能只是取决于它们的比例。可以粗略地说, 捕食者人均增长率应该是猎物与捕食者数量之比的函数, 这也得到了大量实验室实验和观测的有力支持 (见 [9, 19, 20])。因此, 具有比率依赖功能反应函数和收获项的捕食-被捕食模型可用以下方程组表示:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{hy + x} - q_1 e_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\beta xy}{hy + x} - my - q_2 e_2 y, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示在任意时间 t 时猎物种群密度和捕食者种群密度, r 是猎物的内在增长率, K 表示猎物种群的环境容纳量, m 表示捕食种群的自然死亡率, α 代表捕食率且 $\beta = \alpha c$, 其中 c 表示猎物生物量与捕食者生物量的转换系数, h 表示半饱和常数. q_1 和 q_2 分别表示猎物和捕食者的可捕性系数, e_1 和 e_2 分别表示施加在猎物种群和捕食者种群上的收获力.

由于大多数研究结果都是针对具有恒定环境的模型, 即所有的生物或者环境参数均为关于时间的常数. 但是在实际生活中, 许多生物和环境参数都会随着时间的推移而变化. 比如说: 自然界中种群的变化会受到季节不规则波动的影响, 或者由于交配习惯和季节消长原因, 我们可以假设这些参数均是周期的或者是几乎周期的, 即模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(t)x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha(t)xy}{h(t)y+x} - q_1e_1(t)x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\beta(t)xy}{h(t)y+x} - m(t)y - q_2e_2(t)y, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $r(t), \alpha(t), \beta(t), e_1(t), e_2(t), m(t), h(t)$ 均为 ω -周期函数, 所有的变量和参数与系统 (1) 中的有相同的生物学意义, 在此不做重复解释.

当种群具有不重叠世代时, 离散时间模型比连续时间模型更具合理性, 离散时间模型也可以为连续时间模型的数值模拟提供有效计算. 对于比率依赖的捕食-被捕食系统, 这样的工作还不是很多 [21-23]. 因此, 本文将对 (2) 所对应的离散模型的动力学行为进行研究.

本文的主要框架如下: 在第二部分, 通过运用向前 Euler 方法对连续模型 (2) 进行离散化, 得到相对应的离散模型. 在第三部分, 通过重合度理论和相关定理得到离散模型正周期解的存在性条件. 第四部分通过数值模拟对相关理论进行了验证.

2. 预备知识

由于推导动力系统连续时间对应的离散时间版本的方法不唯一, 所以对重叠世代模型进行适当修改, 通过分段常数自变量方程建立非重叠世代种群模型. 关于分段常数自变量的微分方程, 参考 [24]. 首先, 假设系统 (2) 中的平均增长率以一定的时间间隔变化. 因此, 得到以下系统:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} = r([t])\left(1 - \frac{x_1([t])}{K}\right) - \frac{\alpha([t])x_2([t])}{h([t])x_2([t]) + x_1([t])} - q_1e_1([t]), \\ \frac{1}{x_2(t)} \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{\beta([t])x_1([t])}{h([t])x_2([t]) + x_1([t])} - m([t]) - q_2e_2([t]), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $[t]$ 表示 t 的整数部分且 $t \in (0, +\infty)$, 上述系统 (3) 被称为具有分段常数自变量的微分方程.

对于系统 (3) 的解, 指的是当 $t \in (0, +\infty)$ 时定义的函数 $x = (x_1, x_2)^T$, 并且它具有以下性质: 首先, 在每个区间 $[j, j+1]$ 上满足系统 (3) 中的方程, 其中 $j = 0, 1, 2, \dots$. 其次, x 在 $[0, \infty)$ 上是连续的. 最后, $\frac{dx_1(t)}{dt}$ 和 $\frac{dx_2(t)}{dt}$ 存在, 其中 $t \in (0, +\infty)$.

