

一道中考尺规作图题的教学设计研究

韩 佳

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年9月12日; 录用日期: 2024年10月11日; 发布日期: 2024年10月22日

摘 要

本文以一道南京市中考尺规作图题为例, 设计其探究教学过程, 并得到以下启示: 教师在传授方法的同时要善于挖掘尺规作图题所蕴含的数学思想方法, 培养学生“归纳”“类比”等数学思想; 教师话语须具备引导性和启发性, 引导学生经历完整的解题过程, 发展学生自主探究能力。

关键词

尺规作图, 探究教学, 数学思想

Research on Teaching Design of a Middle School Entrance Exam Geometry Construction Problem

Jia Han

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 12th, 2024; accepted: Oct. 11th, 2024; published: Oct. 22nd, 2024

Abstract

This paper takes a compass-and-straightedge construction problem from the Nanjing High School Entrance Examination as an example and designs its inquiry-based teaching process, from which the following insights are gained: Teachers should not only teach methods but also be good at uncovering the mathematical ideas and methods embedded in compass-and-straightedge construction problems, cultivating students' mathematical ideas such as "induction" and "analogy"; Teachers' language should be guiding and inspirational, guiding students through the entire problem-solving process and developing their autonomous inquiry ability.

Keywords

Drawing with Ruler and Gauge, Inquiry Based Teaching, Mathematical Thinking

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

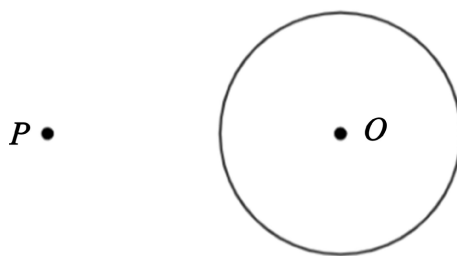
尺规作图在中考中有着重要的地位和价值,《义务教育数学课程标准(2022 年版)》对尺规作图的学业要求有所提升,要求学生经历尺规作图的过程,增强动手能力,能想象出通过尺规作图的操作所形成的图形,理解尺规作图的基本原理与方法,发展空间观念和空间想象力[2]。然而在日常教学中,教师对尺规作图的教学多为直接“灌输”,几乎没有启发和探究的过程[2]。为此,笔者以 2021 年南京市中考尺规作图题为例,设计尺规作图题的探究教学过程,以期对教师教学有所启迪。

2. 试题呈现

(2021 年南京市中考第 25 题)如图,已知 P 是 $\odot O$ 外一点。用两种不同的方法过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线。

要求: 1) 用直尺和圆规作图;

2) 保留作图的痕迹,写出必要的文字说明。



3. 试题分析

本题是一道有关“圆的切线”的尺规作图题,同时也是《义务教育数学课程标准(2022 年版)》新增的尺规作图内容,题意简洁明了,但立意较高,对学生具有一定的挑战性。该题综合圆、三角形等几何知识,灵活性强,作图方法多样,考查学生的几何直观、空间观念、推理能力等核心素养。

4. 教学功能

此题考查学生综合运用知识的能力和整体思维能力,是中考复习阶段开展“一题一课”教学的优质素材。对于此题,新课标呈现的方法是依据“直径所对的圆周角是直角”原理作图,笔者随机调查了部分初三学生,个别学生画出草图,通过几何逆向推理,找到目标图形后能想到此作法;个别学生能找到目标图形但是想不到用尺规如何作图;还有部分学生没有任何思路。

如何寻求并作出目标图形是本题的难点,同样如何启发学生自然想到作图方法也是教学的难点。为此笔者基于“直径所对的圆周角是直角”和“全等三角形”这两种作图原理,设计本题的探究教学过程,

