

新工科背景下“线性代数”课程的案例式创新与探究

——以逆矩阵的课堂为例

杨倩, 宇振盛*

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年9月14日; 录用日期: 2024年10月14日; 发布日期: 2024年10月23日

摘要

在新工科背景下探讨了对线性代数课程教学方法进行改革。针对当前课堂“偏理论讲授, 高度抽象脱离工程技术应用情景, 学生缺乏兴趣和动力”等问题, 通过案例教学法, 以讲授逆矩阵为例, 首先融入数学史和课程思政元素, 同时进行案例分析, 随后将一个案例贯彻课堂始终, 先以案例引出并以其为主线讲授知识点, 反过来再用所学数学理论分组探讨并解决该案例提出的问题, 充分调动学生课堂上的主动性, 逐步分析并解决问题, 最终达到提升教学效果和人才培养成效的目的。

关键词

案例教学法, 课程思政, 新工科, 线性代数

Teaching Innovation and Exploration of “Linear Algebra” in New Engineering Context on the Basis of Case Method

—A Case Study of the Inverse Matrix

Qian Yang, Zhensheng Yu*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Sep. 14th, 2024; accepted: Oct. 14th, 2024; published: Oct. 23rd, 2024

Abstract

The reform of teaching methods for the linear algebra course in the context of new engineering is

*通讯作者。

explored. In response to the teaching issues like theoretical teaching, highly abstraction and detachment from engineering technology application, and lack of interest and motivation among students encountered in traditional classroom settings, the teaching of inverse matrix is taken as an example by using case method. Firstly, mathematical history and ideological and political elements of the curriculum are integrated, and case analysis is conducted. Then, a case is implemented throughout the whole class. The points are introduced through the case and taught as the main line. In turn, the learned mathematical theories are grouped to explore and solve the problems raised in the case, fully mobilizing the initiative of students in the class, gradually analyzing and solving problems, and ultimately achieving the goal of improving teaching effectiveness and talent cultivation effectiveness.

Keywords

Case Method, Curriculum Ideology and Politics, New Engineering, Linear Algebra

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

为主动应对新一轮科技革命与产业变革,教育部自2017年2月以来积极推进新工科建设,发布了《关于开展新工科研究与实践的通知》《关于推荐新工科研究与实践项目的通知》,全力探索领跑全球工程教育的中国模式,打造中国品牌,加快高等教育强国建设,培养学生的创新和实践能力[1]。这就要求我们深化课堂教学方式的改革,从传统的讲授法转变为案例教学法,使学生不再被动接受性地学习,而是自主性地学习。事实上,以案例为载体的教学方法在中西方分别可以追溯到春秋战国时代和古罗马时代,代表人物分别是公元前6世纪的中国教育家孔子和古希腊著名哲学家和教育家苏格拉底。现在研究的“案例教学法”由哈佛大学前院长 Christopher Columbus Langdell 于1870年提出,先后用于法学、医学、经济学、管理学、社会学等,直到1979年才引进国内,主要应用在人文社科领域。案例教学法是教师以具有代表性的案例为学生创设问题情境,引导学生分析讨论,在情境中掌握理论知识,从而将知识与实践创造性地相结合[2]。

线性代数是工科专业大学生重要的基础课程之一,所涉及的矩阵、线性方程组、线性空间、二次型等代数学理论对大学生运用抽象思维和数学逻辑思维能力理解后续专业课程起着至关重要的作用,并且这些理论方法广泛地应用在众多工程技术领域。在传统的线性代数课堂中,教师更倾向于运用讲授法,与相关专业和实际联系得较少,这样比较单一的教学方法很难引起学生的兴趣,学生经常有概念和计算有什么用的迷茫。再加上线性代数章节内容前后衔接很紧密,会出现第一章、第二章的内容没听懂,后面就像听天书。针对上述问题,众多大学数学教育工作者进行了研究,公交线路引出矩阵计算,结合药方配置问题理解线性表示,将矩阵的特征值和特征向量应用到乡镇人口问题,从线性代数课程发展史引入概念出现的自然逻辑,以斑点猫头鹰种群动力学研究为案例融入矩阵的特征值与特征向量思想等[3]-[10]。从中可以看出,虽然有些文献只是把案例和知识联系起来,并未贯穿整堂课,但是已经提高了教学质量和效果,案例教学法可以充分增加学生课堂的参与度,在教师的引导下,自主地融入案例情景,一步步分析问题、解决问题,自然地习得抽象的代数学理论,更把理论落到了实处,充分且高效地完成了教学目标。下面我们将以线性代数课程中的逆矩阵为例,展示如何在课堂上一以贯之地应用案例教学法,形成逻辑闭环,而不是融入案例则抛开不谈,只是作为课堂引入部分而已。