在 $[j, j+1), j = 0, 1, 2, \dots$ 的所有区间上, 对系统 (3) 进行积分, 并且得到 $j \leq t \leq j+1, j =$

0, 1, 2, ... 时的系统如下:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(j) \exp \left\{ \left[r(j) \left(1 - \frac{x_1(j)}{K} \right) - \frac{\alpha(j)x_2(j)}{h(j)x_2(j) + x_1(j)} - q_1 e_1(j) \right] (t - j) \right\}, \\ x_2(t) = x_2(j) \exp \left\{ \left[\frac{\beta(j)x_1(j)}{h(j)x_2(j) + x_1(j)} - m(j) - q_2 e_2(j) \right] (t - j) \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

令 $t \rightarrow j + 1$, 则从系统 (4) 中可得

$$\begin{cases} x_1(j + 1) = x_1(j) \exp \left\{ r(j) \left(1 - \frac{x_1(j)}{K} \right) - \frac{\alpha(j)x_2(j)}{h(j)x_2(j) + x_1(j)} - q_1 e_1(j) \right\}, \\ x_2(j + 1) = x_2(j) \exp \left\{ \frac{\beta(j)x_1(j)}{h(j)x_2(j) + x_1(j)} - m(j) - q_2 e_2(j) \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

上述模型是连续模型 (2) 所对应的离散模型。

本文将研究离散系统 (5) 正周期解的存在性。记

$$I_\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega - 1\}.$$

在系统(5)中, 我们总假设 $h, m, r, \alpha, \beta, e_1, e_2 : Z \rightarrow R^+$ 是 ω 周期的, 即:

$$r(j + \omega) = r(j), \alpha(j + \omega) = \alpha(j), e_1(j + \omega) = e_1(j), h(j + \omega) = h(j),$$

$$\beta(j + \omega) = \beta(j), m(j + \omega) = m(j), e_2(j + \omega) = e_2(j),$$

且定义

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} h(j), \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} \beta(j), \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} \alpha(j), \\ \bar{m} &= \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} m(j), \quad \bar{r} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} r(j), \quad \bar{e}_i = \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} e_i(j), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

对任意 $j \in Z$, 有 $\bar{m} > 0, \bar{e}_i > 0, \bar{r} > 0, \bar{h} > 0$, 其中 ω 是一个固定的正整数。

系统 (5) 中方程的指数形式确保了该系统对于任何初始条件 $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ 的前向轨迹 $(x_1(j), x_2(j))$ 在所有的时间内, 都始终保持在平面的正象限中。

本文所用工具定理如下:

定义 1.1 [25] 设 X 和 Y 为实 Banach 空间, $L : \text{Dom } L \subset X \rightarrow Y$ 是一个线性映射, 若 L 满足:

- (i) $\text{Im } L$ 是 Y 的闭子空间;
- (ii) $\dim \text{Ker } L = \text{codim } \text{Im } L < +\infty$.

则称 L 是一个零指标的 Fredholm 映射。

若 L 是一个零指标的 Fredholm 映射, 则存在连续投影算子 $P : X \rightarrow X$ 和 $Q : Y \rightarrow Y$, 满足 $\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{Ker } Q = \text{Im } L = \text{Im } (I - Q)$ 。记 $L_P : \text{Dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$ 是 L 在 $\text{Dom } L \cap \text{Ker } P$

上的限制, 则 L_P 是可逆的, 记 $K_P = L_P^{-1}$ 。

定义 1.2 [25] 设 Ω 为 X 的有界开子集, $N : X \rightarrow Y$ 是一个连续映射, 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_P(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧映射, 则称映射 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的。

引理 1.1 [25] 设 L 是零指标的 Fredholm 映射, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的, 假设下列条件成立:

(i) $Ly \neq \lambda Ny$, 对 $\forall y \in \partial\Omega \cap \text{Dom } L, \lambda \in (0, 1)$;

(ii) $QNy \neq 0$, 对 $\forall y \in \text{Ker } L \cap \partial\Omega$;

(iii) $\deg\{JQN, \Omega \cap \text{Ker } L, 0\} \neq 0$, 其中 $J : \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$ 为恒同映射。

则方程 $Ly = Ny$ 在 $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$ 上至少存在一个解。