明确解决尺规作图问题的数学思想方法——“分解与组合”“归纳”“类比”，让学生知其然并知其所以然，促进学生数学思维及核心素养的提升。

5. 教学实施

5.1. 作图原理——直径所对的圆周角是直角

环节 1 理解题目

教师：认真阅读本题的要求，分析条件并想象出通过尺规作图的操作所形成的图形。

学生活动：深入分析条件，已知圆外一点 P 和 $\odot O$ ，要过点 P 作 $\odot O$ 的切线。想象并画出符合条件的草图，发现要过点 P 作 $\odot O$ 的切线只需在 $\odot O$ 上确定一点 B （切点），使得直线 PB 与 $\odot O$ 相切即可。

问题 1：如何确定点 B ？或者说点 B 要满足哪些条件？

学生 1：根据切线的性质可知，点 B 有三个限制条件。点 B 要在 $\odot O$ 上，点 B 所在的直线要经过点 P ，且 $PB \perp OB$ 。

追问 1：尝试挖掘图中的隐含条件，并联想这些条件对于作图有何帮助？

学生 2：点 P 、点 O 是确定的，进而线段 OP 确定， $\odot O$ 确定，进而圆的半径即线段 OB 确定。因此原问题可转化为作一个以线段 OP 为斜边的 $Rt\triangle OBP$ ，且点 B 同时满足边 OB 为定长， $\angle OBP = 90^\circ$ 为定角(图 1)。

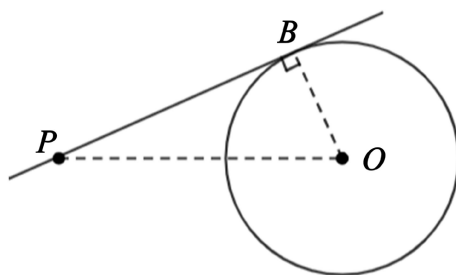


Figure 1. Target figure

图 1. 目标图形

教学说明：在尺规作图的教学，应引导学生以分析条件为重点，要求学生对题中的条件逐个思考，尤其注意隐含条件，想象并找到目标图形是直角三角形。

环节 2 拟定计划

问题 2：能否直接作出已知斜边 OP ，以线段 OB 为直角边且 $\angle OBP = 90^\circ$ 的 $Rt\triangle OBP$ 呢？

追问 2：如果不能直接作出，可将问题简单化处理，舍去一个条件，而保留其他条件，并尝试解决这个新问题。

学生 3：点 B 满足边 OB 为定长，则点 B 的运动轨迹就是 $\odot O$ ，由于题目已经作出，因此舍弃这个条件，得到新问题“已知线段 OP 为斜边， $\angle OBP = 90^\circ$ ，求作 $Rt\triangle OBP$ ”。

作图发现满足条件的 $Rt\triangle OBP$ 有无数个。

问题 3：这些不确定的直角三角形的运动变化有什么规律呢？

发现：把符合条件的 $Rt\triangle OBP$ 以 OP 这条边重合放在一起，发现直角顶点 B 的运动轨迹是一个以线段 OP 为直径的圆(图 2)

教师：观察图 2，你能得到哪些启示？

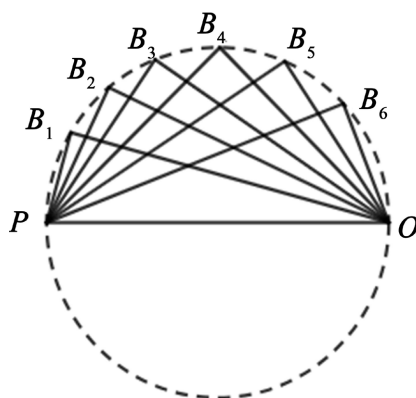


Figure 2. The graphical approach of Principle 1

图 2. 原理 1 作图思路

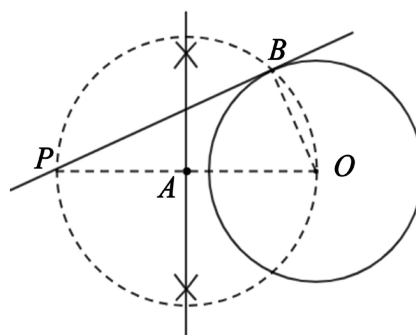


Figure 3. The process of drawing principle 1

图 3. 原理 1 作图过程

学生 4: 图 2 恰好验证了“直径所对的圆周角是直角”这一性质, 借助此原理, 作满足 $\angle OBP = 90^\circ$ 的点 B 的轨迹等价于作一个以线段 OP 为直径的圆。

追问 3: 接下来如何作出点 B 同时满足边 OB 为定长, $\angle OBP = 90^\circ$ 为定角的 $Rt\triangle OBP$ 呢?

