Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(10), 158-162
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1410355

拓展里奇流中共轭热方程的Harnack不等式

朱志宏

温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2024年9月11日；录用日期：2024年10月10日；发布日期：2024年10月22日

摘　要

拓展里奇流是Hamilton里奇流的推广，具有强烈的几何和物理背景。本文考虑紧致的拓展里奇流的共轭热方程，用初等和直接的方法证明了其基本解的Harnack不等式。

关键词

拓展里奇流，Harnack不等式，共轭热方程

Harnack Inequality for Conjugate Heat Equation in Extended Ricci Flow

Zhihong Zhu

School of Mathematics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Sep. 11th, 2024; accepted: Oct. 10th, 2024; published: Oct. 22nd, 2024

Abstract

The extended Ricci flow is a generalization of the Hamiltonian Ricci flow with a strong geometric and physical background. In this paper, we consider the conjugate heat equation for the compact extended Ricci flow and prove Harnack's inequality for its fundamental solution by elementary and direct methods.

Keywords

Extended Ricci Flow, Harnack Inequality, Conjugate Heat Equation

文章引用: 朱志宏. 拓展里奇流中共轭热方程的 Harnack 不等式[J]. 理论数学, 2024, 14(10): 158-162.
DOI: 10.12677/pm.2024.1410355

1. 引言

假设 $\left(M^n, g(t)\right)$ 是带有一族黎曼度量 $g(t)$ 的 n 维黎曼流形，$t\in[0,T]$，另记 α_n 是与时间无关的非负常数，以及 $\varphi(\cdot,t): M\to\mathbb{R}$ 是与时间有关的函数，满足如下发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial t}=-2Ric+2\alpha_n d\varphi\otimes d\varphi\\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=\Delta\varphi\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 Ric 是里奇曲率张量，方程(1.1)即是由 B. List [1]引入的拓展里奇流(Extended Ricci Flow)，记 $Sy=Ric-\alpha_n d\varphi\otimes d\varphi$，$S=g^{ij}S_{ij}=R-\alpha_n|d\varphi|^2$ 是 Sy 关于黎曼度量 $g(t)$ 的迹。

相较于 Hamilton 里奇流，拓展里奇流最大的区别在于其与广义相对论的联系。爱因斯坦方程数值演化的一个重要问题就是构建良好的初始数据集，而这些数据集需要满足一些约束方程，使用抛物线系统可以很好的用来改进这些数据集，尤其适用于静态解，因此利用方程(1.1)的解来近似静态解是可能的。另一方面的应用与 Bartnik [2]所提出的准局部质量定义有关，在加入适当的抛物线边界条件后，方程(1.1)有助于构建静态最小质量扩展，从而根据 Bartnik 的猜想提供质量定义中的最小值。

在本文中我们主要考虑拓展里奇流下带位势的共轭热方程正解的 Harnack 不等式。Harnack 不等式在黎曼流形中的研究最早源于李伟光和丘成桐[3]，他们得到了度量固定时黎曼流形上具有位势的热方程正解的 Harnack 不等式。R. Hamilton [4]则在随后的研究中进一步得到了具有正曲率算子的里奇流下 Harnack 不等式的矩阵形式，这一结论在庞加莱猜想的证明中起到了重要作用。在文献[5]中第 9 节，G. Perelman 更是在其研究中证明了在紧致流形上的里奇流下共轭热方程基本解的 Harnack 不等式，更确切的来讲，令 $\left(M,g(t)\right), t\in[0,T]$ 是里奇流在闭流形上的一个解，以及 u 是共轭热方程的一个正基本解，即

$$\partial_t u=-\Delta u+Ru$$

定义 $\tau=T-t$，$u=(4\pi\tau)^{-n/2}\mathrm{e}^{-f}$，其中 f 为位势函数，Perelman 证明了

$$\tau\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+R\right)+f-n\le 0, \tau\in(0,T].$$