为了证明先验估计, 我们要从 [25] 中提取以下引理。

引理 1.2 [6] 设 $f : Z \rightarrow R$ 是 ω 周期的, 即 $f(j + \omega) = f(j)$, 那么对任何固定的 $j_1, j_2 \in I_\omega$, 且对任何 $j \in Z$, 有

$$\begin{cases} f(j) \leq f(j_1) + \sum_{n=0}^{\omega-1} |f(n+1) - f(n)|, \\ f(j) \geq f(j_2) - \sum_{n=0}^{\omega-1} |f(n+1) - f(n)|. \end{cases}$$

定义

$$l_2 = \{y = \{y(j)\} : y(j) \in R^2, j \in Z\}.$$

对于 $b = (b_1, b_2)^T \in R^2$, 定义 $|b| = \max\{b_1, b_2\}$ 。设 $l^\omega \subset l_2$ 表示所有具有上确界范数 $\|\cdot\|$ 的 ω 周期序列, 即 $\|y\| = \max_{j \in I_\omega} |y(j)|$, 对任意 $y = \{y(j) : j \in Z\} \in l^\omega$ 。不难证明 l^ω 是一个有限维的 Banach 空间。

接下来定义 l^ω 的两个闭线性子空间 l_0^ω 和 l_c^ω , 即

$$l_0^\omega = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1(j) \\ y_2(j) \end{pmatrix} \in l^\omega : \sum_{j=0}^{\omega-1} y(j) = 0 \right\},$$

$$l_c^\omega = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1(j) \\ y_2(j) \end{pmatrix} \in l^\omega : y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in R^2, j \in Z \right\},$$

并且有: $l^\omega = l_0^\omega \oplus l_c^\omega, \dim l_c^\omega = 2$ 。

3. 正周期解的存在性

定理 2.1 如果 $\bar{\beta} > \bar{m} + q_2 \bar{e}_2$ 且 $\bar{\tau} > q_1 \bar{e}_1 + \frac{\bar{\alpha}}{h}$, 则系统 (5) 存在一个具有严格正分量的 ω 周期解, 形如 $\tilde{x}(j) = (\tilde{x}_1(j), \tilde{x}_2(j))^T$, 并且存在正常数 β_i 和 $\gamma_i, i = 1, 2$, 使得:

$$\beta_i \leq \tilde{x}_i(j) \leq \gamma_i, i = 1, 2, j \in Z.$$

证明 首先,不妨假设

$$x_i(j) = e^{y_i(j)}, i = 1, 2.$$

则 (5) 的第一个方程变成

$$e^{y_1(j+1)} = e^{y_1(j)} e^{r(j)(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K}) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j)},$$

于是

$$\begin{cases} y_1(j+1) - y_1(j) = r(j)(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K}) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j), \\ y_2(j+1) - y_2(j) = \frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j). \end{cases} \quad (6)$$

定义 $X = Y = l^\omega$ 。并设

$$(Ly)(j) = y(j+1) - y(j),$$

且

$$(Ny)(j) = \begin{pmatrix} r(j)(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K}) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j) \\ \frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j) \end{pmatrix}.$$

则系统 (5) 转化为算子方程 $Ly = Ny$ 。

对 $\forall y \in X, j \in Z$, 可以看出 L 是一个有界线性算子且

$$\text{Ker } L = l_c^\omega, \text{Im } L = l_0^\omega,$$

以及

$$\dim \text{Ker } L = 2 = \text{codim Im } L.$$

这意味着映射 L 是指标为零的 Fredholm 映射。并且定义两个投影算子

$$Py = P \begin{pmatrix} y_1(j) \\ y_2(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\omega-1} y_1(n) \\ \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\omega-1} y_2(n) \end{pmatrix}, y \in X, j \in Z,$$

$$Qz = Q \begin{pmatrix} z_1(j) \\ z_2(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\omega-1} z_1(n) \\ \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\omega-1} z_2(n) \end{pmatrix}, z \in Y,$$

则

$$\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{Ker } Q = \text{Im } L = \text{Im } (I - Q).$$