师生总结: 满足 $\angle OBP = 90^\circ$ 为 $Rt\triangle OBP$ 的点 B 均在以线段 OP 为直径的圆上, 满足边 OB 为定长的点 B 均在 $\odot O$ 上, 显然这两个圆的交点即为所求点 B 。因此只需以线段 OP 为直径作一个圆, 即作 OP 的垂直平分线交 OP 于点 A , 以 A 为圆心, AO 长为半径作 $\odot A$, 该圆与 $\odot O$ 的交点记为点 B , 则直线 PB 就是 $\odot O$ 的一条切线(图 3)。

环节 3 回顾与反思

教师: 在解决“过圆外一点作圆的切线”这个问题的过程中, 有哪些可以总结的方法?

学生(小组 1): 如果不能解决原问题, 可以先解决一个简单问题, 即通过“只保留条件的一部分, 而舍弃其他部分”的方法将原来的复杂问题简单化处理。

学生(小组 2): 通过归纳发现“ $\angle OBP = 90^\circ$ 的 $Rt\triangle OBP$ ”的直角顶点 B 的运动轨迹是一个以线段 OP 为直径的圆, 自然联想到“直径所对的圆周角是直角”这一性质, 原问题就转化为作一个以线段 OP 为直径的圆, 该圆与 $\odot O$ 的交点即为切点 B 。

教学说明: 课前调查发现部分学生不能直接想到根据“直径所对的圆周角是直角”原理作图, 通过层层追问引导学生亲自分析条件, 对条件进行“分解和重组”, 从而自然生成作图原理, 感悟作图本质, 培养学生“数学归纳”思想。

5.2. 作图原理——全等三角形

环节1 拟定计划

教师：除了上述作法，你还能想到其他方法作出 $Rt\triangle OBP$ 吗？

问题4：既然目标是作 $Rt\triangle OBP$ ，你能联想到什么？

学生5：由于 $Rt\triangle OBP$ 的斜边 OP 与直角边 OB 的长固定，根据勾股定理可知直角边 BP 的长也固定。

追问4：如何确定 BP 的长呢？

学生6：可以先以 OP 长为斜边， OB 长为直角边作一个新的 $Rt\triangle OAD$ 。即先在 $\odot O$ 上任取一不与点 B 重合的点 A ，连接 OA ，过点 A 作 OA 的垂线 AC ，再以点 O 为圆心， OP 为半径画弧，交直线 AC 与点 D ，连接 OD ，得到 $Rt\triangle OAD$ ，显然 $AD = BP$ ，且直线 AD 是 $\odot O$ 的切线(图4)。

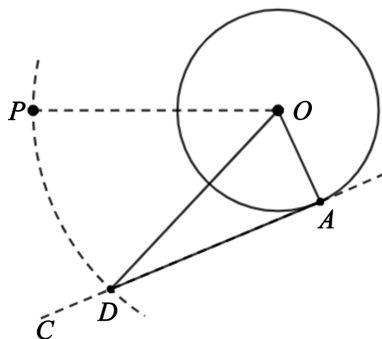


Figure 4. The graphical approach of Principle 2

图4. 原理2作图思路

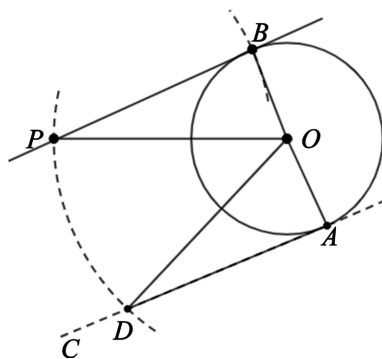


Figure 5. The process of drawing principle 2

图5. 原理2作图过程

教师： BP 的长已经确定，下面如何作出 $Rt\triangle OBP$ 呢？

学生7：以 P 为圆心， AD 为半径画弧，交 $\odot O$ 于点 B ，连接 OB ， BP 得到 $Rt\triangle OBP$ ，此时直线 BP 是 $\odot O$ 的切线(图5)。

