Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(10), 169-174
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1410357

Hans汉斯

全空间上Hypergenic函数的积分表示

王清源

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2024年9月11日；录用日期：2024年10月12日；发布日期：2024年10月22日

摘　要

本文首先借助hypergenic函数改进的柯西积分公式，呈现了hypergenic函数改进的柯西积分公式的另一种形式。接着，基于hypergenic函数与对偶的hypergenic函数两者之间的关系，我们推导出了对偶的hypergenic函数所对应的改进的柯西型积分公式。最后，进一步探讨并推导了关于$(1-n)$-hypergenic函数的改进的积分表示。

关键词

Hypergenic函数，对偶的Hypergenic函数，Cauchy积分公式

Integral Representations for Hypergenic Functions in the Whole Space

Qingyuan Wang

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Sep. 11th, 2024; accepted: Oct. 12th, 2024; published: Oct. 22nd, 2024

Abstract

In this article, with the help of the hypergenic function for the improved Cauchy integral formula, we first give another form of the hypergenic function for the improved Cauchy integral formula. Then, on the basis of the relationship between hypergenic function and the dual hypergenic function, the dual hypergenic function for the improved Cauchy integral formula is obtained. Finally, the related results of a $(1-n)$-hypergenic function for the improved integral representation are derived.

Keywords

Hypergenic Function, Dual Hypergenic Function, Cauchy Integral Formula

文章引用: 王清源. 全空间上 Hypergenic 函数的积分表示[J]. 理论数学, 2024, 14(10): 169-174.
DOI: 10.12677/pm.2024.1410357

1. 引言

Clifford 代数创立于上个世纪初，是一种可结合但不可交换的代数结构。Clifford 分析是复变函数理论向高维的推广，主要研究 Dirac 算子的核函数。1991 年，Gilbert 和 Murray [1]研究了调和分析中的 Clifford 代数和 Dirac 算子。2003 年，Eriksson [2]研究了 k-hypermonogenic 函数的相关性质，在物理学中，Cauchy 积分公式可以描述势函数的性质。2009 年，Eriksson 和 Orelma [3]研究了在实 Clifford 分析中的 hypergenic 函数的 Cauchy 型积分公式。2010 年，Eriksson [4]研究了全空间上对偶的超正则函数及$(1-n)$-超正则函数的积分表示。2013 年，谢永红[5]等研究了复 Clifford 分析中的 k-hypermonogenic 函数。2014 年，谢永红[6]研究了 Clifford 分析中几类函数的性质及其相关问题，同年研究了实 Clifford 分析中 hypergenic 函数拟柯西型积分公式的相关性质。2016 年，谢永红[7]等在 Clifford 分析中研究了 k-hypergenic 函数的一些性质。2023 年，柴晓珂[8]研究了 hypergenic 函数改进的柯西积分公式。在此工作基础之上，我们研究了全空间上 hypergenic 函数的柯西积分公式的另一种形式及对偶的 hypergenic 函数的改进的柯西型积分公式，推广了上半空间中 hypergenic 函数的积分公式的结果。借助对偶的 hypergenic 函数及$(1-n)$-hypergenic 函数的关系，推导了$(1-n)$-hypergenic 函数的积分表示，丰富了 Clifford 分析中的积分理论，为研究电磁场、流体力学、量子力学等领域的物理现象提供了有力工具。

2. 预备知识

2.1. Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_{n+1,0}(\mathbf{R})$

设$Cl_{n+1,0}(R)$是实 Clifford 代数，其中 n 为正整数，其基元素是$e_0,e_1,\cdots,e_n;e_0e_1,e_1e_2,\cdots,e_{n-1}e_n,\cdots;e_0\cdots e_n$并满足当$i\neq j$且$i,j=0,1,\cdots,n$时，$e_ie_j=-e_je_i$；当$j=0,1,\cdots,n$时，$e_j^2=+1$。$Cl_{n+1,0}(R)$中的任意元素 b 可以表示为$b=\sum_B b_Be_B$，其中$e_B=e_{\beta_1}e_{\beta_2}\cdots e_{\beta_h}$，$B=\{\beta_1,\cdots,\beta_h\}\subseteq\{0,1,\cdots,n\}$并且$0\le\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_h\le n$。$\forall b\in Cl_{n+1,0}(R)$，其模可定义为$|b|=\sqrt{\sum_B|b_B|^2}$，$y=y_0e_0+y_1e_1+\cdots+y_ne_n$称为$Cl_{n+1,0}(R)$中的向量，且$y^2=|y|^2$，$y^{-1}=\dfrac{y}{|y|^2}(y\neq0)$。