此外, L 的广义逆 $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{Ker } P \cap \text{Dom } L$ 存在并且由下式给出

$$K_P(z) = \sum_{n=0}^{\omega-1} z(n) - \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\omega-1} (\omega - n)z(n).$$

则 QN 为

$$QN(y) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[r(j) \left(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K} \right) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j) \right] \\ \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j) \right] \end{array} \right).$$

显然 QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的, 并且它们是有界连续函数到有界连续函数的映射。由于 X 是有限维 Banach 空间, 通过使用 Arzela-Ascoli 定理, 不难证明 $QN(\bar{\Omega})$ 和 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 对于任何开的有界集 $\Omega \subset X$ 都是相对紧的。此外, $QN(\bar{\Omega})$ 是有界的。

因此, N 对于任意有界开集 $\Omega \subset X$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的。

对算子方程 $Ly = \lambda Ny, \lambda \in (0, 1)$, 有

$$\begin{cases} y_1(j+1) - y_1(j) = \lambda \left[r(j) \left(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K} \right) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j) \right], \\ y_2(j+1) - y_2(j) = \lambda \left[\frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j) \right]. \end{cases} \quad (7)$$

假设 $y = \{y(j)\} = \{(y_1(j), y_2(j))^T\} \in X$ 是对于某个 $\lambda \in (0, 1)$ 的 (7) 的任意解, 将 (7) 关于 j 从 0 到 $\omega - 1$ 两侧求和, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{\omega-1} [y_1(j+1) - y_1(j)] \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[r(j) \left(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K} \right) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j) \right], \\ 0 &= \sum_{j=0}^{\omega-1} [y_2(j+1) - y_2(j)] \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j) \right], \end{aligned}$$

也就是说

$$\bar{r}\omega = \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{r(j)}{K} e^{y_1(j)} + q_1 e_1(j) + \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right], \quad (8)$$

$$(\bar{m} + q_2 \bar{e}_2)\omega = \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right]. \quad (9)$$

由 (7), (8) 和 (9) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_1(j+1) - y_1(j)| &= \sum_{j=0}^{\omega-1} \left| \lambda \left[r(j) \left(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K} \right) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - q_1 e_1(j) \right] \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left| r(j) \left(1 - \frac{e^{y_1(j)}}{K} \right) - \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right| + \sum_{j=0}^{\omega-1} |q_1 e_1(j)| \\ &= (\bar{R} + \bar{r})\omega =: B_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_2(j+1) - y_2(j)| &= \sum_{j=0}^{\omega-1} \left| \lambda \left[\frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} - m(j) - q_2 e_2(j) \right] \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left| \frac{\beta(j)e^{y_1(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right| + \sum_{j=0}^{\omega-1} |m(j) - q_2 e_2(j)| \\ &= (\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2)\omega =: B_2. \end{aligned} \quad (11)$$

假设 $y = \{y(j)\} \in X$, 存在 $\xi_i, \eta_i \in I_\omega$, 使得

$$y_i(\xi_i) = \min_{j \in I_\omega} \{y_i(j)\}, \quad y_i(\eta_i) = \max_{j \in I_\omega} \{y_i(j)\}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

由 (8) 和 (12) 有

$$\begin{aligned} \bar{r}\omega &= \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{r(j)}{K} e^{y_1(j)} + q_1 e_1(j) + \frac{\alpha(j)e^{y_2(j)}}{h(j)e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right] \\ &\geq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{r(j)}{K} e^{y_1(j)} + q_1 e_1(j) \right] \\ &\geq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{r(j)}{K} e^{y_1(\xi_1)} + q_1 e_1(j) \right] \\ &= \frac{\bar{r}\omega}{K} e^{y_1(\xi_1)} + q_1 \bar{e}_1 \omega, \end{aligned}$$

即

$$\bar{r} \geq \frac{\bar{r}}{K} e^{y_1(\xi_1)} + q_1 \bar{e}_1,$$

化简可得

$$y_1(\xi_1) \leq \ln \frac{K(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1)}{\bar{r}} =: P_1.$$