值得注意的是 G. Perelman 在其证明中并未作出曲率为正的假设。

本文的主要结论如下所示：

定理 1. 假设 $\left(M^n, g(t), \varphi(\cdot,t)\right), t\in[0,T]$ 是拓展里奇流(1.1)的解，$u=(4\pi\tau)^{-n/2}\mathrm{e}^{-f}$ 是共轭热方程的基本解，即

$$\square^* u=0\tag{1.2}$$

其中 $\square^*=-\dfrac{\partial}{\partial t}-\Delta+S=\dfrac{\partial}{\partial \tau}-\Delta+S$，$\tau=T-t$，$f$ 为位势函数。令

$$v=\left[\tau\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+S\right)+f-n\right]u,$$

则有

$$\square^* v=-2\tau u\left|Sy+\nabla\nabla f-\frac{g}{2\tau}\right|^2-2\alpha_n\tau u\left|\Delta\varphi-\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle\right|^2.\tag{1.3}$$

并且有如下不等式成立

$$\tau\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+S\right)+f-n\le 0, \forall\tau\in[0,T].\tag{1.4}$$

在第 2 节中我们给出定理 1 的详细证明过程。

2. 定理及其证明

我们首先给出在证明过程中所需用到的几何量的发展方程。在此之前，我们先给出计算过程中所需的克里斯托弗符号 Γ_{ij}^k 以及(3, 1)型黎曼曲率张量 R_{ijk}^l 的计算公式如下：

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij}\right),\qquad R_{ijk}^l=\partial_i\Gamma_{jk}^l-\partial_j\Gamma_{ik}^l+\Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^l.$$

其中指标求和均按照爱因斯坦求和约定表示(下同)，因此(4, 0)型黎曼曲率张量 $R_{ijkl}=g_{lm}R_{ijk}^m$，里奇曲率张量 $R_{jk}=\sum_{i=1}^n R_{ijk}^i$。

引理 1. 假设 $\left(M,g(t),\varphi(\cdot,t)\right)$ 是拓展里奇流的一个解，则有如下发展方程成立：

1) $\partial_t\Gamma_{ij}^k=g^{kl}\left(-\nabla_i R_{jl}-\nabla_j R_{il}+\nabla_l R_{ij}+2\alpha_n\nabla_i\nabla_j\varphi\partial_l\varphi\right)$，

2) $\partial_t|d\varphi|^2=\Delta|d\varphi|^2-2\left|\nabla^2\varphi\right|^2-2\alpha_n|d\varphi|^4$，

3) $\partial_t S_{ij}=\Delta S_{ij}-R_{ip}S_{jp}-R_{jp}S_{ip}-2R_{pijq}S_{pq}+2\alpha_n\Delta\varphi\nabla_i\nabla_j\varphi$，

4) $\partial_t S=\Delta S+2|Sy|^2+2\alpha_n|\Delta\varphi|^2$，

5) $\partial_t dV=-SdV$。

证明：引理 1 中各式证明均可以通过直接的求导运算证得，详细证明过程可参考文献[1]。

为方便计算，记 $H=2\Delta f-|\nabla f|^2+S+\frac{f}{\tau}-\frac{n}{\tau}$，因此 v 可以进一步表示为

$$v=\left[\tau\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+S\right)+f-n\right]u=\tau Hu. \tag{2.1}$$

在文献[6]中，方守文给出了 H 在一般形式下的发展方程但并未给出具体证明过程，在这里我们给出 H 发展方程的详细证明过程。

引理 2. 假设 $\left(M,g(t),\varphi(\cdot,t)\right)$ 是拓展里奇流的一个解，$u=(4\pi\tau)^{-n/2}\mathrm{e}^{-f}$ 是共轭热方程(1.2)式的基本解，记

$$H=2\Delta f-|\nabla f|^2+S+\frac{f}{\tau}-\frac{n}{\tau},$$

则 H 满足发展方程

$$\partial_\tau H=\Delta H-2\langle\nabla H,\nabla f\rangle-\frac{H}{\tau}-2\left|Sy+\nabla\nabla f-\frac{g}{2\tau}\right|^2-2\alpha_n\left|\Delta\varphi-\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle\right|^2. \tag{2.2}$$