2. 线性代数中逆矩阵的案例分析

当今的密码学以数学为基础, 最早起源于两千多年前的战场, 古罗马名将 Julius Caesar 将二十几个罗马字母建立一张和它本身的乱码对应表, 称为凯撒大帝编码, 用密码传送情报, 比如敌人截获消息密码“ABKTBP”, 通过密码本才能破解出明码“CAESAR”。这时只要多截获一些加密情报, 通过统计字母频率即可破解。随后, 二战中顶尖科学家香农提出了信息论, 指出当密码之间分布均匀且统计独立时, 信息量没有增加, 从而敌方即使截获一段密码和明码, 也无法破译另一段密码。1929年, 美国密码专家 Lester S. Hill 发明希尔密码, 破解的难点在于字母与数字的对应关系、明码矩阵的阶数以及加密矩阵的难度。也就是本文选取的案例。今天的逆矩阵由英国数学家 Arthur Cayley 于 1858 年在“Memoir on the Theory of Matrices”定义, 目的是表示线性方程组的解, 而不是提出得到方程解的算法, 同时给出了如今行列式的表示法、矩阵加法、数乘、乘法、次幂、单位矩阵的定义, 提出的 Cayley-Hamilton 定理更是达到了巅峰, 他被公认为矩阵的创立者。事实上, 逆矩阵求解方程组比高斯消元法慢, 求逆矩阵的一种方法就是将其等价转化为用高斯消元法求解线性方程组。另外, 矩阵可视作线性变换, 逆矩阵相应就是它的逆线性变换, 该思想在数学理论、计算机科学、人工智能、数据科学、机器人学和金融、医疗、物流、工程应用上有重要意义, 电路可以用线性方程组表示并通过计算机找到逆矩阵可得到复杂电路的电流和电压, 图像处理可以用逆矩阵操作像素而达到模糊图像、检测边缘、锐化图像的目的, 机器学习和神经网络需要用逆矩阵进行编码, 工程中弹性矩阵的逆称为刚性矩阵。不仅如此, 逆矩阵是一个矩阵的逆元, 它可以用来解线性方程组、矢量运算、矩阵方程, 还与非奇异矩阵的伴随矩阵、初等变换法求逆矩阵、对角化、向量组间的线性表示、正交矩阵、方阵的特征向量、相似矩阵、化二次型为标准型等知识点密不可分, 是线性代数课程中的一个很有力的工具。

3. 案例教学下的逆矩阵的教学设计

我们先分析逆矩阵的课程思政理念。在引入问题时, 通过案例教学法, 给出了信息安全与理论中的一个简单应用“希尔密码”, 引起学生参与课堂的兴趣, 通过“发现问题-提出问题-探索问题-解决问题”的全过程, 将案例融入教学的每一个环节体现了从特殊到一般的数学哲学思想, 逐渐培养学生解决问题能力和创新精神。在结尾应用中介绍了贯彻课堂始终的案例是希尔密码, 融入数学史的内容, 而当前世界科技竞争日趋激烈, 还提到了两位中国的密码大家华罗庚和王小云先生, 增强了学生的家国情怀和创新意识, 培养学生追求真理、坚持不懈、创新求变、行稳致远的科学精神。下面是教学过程设计。