因此, 由引理 1.2 和 (10) 可知, 有

$$\begin{aligned} y_1(j) &\leq y_1(\xi_1) + \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_1(j+1) - y_1(j)| \\ &\leq \ln \frac{K(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1)}{\bar{r}} + (\bar{R} + \bar{r})\omega \leq P_1 + B_1. \end{aligned} \quad (13)$$

另一方面, 由 (8) 和 (12) 有

$$\begin{aligned}\bar{r}\omega &\leq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{r(j)}{K} e^{y_1(\eta_1)} + q_1 e_1(j) + \frac{\alpha(j)}{h(j)} \right] \\ &= \frac{\bar{r}\omega}{K} e^{y_1(\eta_1)} + q_1 \bar{e}_1 \omega + \frac{\bar{\alpha}}{h},\end{aligned}$$

化简可得

$$y_1(\eta_1) \geq \ln \frac{(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h})K}{\bar{r}} =: p_1.$$

因此, 由引理 1.2 和 (10) 有

$$\begin{aligned}y_1(j) &\geq y_1(\eta_1) - \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_1(j+1) - y_1(j)| \\ &\geq \ln \frac{(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h})K}{\bar{r}} - (\bar{R} + \bar{r})\omega \geq p_1 - B_1.\end{aligned}\tag{14}$$

因此, 结合 (13) 和 (14) 有

$$|y_1(j)| \leq \max\{|p_1 - B_1|, |P_1 + B_1|\} =: A_1.\tag{15}$$

由 (9), (12) 以及 (13) 可知

$$\begin{aligned}(\bar{m} + q_2 \bar{e}_2)\omega &\leq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j) e^{y_1(j)}}{h(j) e^{y_2(j)}} \right] \\ &\leq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j) e^{y_1(j)}}{h(j) e^{y_2(\xi_2)}} \right] \\ &\leq \frac{1}{e^{y_2(\xi_2)}} \frac{(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1)K}{\bar{h}\bar{r}} \bar{\beta} e^{(\bar{R} + \bar{r})\omega} \omega,\end{aligned}$$

故有

$$y_2(\xi_2) \leq \ln \frac{\bar{\beta}(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1)K}{\bar{h}\bar{r}(\bar{m} + q_2 \bar{e}_2)} + (\bar{R} + \bar{r})\omega =: P_2.\tag{16}$$

根据 (9) 和 (16), 并且通过使用引理 1.2 可得

$$\begin{aligned}y_2(j) &\leq y_2(\xi_2) + \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_2(j+1) - y_2(j)| \\ &\leq \ln \frac{\bar{\beta}(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1)K}{\bar{h}\bar{r}(\bar{m} + q_2 \bar{e}_2)} + (\bar{R} + \bar{r})\omega + (\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2)\omega \leq P_2 + B_2.\end{aligned}\tag{17}$$

我们可以从 (9) 和 (14) 中得出

$$\begin{aligned}
 (\bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \omega &= \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j) e^{y_1(j)}}{h(j) e^{y_2(j)} + e^{y_1(j)}} \right] \\
 &\geq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j) e^{y_1(j)}}{h(j) e^{y_2(\eta_2)} + e^{y_1(j)}} \right] \\
 &\geq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\frac{\beta(j) \left(\frac{\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h}}{\bar{r}} \right) K}{h(j) e^{y_2(\eta_2)}} e^{-(\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \omega} + \frac{(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h}) K}{\bar{r}} e^{-(\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \omega} \right] \\
 &\geq \sum_{j=0}^{\omega-1} \left[\left(\frac{\beta(j) \left(\frac{\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h}}{\bar{r}} \right) K}{h(j) e^{y_2(\eta_2)}} + \frac{(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h}) K}{\bar{r}} \right) e^{-(\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \omega} \right].
 \end{aligned}$$