证明：由于 $u=(4\pi\tau)^{-n/2}\mathrm{e}^{-f}$ 是共轭热方程(1.2)式的解，因此将 u 代入(1.2)式化简可得

$$\partial_\tau f=\Delta f-|\nabla f|^2+S-\frac{n}{2\tau}.$$

首先计算 H 的前两项，

$$\partial_\tau\Delta f=\partial_\tau\left(g^{ij}\partial_i\partial_j f\right)=\Delta\Delta f-\Delta|\nabla f|^2+\Delta S-2\langle Sy,\nabla\nabla f\rangle,$$

$$\partial_\tau|\nabla f|^2=\partial_\tau\left(g^{ij}\nabla_i f\nabla_j f\right)=2\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle+2\langle\nabla f,\nabla S\rangle-2\left\langle\nabla f,\nabla|\nabla f|^2\right\rangle-2Sy(\nabla f,\nabla f).$$

注意到有 Bochner 公式

$$\Delta|\nabla f|^2 = 2\langle \nabla f, \Delta\nabla f\rangle + 2|\nabla\nabla f|^2,$$

以及拉普拉斯算子和梯度算子的交换公式

$$\Delta\nabla f = \nabla\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot),$$

因此可将 $\partial_\tau |\nabla f|^2$ 改写为

$$\partial_\tau |\nabla f|^2 = \Delta|\nabla f|^2 - 2|\nabla\nabla f|^2 - 2\left\langle \nabla f, \nabla|\nabla f|^2\right\rangle + 2\langle\nabla f, \nabla S\rangle - 4Ric(\nabla f, \nabla f) + 2\alpha_n \langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle^2.$$

由引理 1 可知，

$$\partial_\tau S = -\Delta S - 2|Sy|^2 - 2\alpha_n |\Delta\varphi|^2.$$

注意到

$$\Delta H = 2\Delta\Delta f - \Delta|\nabla f|^2 + \Delta S + \frac{\Delta f}{\tau},$$

$$\nabla H = 2\nabla\Delta f - \nabla|\nabla f|^2 + \nabla S + \frac{\nabla f}{\tau}.$$

因此综合上式计算可得

$$\partial_\tau H = \Delta H - 2\langle\nabla H, \nabla f\rangle - \frac{H}{\tau} - 2\left|Sy + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 - 2\alpha_n \left|\Delta\varphi - \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle\right|^2.$$

由此引理 2 得证。

定理 1 的证明： 由于 $v = \tau Hu$，因此

$$\square^* v = (\partial_\tau - \Delta + S)\tau Hu = \tau u(\partial_\tau - \Delta)H - 2\tau\langle\nabla H, \nabla u\rangle + Hu. \tag{2.3}$$

由引理 2 (2.2)式可得

$$(\partial_\tau - \Delta)H = -2\langle\nabla H, \nabla f\rangle - \frac{H}{\tau} - 2\left|Sy + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 - 2\alpha_n\left|\Delta\varphi - \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle\right|^2. \tag{2.4}$$

将(2.4)式代入(2.3)式可得

$$\square^* v = -2\tau u\left|Sy + \nabla\nabla f - \frac{g}{2\tau}\right|^2 - 2\alpha_n \tau u\left|\Delta\varphi - \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle\right|^2.$$

接下来证明对于任意的非负热方程解 $h(\cdot,\tau)$，有 $\lim_{\tau\to 0}\int v(\tau)h(\cdot,\tau)dV \le 0$。其证明方法同 Ni L [7]，曹晓东等人[8]将这一证明方法进一步推广到了一般流形上，因此在本文中对此证明不做过多赘述，具体证明过程可参考文献[8]中第三节。

由于对于任意的 $h(\cdot,\tau) \ge 0$，都有 $\lim_{\tau\to 0}\int v(\tau)h(\cdot,\tau)dV \le 0$ 成立，因此有

$$v = \left[\tau\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S\right) + f - n\right]u \le 0$$

而 u 是热方程的非负解，因此

$$\tau\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S\right) + f - n \le 0$$