2.2. 中的基本运算 $\mathrm{Cl}_{n+1,0}(\mathbf{R})$

定义“ ' ”运算：$Cl_{n+1,0}(R)\to Cl_{n+1,0}(R)$，$e'_i=-e_i(i=0,1,\cdots,n)$，$\forall a,b\in Cl_{n+1,0}(R)$，$(ab)'=a'b'$。

定义“ $\wedge$ ”运算：$Cl_{n+1,0}(R)\to Cl_{n+1,0}(R)$，$\hat e_0=-e_0,\hat e_i=e_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\forall a,b\in Cl_{n+1,0}(R)$，$\widehat{ab}=\hat a\hat b$。

且有

$$e_0a=\hat a'e_0,a'e_0=e_0\hat a,e_0a'=\hat ae_0.$$

2.3. $\mathrm{Cl}_{n+1,0}(\mathbf{R})$ 中的一种分解

任意元素$b\in Cl_{n+1,0}(R)$，存在$c,d\in Cl_{n,0}(R)$，可唯一地分解为$b=c+e_0d$。定义两个映射$P_0,Q_0:Cl_{n+1,0}(R)\to Cl_{n,0}(R)$，使得$P_0b=c$，$Q_0b=d$，其中 c 和 d 分别称为 b 的 P_0 部和 Q_0 部。对$\forall m,n\in Cl_{n+1,0}(R)$，有

$$P_0(mn)=(P_0m)(P_0n)+(Q'_0m)(Q_0n),$$

$$Q_0(mn)=(P_0'm)(Q_0n)+(Q_0m)(P_0n)=m'(Q_0n)+(Q_0m)n$$

2.4. 微分算子

设 $\Omega\subset R^{n+1}$ 是一个开集，定义在 Ω 中取值于 C^r 代数空间的函数 g 可表示成 $g(x)=\sum_B g_B(x)e_B$，其中 g_B 为实值函数。设 $F_\Omega^{(r)}=\left\{g\,|\,g:\Omega\to Cl_{n+1,0}(R),g(x)=\sum_B g_B(x)e_B,g_B(x)\in C^r(\Omega),x\in\Omega\right\}$

定义 Dirac 算子：

$$D_l g(x)=\sum_{i=0}^{n}e_i\frac{\partial g(x)}{\partial x_i},$$

$$D_r g(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}e_i.$$

其中 $g\in F_\Omega^{(r)}\left(\Omega\subset R^{n+1}\setminus\{x_0=0\}\right)$。

可以定义修正的 Dirac 算子：

$$H_k^l g=D_l g-\frac{k}{x_0}Q_0 g,\quad H_k^r g=D_r g-\frac{k}{x_0}Q'_0 g.$$

2.5. Hypergenic 函数的相关内容

定义 1.5.1 [3]若函数 $g\in C^1\left(\Omega,Cl_{n+1,0}(R)\right)$，且对 $\forall x\in\Omega(x_0\neq 0)$ 有 $H_k^l g=0$，则称 g 是 Ω 上的左 k-hypergenic 函数，简称为 k-hypergenic 函数，$(n-1)$-hypergenic 函数简称为 hypergenic 函数。

定义 1.5.2 [6]设函数 $g\in C^1\left(\Omega,Cl_{n+1,0}(R)\right)$，若 $H_{n-1}^l(ge_0e_1\cdots e_n)=0$，则称 g 是 Ω 上对偶的$(n-1)$-hypergenic 函数，简称为对偶的 hypergenic 函数。