经化简可得

$$\begin{aligned}
 y_2(\eta_2) &\geq \ln \left\{ (\beta(j) - \bar{m} - q_2 \bar{e}_2) \left[(\bar{r} - q_1 \bar{e}_1 - \frac{\bar{\alpha}}{h}) K \right] \right\} \left\{ (\bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \bar{r} h \right\} - (\bar{M} + \bar{m} + q_2 \bar{e}_2) \omega \\
 &=: p_2.
 \end{aligned} \tag{18}$$

因此

$$\begin{aligned}
 y_2(j) &\geq y_2(\eta_2) - \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_2(j+1) - y_2(j)| \\
 &\geq p_2 - \sum_{j=0}^{\omega-1} |y_2(j+1) - y_2(j)| \geq p_2 - B_2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

由 (17) 和 (19) 中得到

$$|y_2(j)| \leq \max \{ |p_2 - B_2|, |P_2 + B_2| \} =: A_2. \tag{20}$$

显然 A_1 和 A_2 独立于 λ , 取 $A = \max \{ A_1, A_2 \} + A_0$, 其中 A_0 取得足够大, 使得 $A_0 > |p_1| + |P_1| + |p_2| + |P_2|$. 并且定义

$$\Omega =: \{ y = \{y(j)\} \in X : \|y\| < A \}.$$

接下来验证引理 1.1 的条件:

(i) 从 (15) 和 (20) 得出, 对每个 $\lambda \in (0, 1)$ 且 $y \in \partial\Omega \cap \text{Dom } L$ 时有 $Ly \neq \lambda Ny$ 成立。

(ii) 当 $y = \{(y_1(j), y_2(j))^T\} \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, 且 $(y_1(j), y_2(j))^T$ 是具有 $\|y\| = \max \{ |y_1|, |y_2| \} = A$ 的 R^2 中的常向量时, 则 $QN(y) \neq 0$ 。

(iii) 为了验证引理 1.1 的 (iii), 取

$$J : \text{Im } Q \rightarrow \text{ker } L, \quad Jy \equiv y$$

为恒同映射。

则

$$\begin{aligned} \deg(JQN, \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) &= \deg(QN, \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) \\ &= \text{sgn} \left\{ \frac{h}{\omega^2} \sum_{j=0}^{\omega-1} \frac{\alpha(j)\beta(j)e^{v_1^*}e^{v_2^*}}{(h(j) + e^{v_1^*})^2} \right\} \neq 0, \end{aligned}$$

其中 $\deg(\cdot)$ 是 Brouwer 度。

到目前为止, 已经证明了引理 1.1 的所有条件均成立。因此, $Ly = Ny$ 在 $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一个解。也就是说, 系统 (7) 在 $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$ 中至少有一个 ω 周期解, 如 $y^* = \{y^*(j)\} = \{(y_1^*(j), y_2^*(j))^T\}$ 。设 $x_i^*(j) = e^{y_i^*(j)}$, 则 $x^* = \{x^*(j)\} = \{(x_1^*(j), x_2^*(j))^T\}$ 是系统 (5) 的具有严格正分量的 ω 周期解。

注 2.1 定理 2.1 告诉我们, 系统 (5) 存在一个正周期解, 前提是猎物的平均增长率大于猎物平均消耗率, 并且猎物转化为捕食者出生的平均转化率大于捕食者的平均死亡率。

4. 数值模拟及分析

在本节中, 给出了一个数值例子, 这个例子表明了理论结果的正确性。即满足 $\bar{\beta} > \bar{m} + q_2 \bar{e}_2$ 和 $\bar{r} > q_1 \bar{e}_1 + \frac{\bar{\alpha}}{h}$, 说明系统 (5) 存在一个具有严格正分量的 ω 周期解。给出满足上述假设的参数, 且该参数为周期函数, 考虑:

$$\begin{aligned} m(t) &= 0.5(0.9 + 0.6\sin(\pi t/4)), & r(t) &= 0.5(3 + 0.84\sin(\pi t/4)), \\ \alpha(t) &= 0.8(1 + 0.7\sin(\pi t/4)), & e_2(t) &= 0.03(0.8 + 0.5\cos(\pi t/4)), \\ \beta(t) &= 1.2(1 + 0.8\cos(\pi t/4)), & e_1(t) &= 0.04(0.6 + 0.7\sin(\pi t/4)), \\ h(t) &= 0.5 + 0.1\cos(\pi t/4), \end{aligned}$$