由此定理 1 得证。

3. 证明方法分析

相较于其他证明 Harnack 不等式的方法(如[9])常使用多种繁琐的数学技巧和涉及多样的不等式，而本文所采用的证明方法依托于共轭热方程使用基本的求导运算即可先行得到(1.3)式，进而可以使用常规的证明方法即可证得 Harnack 不等式，证明过程简单易懂、可读性强。

在[10]-[14]等文献中，诸多学者研究了诸如在平均曲率流、高斯曲率流、Yamabe 流等下 Harnack 不等式的证明，本文中的证明方法有望进一步推广到上述曲率流中，证明其中共轭热方程的Harnck不等式。

本文中所采用的证明仍存在一定局限性，对于形如[15] [16]中矩阵形式的 Harnack 不等式是否可行仍有待商榷；同时如果不借助共轭热方程或者热方程，此证明方法能否推广到一般形式的 Harnack 不等式证明亦未可知。

参考文献

[1] Malik, A.S., Boyko, O., Aktar, N. and Young, W.F. (2001) A Comparative Study of MR Imaging Profile of Titanium PEDICLE Screws. *Acta Radiologica*, **42**, 291-293. https://doi.org/10.1034/j.1600-0455.2001.042002291.x

[2] Bartnik, R. (1997) Energy in General Relativity. In: Yau, S.-T., Ed., *Tsing Hua Lectures on Geometry & Analysis*, International Press, 5-27.

[3] Li, P. and Yau, S.T. (1986) On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator. *Acta Mathematica*, **156**, 153-201. https://doi.org/10.1007/bf02399203

[4] Hamilton, R.S. (1993) The Harnack Estimate for the Ricci Flow. *Journal of Differential Geometry*, **37**, 225-243. https://doi.org/10.4310/jdg/1214453430

[5] Perelman, G. (2002) The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications. arXiv: math/0211159. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0211159

[6] Fang, S. (2013) Differential Harnack Estimates for Backward Heat Equations with Potentials under an Extended Ricci Flow. *Advances in Geometry*, **13**, 741-755. https://doi.org/10.1515/advgeom-2013-0020

[7] Ni, L. (2006) A Note on Perelman's Li-Yau-Hamilton Inequality. *Communications in Analysis and Geometry*, **14**, 883-905. https://doi.org/10.4310/cag.2006.v14.n5.a3

[8] Cao, X., Guo, H. and Tran, H. (2015) Harnack Estimates for Conjugate Heat Kernel on Evolving Manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, **281**, 201-214. https://doi.org/10.1007/s00209-015-1479-7

[9] Paronetto, F. (2022) Harnack Inequality for Parabolic Equations with Coefficients Depending on Time. *Advances in Calculus of Variations*, **16**, 791-821. https://doi.org/10.1515/acv-2021-0055

[10] Chow, B. (1991) On Harnack's Inequality and Entropy for the Gaussian Curvature Flow. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **44**, 469-483. https://doi.org/10.1002/cpa.3160440405

[11] Chow, B. (1992) The Yamabe Flow on Locally Conformally Flat Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **45**, 1003-1014. https://doi.org/10.1002/cpa.3160450805

[12] Hamilton, R.S. (1995) Harnack Estimate for the Mean Curvature Flow. *Journal of Differential Geometry*, **41**, 215-226. https://doi.org/10.4310/jdg/1214456010

[13] Smoczyk, K. (1997) Harnack Inequalities for Curvature Flows Depending on Mean Curvature. *The New York Journal of Mathematics*, **3**, 103-118.

[14] Chow, B. and Chu, S. (2001) Space-Time Formulation of Harnack Inequalities for Curvature Flows of Hypersurfaces. *The Journal of Geometric Analysis*, **11**, 219-231. https://doi.org/10.1007/bf02921963

[15] Hamilton, R.S. (1993) Matrix Harnack Estimate for the Heat Equation. *Communications in Analysis and Geometry*, **1**, 113-126. https://doi.org/10.4310/cag.1993.v1.n1.a6

[16] Cao, H.D. and Ni, L. (2002) Matrix Li-Yau-Hamilton Estimates for the Heat Equation on Kähler Manifolds. arXiv: math/0211283. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0211283