环节2 检验结果

问题5：如何证明直线 BP 就是 $\odot O$ 的切线？

学生8：可由勾股定理的逆定理证明，因为 $\angle OAD = 90^\circ$ ，故 $OA^2 + AD^2 = OD^2$ ，又因为 $OB = OA$ ， $BP = AD$ ， $OP = OD$ ，所以 $OB^2 + BP^2 = OP^2$ ，进而 $OB \perp BP$ ，直线 BP 是 $\odot O$ 的切线。

学生9：还可以由“全等三角形的性质”证明，因为 $OB = OA$ ， $OP = OD$ ， $BP = AD$ ，所以

$\triangle OBP \cong \triangle OAD$ (SSS), 由于 $\angle OAD = 90^\circ$, 因此 $\angle OBP = 90^\circ$, 且点 B 点在 $\odot O$ 上, 故直线 BP 是 $\odot O$ 的切线。

环节3 回顾与反思

教师: 该作法本质上依据“全等三角形”原理作图, 根据目标是作 $Rt\triangle OBP$, 且只有直角边 BP 的长不确定, 自然联想到借助“勾股定理”确定直角边 BP , 作出 BP 只需在 $\odot O$ 上构造一个与其全等的 $Rt\triangle OAD$, 再由 $BP = AD$ 作出 $Rt\triangle OBP$, 根据“全等三角形的对应角相等”或“勾股定理的逆定理”证得 BP 是 $\odot O$ 的切线, 这就是数学中的“类比”方法。

教学说明: 在日常教学中, 教师不仅要求学生会尺规作图, 还要求学生理解这种尺规作图的方法是“怎么想到的”, 引导学生展开联想, 经历完整的尺规作图的思考过程, 培养学生的逆向思维和“类比”思想。

6. 教学启示

6.1. 注重培养学生的数学思想方法

培养学生的数学思想能够帮助学生提高问题解决能力, 促进数学核心素养的提升。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》明确指出“学生通过数学课程的学习, 掌握适应现代生活及进一步学习必备的基础知识和基本技能、基本思想和基本活动经验”“获得数学基础知识、基本技能、基本思想方法和基本活动经验, 发展运用数学知识与方法发现、提出、分析和解决问题的能力”[1]。尺规作图的教学不仅要传授作图方法, 更重要的是充分挖掘尺规作图题蕴含的数学思想方法以促进更好地掌握和运用数学知识。教师要将数学思想融入日常教学中, 向学生渗透分类讨论、化归、类比等思想方法, 逐渐养成应用数学思想解决数学问题的习惯。

6.2. 教师话语须具备引导性、启发性

尺规作图专题的教学强调过程性, 学生能否完整地体验作图过程离不开教师的引导和启发, 引导不是“牵着”, 是为学生暗示解题方向, 启发学生自主思考[3]。在尺规作图探究教学中, 教师应尽可能地多使用“它们之间有什么关系”、“你能发现什么问题”、“接下来如何思考”等开放性话语, 避免封闭式问题, 保证学生有充足的探究空间。教师话语的引导性和启发性是学生顺利展开探究的一个必要条件, 学生在教师的引导下一步一步获取知识与方法, 直至建构和解决问题, 整个探究过程中, 学生始终处于主体地位, 利于激发学生的学习兴趣, 领悟数学的魅力与乐趣。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 4.
- [2] 杨润冰, 杨军. 关注过程凸显思想——一组尺规作图题的教学实践[J]. 中学数学教学参考, 2022(26): 30-32.
- [3] 沈威, 涂荣豹. 数学探究教学中教师话语的基本特征与设计[J]. 教育科学研究, 2010(4): 53-56.