显然 $r(t), \alpha(t), \beta(t), e_1(t), e_2(t), m(t), h(t)$ 为周期函数。

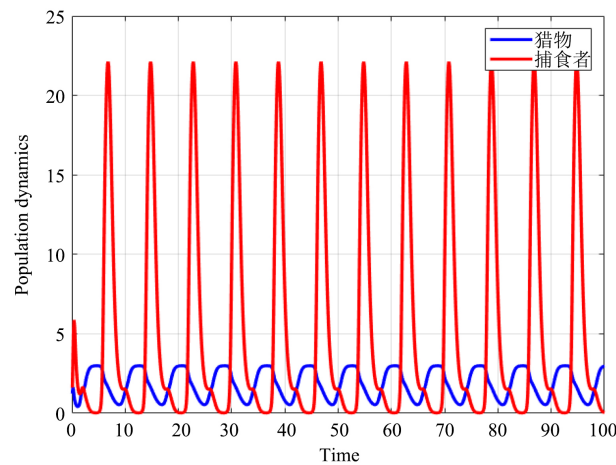


Figure 1. The variation of population quantity over time

图 1. 种群数量随时间的变化

图 1 是对系统 (5) 进行的数值模拟, 其中取 $K = 3, q_1 = 0.01, q_2 = 0.01$, 且满足参数 $\bar{\beta} > \bar{m} + q_2 \bar{e}_2$ 和 $\bar{r} > q_1 \bar{e}_1 + \frac{\bar{\alpha}}{h}$ 。从图形可以看出: 随着时间的推移, 捕食者和猎物在一定范围内呈规则的波动, 说明系统 (5) 存在一个正周期解。也就是说, 给出的系统参数为周期函数时, 得到了周期解存在的充分条件。

5. 讨论

本篇论文模型系数是变系数的, 分析普通常系数的 Hopf 分支的方法不能分析该模型。本篇文章运用重合度理论方法, 证明了模型周期解的存在性, 但该方法得不到周期解的稳定性和唯一性, 后续我们将对这方面进行更多的研究。

参考文献

- [1] Rosenzweig, M.L. and MacArthur, R.H. (1963) Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions. *The American Naturalist*, **97**, 209-223.
<https://doi.org/10.1086/282272>
- [2] Brauer, F. and Soudack, A.C. (1978) Response of Predator-Prey Systems to Nutrient Enrichment and Proportional Harvesting. *International Journal of Control*, **27**, 65-86.
<https://doi.org/10.1080/00207177808922348>
- [3] Kumar, S., Srivastava, S.K. and Chingakham, P. (2002) Hopf Bifurcation and Stability Analysis in a Harvested One-Predator-Two-Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, **129**, 107-118. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(01\)00033-9](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(01)00033-9)
- [4] Wei, F. (2011) Existence of Multiple Positive Periodic Solutions to a Periodic Predator-Prey System with Harvesting Terms and Holling III Type Functional Response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 2130-2138.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.08.028>
- [5] Chakraborty, S., Pal, S. and Bairagi, N. (2012) Predator-Prey Interaction with Harvesting: Mathematical Study with Biological Ramifications. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 4044-4059. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.029>
- [6] Marick, S., Bhattacharya, S. and Bairagi, N. (2023) Dynamic Properties of a Reaction-Diffusion Predator-Prey Model with Nonlinear Harvesting: A Linear and Weakly Nonlinear Analysis. *Chaos, Solitons Fractals*, **175**, 113996. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113996>
- [7] Kar, T.K. and Matsuda, H. (2007) Global Dynamics and Controllability of a Harvested Prey-Predator System with Holling Type III Functional Response. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **1**, 59-67. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2006.03.002>
- [8] Wang, X. and Huang, C. (2014) Permanence of a Stage-Structured Predator-Prey System with Impulsive Stocking Prey and Harvesting Predator. *Applied Mathematics and Computation*, **235**, 32-42. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.092>