3.1. 知识回顾(1 分钟)

简单复习矩阵的运算这一节, 上节课学习了矩阵的加减法、数与矩阵的乘法、乘法、方阵的幂、矩阵的转置、方阵的行列式和共轭矩阵。这一节我们将学习另一种“求逆”运算, 也就是逆矩阵的定义、判定和求法。

3.2. 案例引入(7 分钟)

- 根据上一节的案例分析, 向学生讲述密码学的背景从而引出“希尔密码”。
- 用矩阵乘法对信息“Action”进行加密和解密。

假设 1: 假定字母与数字有如下对应关系。

字母	A	B	C	...	X	Y	Z	空格
数字	1	2	3	...	24	25	26	0

假设 2: 将 26 个字母加空格从左向右, 3 个为一组, 并将对应的数字依次作为矩阵的列, 最终可形成一个 3×3 的矩阵, 加密后仍为 3×3 的矩阵, 其元素仍为整数。

- 引导学生思考如何对该问题进行数学建模。
- 第一步: 信息矩阵化

这里信息 “Action” 矩阵化为明码

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 15 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}$$

- 第二步: 信息加密

这里任意构建三阶矩阵作为密钥

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

将 A 左乘于信息矩阵 B 后, 得到 “密码” 矩阵 C 发出。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 15 \\ 20 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 53 \\ 44 & 52 \\ 43 & 43 \end{pmatrix} = C$$

C 为明码 B 加密后的密码。

- 第三步: 信息解密

现在的问题是密文 C 如何解密为明文 B 呢?

A 为密钥, 也就是我们要解决的问题是

$$B = ?C$$

这一部分的前两分钟介绍上一节叙述的密码通信背景, 自然过渡到线性代数数学史中逆矩阵是如何一步步出现的, 建立学生科学的世界观, 并从 Julius Caesar、香农、Lester S. Hill、Arthur Cayley 这些历史人物身上体会求真求实的科学精神和爱国主义情操。另外, 整个案例引入过程中, 引导学生探究如何将其进行数学建模并最终提出数学问题, 引出本节的内容, 潜移默化地培养学生的创新精神和抽象思维。

3.3. 逆矩阵的定义(5 分钟)

定义 3.1 设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵 A 可逆, 而称 B 是 A 的逆矩阵, 记作

$$B = A^{-1}.$$

启发学生:

- 1) 可逆矩阵的逆矩阵是否唯一?
- 2) 矩阵 A 满足什么条件时可逆?
- 3) 如何求逆矩阵?

这就是本节课要讨论的问题。

引导学生观察并思考怎样找到一个 B 使得其右乘 A 得到 E 。这就相当于找到 n 个列向量 x , 使得 Ax

= 单位列向量。由第一章行列式展开定理和行列式某一行的元素与另一行的对应元素代数余子式的乘积之和为零可得单位列向量的 1 和 0, 从而得到 n 个列向量 x 分别是 A 各行的代数余子式再乘以系数

$$\frac{1}{|A|},$$

n 个列向量 x 合起来就是所要找到的 B 。不考虑系数, 我们可以看到出现了一个新的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

这个方阵称为方阵 A 的伴随矩阵, 由行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成, 记作

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

观察刚才的过程, 启发学生猜测 A 的逆矩阵的形式, 管中窥豹, 可得下面形式

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

启发学生注意接下来的内容, 如何验证这个猜测。

3.4. 矩阵可逆的充要条件(7 分钟)

定理 3.1 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ (A 非奇异)。若 A 可逆, 则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

启发学生: 证明思路就是我们刚观察到的情况。

启发学生: 可逆矩阵的逆矩阵是否唯一?