定理 1.5.1 [8] (hypergenic 函数改进的 Cauchy 型积分公式)设 $\Omega,U\subset R^{n+1}$ 中的区域，且满足 $\bar{\Omega}\subset U$，∂U 是足够光滑的，v 为 $t\in\partial\Omega$ 处单位外法向量，若在 Ω 中 $H_{n-1}^l g=0$，则对于 $y\in\Omega$ 且 $\hat{y}\notin\Omega$，有

$$g(y)=\frac{2^{n-1}|y_0|^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{(t-y)^{-1}v(t)g(t)-(\hat{t}-y)^{-1}\hat{v}(t)\hat{g}(t)}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t.$$

引理 1.5.1 [6]对于 $\forall t\in R^{n+1}$，$r_1(y,t)=\dfrac{y_0^{n-1}\left[(t-y)^{-1}-(\hat{t}-y)^{-1}\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}$ 是 $R^{n+1}\setminus\{t,\hat{t}\}$ 上关于 y 的左$(n-1)$-hypergenic 函数和右$(n-1)$-hypergenic 函数；对于 $\forall t\in R^{n+1}$，$r_2(y,t)=y_0^{n-1}\dfrac{(t-y)^{-1}+(t-\hat{y})^{-1}}{|t-y|^{n-1}|t-\hat{y}|^{n-1}}e_0$ 是 $R^{n+1}\setminus\{t,\hat{t}\}$ 上关于 y 的$(n-1)$-hypergenic 函数。

引理 1.5.2 [6]若函数 $g\in C^1\left(\Omega,Cl_{n+1,0}(R)\right)$，则 g 是 Ω 上的$(n-1)$-hypergenic 函数当且仅当 ge_0 是 Ω 上对偶的$(n-1)$-hypergenic 函数。

引理 1.5.3 [6]若函数 $g\in C^1\left(\Omega,Cl_{n+1,0}(R)\right)$，则 g 是 Ω 上的$(n-1)$-hypergenic 函数当且仅当 $\dfrac{ge_0}{x_0^{n-1}}$ 是 Ω 上的-$(n-1)$-hypergenic 函数，即 $\dfrac{g}{x_0^{n-1}}$ 是 Ω 上对偶的-$(n-1)$-hypergenic 函数。

3. 主要结果

定理 2.1 设 Ω,U 都为 R^{n+1} 中的区域，$\partial\Omega$ 是足够光滑的，并且满足 $\bar{\Omega}\subset U$，v 为 $t\in\partial\Omega$ 处外法向量且 $|v|=1$，如果 g 是 U 上的 hypergenic 函数，当 $y\in\Omega$ 且 $\hat{y}\notin\Omega$，有

$$g(y)=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)P_0\left[v(t)g(t)\right]+s_2(y,t)Q_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}\mathrm{d}S_t.$$

其中 $s_1(y,t)=\dfrac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}-(\hat{t}-y)^{-1}\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}$ 和 $s_2(y,t)=\dfrac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}+(\hat{t}-y)^{-1}\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}e_0$ 是 Ω 上关于 y 的 hypergenic 函数。

证明：由 hypergenic 函数改进的柯西积分公式，及

$$v(t)g(t)=P_0\left(v(t)g(t)\right)+e_0Q_0\left(v(t)g(t)\right)$$

$$\hat{v}(t)\hat{g}(t)=P_0\left(v(t)g(t)\right)-e_0Q_0\left(v(t)g(t)\right),$$

可推得

$$\begin{aligned}
g(y)&=\frac{2^{n-1}|y_0|^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{(t-y)^{-1}v(t)g(t)-(\hat{t}-y)^{-1}\hat{v}(t)\hat{g}(t)}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t\\
&=\frac{2^{n-1}|y_0|^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{(t-y)^{-1}\left\{P_0\left[v(t)g(t)\right]+e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t\\
&\quad-\frac{2^{n-1}|y_0|^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{(\hat{t}-y)^{-1}\left\{P_0\left[v(t)g(t)\right]-e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t\\
&=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}-(\hat{t}-y)^{-1}\right]P_0\left[v(t)f(t)\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t\\
&\quad+\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\frac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}+(\hat{t}-y)^{-1}\right]e_0Q_0\left[v(t)f(t)\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}\mathrm{d}S_t
\end{aligned}$$