- [9] Wang, X. and Wang, Y. (2017) Novel Dynamics of a Predator-Prey System with Harvesting of the Predator Guided by Its Population. *Applied Mathematical Modelling*, **42**, 636-654. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.10.006>
- [10] Shang, Z., Qiao, Y., Duan, L. and Miao, J. (2021) Bifurcation Analysis in a Predator-Prey System with an Increasing Functional Response and Constant-Yield Prey Harvesting. *Mathematics and Computers in Simulation*, **190**, 976-1002. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.06.024>
- [11] Wikan, A. and Kristensen, Ø. (2021) Compensatory and Overcompensatory Dynamics in Prey-Predator Systems Exposed to Harvest. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **67**, 455-479. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01484-8>
- [12] Das, D., Kar, T.K. and Pal, D. (2023) The Impact of Invasive Species on Some Ecological Services in a Harvested Predator-Prey System. *Mathematics and Computers in Simulation*, **212**, 66-90. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.04.024>
- [13] Gutierrez, A.P. (1992) Physiological Basis of Ratio-Dependent Predator-Prey Theory: The Metabolic Pool Model as a Paradigm. *Ecology*, **73**, 1552-1563. <https://doi.org/10.2307/1940008>
- [14] Arditi, R., Perrin, N., Saïah, H. and Saïah, H. (1991) Functional Responses and Heterogeneities: An Experimental Test with Cladocerans. *Oikos*, **60**, 69-75. <https://doi.org/10.2307/3544994>
- [15] Han, X. and Lei, C. (2023) Stability, Bifurcation Analysis and Pattern Formation for a Nonlinear Discrete Predator-Prey System. *Chaos, Solitons Fractals*, **173**, Article 113710. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113710>
- [16] Han, X. and Lei, C. (2023) Bifurcation and Turing Instability Analysis for a Space- and Time-Discrete Predator-Prey System with Smith Growth Function. *Chaos, Solitons Fractals*, **166**, Article 112910. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112910>
- [17] Arditi, R. and Ginzburg, L.R. (1989) Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology*, **139**, 311-326. [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(89\)80211-5](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(89)80211-5)
- [18] Hanski, I. (1991) The Functional Response of Predators: Worries about Scale. *Trends in Ecology Evolution*, **6**, 141-142. [https://doi.org/10.1016/0169-5347\(91\)90052-y](https://doi.org/10.1016/0169-5347(91)90052-y)
- [19] Berryman, A.A. (1992) The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory. *Ecology*, **73**, 1530-1535. <https://doi.org/10.2307/1940005>
- [20] Arditi, R. and Ginzburg, L.R. (1989) Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology*, **139**, 311-326. [https://doi.org/10.1016/s0022-5193\(89\)80211-5](https://doi.org/10.1016/s0022-5193(89)80211-5)
- [21] Lundberg, P. and Fryxell, J.M. (1995) Expected Population Density versus Productivity in Ratio-Dependent and Prey-Dependent Models. *The American Naturalist*, **146**, 153-161. <https://doi.org/10.1086/285791>
- [22] Fan, M. and Wang, K. (2002) Periodic Solutions of a Discrete Time Nonautonomous Ratio-Dependent Predator-Prey System. *Mathematical and Computer Modelling*, **35**, 951-961. [https://doi.org/10.1016/s0895-7177\(02\)00062-6](https://doi.org/10.1016/s0895-7177(02)00062-6)

-
- [23] Ginzburg, L.R. and Akcakaya, H.R. (1992) Consequences of Ratio-Dependent Predation for Steady-State Properties of Ecosystems. *Ecology*, **73**, 1536-1543.
<https://doi.org/10.2307/1940006>
- [24] Wiener, J. (1984) Differential Equations with Piecewise Constant Delays. In: Lakshmikantham, V., Ed., *Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations*, CRC Press, 547-552.
- [25] Gaines, R.E. and Mawhin, J.L. (1977) Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Berlin, 568.