令 $s_1(y,t)=\dfrac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}-(\hat{t}-y)^{-1}\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}$，$s_2(y,t)=\dfrac{|y_0|^{n-1}\left[(t-y)^{-1}+(\hat{t}-y)^{-1}\right]}{|y-t|^{n-1}|y-\hat{t}|^{n-1}}e_0$，

因为 $s_1(y,t)=r_1(y,t)(y_0>0)$，$s_1(y,t)=(-1)^{n-1}r_1(y,t)(y_0<0)$，$s_2(y,t)=r_2(y,t)(y_0>0)$，$s_2(y,t)=(-1)^{n-1}r_2(y,t)(y_0<0)$，及引理 1.5.1，则 $s_1(y,t)$ 和 $s_2(y,t)$ 是 Ω 上关于 y 的 hypergenic 函数。

在定理 2.1 及 hypergenic 函数与对偶的 hypergenic 函数关系的基础之上给出了对偶的 hypergenic 函数改进的 Cauchy 积分公式。

定理 2.2 设 Ω,U 都为 R^{n+1} 中的区域，且满足 $\bar{\Omega}\subset U$，$\partial\Omega$ 是足够光滑的，v 为 $t\in\partial\Omega$ 处外法向量且 $|v|=1$，若 g 是 U 上对偶的 hypergenic 函数，当 $y\in\Omega$ 且 $\hat{y}\notin\Omega$，有

$$g(y)=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]+s_2(y,t)e_0P_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}\mathrm{d}S_t$$

其中核 $s_1(y,t)e_0$ 和 $s_2(y,t)e_0$ 都是 Ω 上关于 y 的对偶的 hypergenic 函数。

证明：由 g 是 U 上对偶的 hypergenic 函数，借助引理 1.5.2， ge_0 是 U 上的 hypergenic 函数，利用定理 2.1，

我们得到

$$g(y)e_0=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)P_0\left[v(t)\left(g(t)e_0\right)\right]+s_2(y,t)Q_0\left[v(t)\left(g(t)e_0\right)\right]\right\}\mathrm{d}S_t$$
$$=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)P_0\left[\left(v(t)g(t)\right)e_0\right]+s_2(y,t)Q_0\left[\left(v(t)g(t)\right)e_0\right]\right\}\mathrm{d}S_t$$

由

$$v(t)f(t)=P_0\left(v(t)f(t)\right)+e_0Q_0\left(v(t)f(t)\right),$$

于是有

$$g(y)e_0=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)P_0\left[\left(P_0\left[v(t)g(t)\right]+e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]\right)e_0\right]\right.$$
$$\left.+s_2(y,t)Q_0\left[\left(P_0\left[v(t)g(t)\right]+e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]\right)e_0\right]\right\}\mathrm{d}S_t.$$

又

$$P_0\left[\left(P_0\left[v(t)f(t)\right]+e_0Q_0\left[v(t)f(t)\right]\right)e_0\right]=e_0Q_0\left[v(t)f(t)\right]e_0=Q_0'\left[v(t)f(t)\right]e_0^2=Q_0'\left[v(t)f(t)\right]$$
$$Q_0\left(P_0\left[v(t)f(t)\right]+e_0Q_0\left[v(t)f(t)\right]e_0\right)=Q_0\left[e_0P_0'\left[v(t)f(t)\right]\right]=P_0'\left[v(t)f(t)\right],$$

所以

$$g(y)e_0=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)Q_0'\left[v(t)g(t)\right]+s_2(y,t)P_0'\left[v(t)g(t)\right]\right\}\mathrm{d}S_t.$$

上式两端右乘 e_0，有

$$g(y)=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)Q_0'\left[v(t)g(t)\right]e_0+s_2(y,t)P_0'\left[v(t)g(t)\right]e_0\right\}\mathrm{d}S_t$$
$$=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)e_0Q_0\left[v(t)g(t)\right]+s_2(y,t)e_0P_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}\mathrm{d}S_t.$$

由引理 1.5.2 及 $s_1(y,t)$ 和 $s_2(y,t)$ 是 Ω 上关于 y 的 hypergenic 函数，则核 $s_1(y,t)e_0$ 和 $s_2(y,t)e_0$ 是 Ω 上关于 y 的对偶的 hypergenic 函数。

利用定理 2.2，我们可推导出(1 − n)-hypergenic 函数的改进的 Cauchy 积分公式。

定理 2.3 设 Ω,U 都为 R^{n+1} 中的区域，且满足 $\bar{\Omega}\subset U$，v 为 $t\in\partial\Omega$ 处外法向量且 $|v|=1$，若 g 是 U 上(1 − n)-hypergenic 函数，当 $y\in\Omega$ 且 $\hat{y}\notin\Omega$，有

$$g(y)=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{\beta_1(y,t)Q_0\left[v(t)g(t)\right]+\beta_2(y,t)P_0\left[v(t)g(t)\right]\right\}\mathrm{d}S_t,$$

其中核 $\beta_1(y,t)=y_0^{n-1}t_0^{1-n}s_1(y,t)e_0$ 和 $\beta_2(y,t)=y_0^{n-1}t_0^{1-n}s_2(y,t)e_0$ 都是 Ω 上关于 y 的(1 − n)-hypergenic 函数。

证明：由 $g(t)$ 是 U 上(1 − n)-hypergenic 函数，利用引理 1.5.3， $t_0^{n-1}g(t)$ 是 U 上对偶的 hypergenic 函数，再由定理 2.2，有

$$y_0^{n-1}g(y)=\frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}}\int_{\partial\Omega}\left\{s_1(y,t)e_0Q_0\left[v(t)\left(t_0^{n-1}g(t)\right)\right]+s_2(y,t)e_0P_0\left[v(t)\left(t_0^{n-1}g(t)\right)\right]\right\}\mathrm{d}S_t$$

上式两端同时除以 y_0^{n-1}，有

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\Omega} \left\{ t_0^{n-1} y_0^{1-n} s_1(y,t) e_0 Q_0 \left[v(t) g(t) \right] + t_0^{n-1} y_0^{1-n} s_2(y,t) e_0 P_0 \left[v(t) g(t) \right] \right\} \mathrm{d}S_t \\
&= \frac{2^{n-1}}{\omega_{n+1}} \int_{\partial\Omega} \left\{ \beta_1(y,t) Q_0 \left[v(t) g(t) \right] + \beta_2(y,t) P_0 \left[v(t) g(t) \right] \right\} \mathrm{d}S_t
\end{aligned}
$$

由引理 1.5.3，$\beta_1(y,t) = t_0^{n-1} y_0^{1-n} s_1(y,t) e_0$，$\beta_2(y,t) = t_0^{n-1} y_0^{1-n} s_2(y,t) e_0$ 是 Ω 上关于 y 的$(1-n)$-hypergenic 函数。

参考文献

[1] Gilbert, J. and Murray, M. (1991). Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511611582

[2] Eriksson-Bique, S. (2003). K–HYPERMONOGENIC FUNCTIONS. In: Begehr, H.G.W., Ed., *Progress in Analysis*, World Scientific Pub Co Inc, 337-348. https://doi.org/10.1142/9789812794253_0040

[3] Eriksson, S. and Orelma, H. (2009) Hyperbolic Function Theory in the Clifford Algebra $Cl_{n+1,0}$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **19**, 283-301. https://doi.org/10.1007/s00006-009-0157-4

[4] Eriksson, S. (2010) Hyperbolic Extensions of Integral Formulas. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **20**, 575-586. https://doi.org/10.1007/s00006-010-0211-2

[5] Xie, Y., Yang, H. and Qiao, Y. (2013) Complex *k*-Hypermonogenic Functions in Complex Clifford Analysis. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **58**, 1467-1479. https://doi.org/10.1080/17476933.2012.686496

[6] 谢永红. Clifford 分析中几类函数的性质及其相关问题研究[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2014.

[7] Xie, Y., Zhang, X. and Tang, X. (2016) Some Properties of *k*-Hypergenic Functions in Clifford Analysis. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **61**, 1614-1626. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1193492

[8] 柴晓珂. Hypergenic 函数在无界域上的柯西型积分公式及 Plemelj 公式[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津职业技术师范大学, 2023.