定理 3.2 如果 n 阶矩阵 A 可逆, 则它的逆矩阵是唯一的。

启发学生: 证明思路是反证法, 假设 A 有两个逆矩阵, 最后根据已学结论可知它们相同。

至此, 本节课的三个问题均已解决。

引导学生理解与掌握从发现问题、探究问题到解决问题以及大胆假设、小心求证的科学思维方法, 在给出定义的过程中领会数学的严谨性和逻辑性。通过证明让学生感悟线性代数中严密数理逻辑。

3.5. 回归案例本身(10 分钟)

- 第三步: 信息解密(续)

收到密码

$$C = \begin{pmatrix} 27 & 53 \\ 44 & 52 \\ 43 & 43 \end{pmatrix}$$

后, 利用

$$B = A^{-1}C$$

进行解密, 以恢复明码。这里 A 的逆矩阵就用我们刚得到并验证的方法来求。

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 & 53 \\ 44 & 52 \\ 43 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 15 \\ 20 & 14 \end{pmatrix} = B$$

最后, 由破解的明码 B 查表可得信息 “Action”。

除了西方密码学家, 想必大家更想认识中国的密码大家们。华罗庚, 中科院院士、数学家, 中国解析数论创始人, 中国现代数学之父, 他并不是只醉心学术的书呆子, 1943 年前后, 中方无法破译日本军事代码, 华罗庚利用专业知识, 破解了日军对昆明的计划, 为抗日战争做出巨大贡献。70 年代华罗庚在全国推广的优选法, 为国民经济做出突出贡献。也许在生活中, 普通人可能运用不到什么微积分、线性代数, 但建造坚船利炮、架桥修路等等都离不开数学, 数学对于一个国家的发展, 对于社会的完善具有重要意义。王小云, 中科院院士, 密码学家, 在 2004 年, 破译了美国宣称 100 年无法破译的 MD5 密码, 耗时两年。后来美国又推出公认更难的 SHA-1 密码, 而王小云只花费了两个月时间就破译, 《华盛顿时报》评价王小云完全有能力攻击白宫内部。也因此, 王小云被奉为 “密码女王”。随后以美国为首的国家多次以巨大的诱惑 “挖墙脚”, 但王小云表示, 自己是一个中国人, 自己所做的一切都是为更好的保护祖国, 绝不背叛自己的祖国。

通过启发学生的方式, 发挥其主观能动性, 提高学生的认知学习能力, 润物细无声, 从数学定义和定理中体会特殊到一般以及理论与实际相结合的数学哲学思想, 用 1 分钟介绍华罗庚和王小云院士的事迹, 自然融入数学史的内容, 增强学生的数学文化素养, 用 2 分钟介绍第二部分的工程应用背景, 让学生了解逆矩阵在实际中有什么用, 从而激发学生的学习兴趣, 和本专业联系起来, 至此解决了逆矩阵 “是什么”、“为什么”、“怎么做” 的三大问题, 梳理了该知识点的来龙去脉, 培养了学生的科学素养。

3.6. 案例探究(15 分钟)

分组讨论、现场互动: 对 “We love USST” 进行加密、解密。以小组的形式完成。

通过一个案例贯彻始终, 让同学将探究得到的理论应用到相似的问题中, 提高学生的课堂参与度。

全班 72 人, 分为 18 个小组, 4 人一组, 分工合作, 完成 “加密、解密” 的任务, 完成后, 按照座位分布, 选择 4 个小组到讲台汇报展示, 这样就使得每个学生都参与课堂讨论, 教师在教室里走动并与学生互动, 为学生答疑解惑, 最后的汇报环节, 根据学生的计算过程可知学生已充分地掌握了知识点, 有效地达到教学目标。整个课堂, 学生都饶有兴趣地参与到案例的学习中, 反响热烈。最后用一分钟让学生以 “是否提升教学效果” 写下评价, 70 人参与了评价, 评语为 “是” 的有 69 人, 学生普遍反映能够提升自己分析问题、解决问题、逻辑推理、交流合作等方面的能力, 并希望以后多用案例式教学, 。

4. 结语

为了培养多元化、创新型的卓越工程人才, 必须培养工科学生的数学核心素养。针对面向非数学工科专业的抽象难懂而影响深远的线性代数课程, 本文应用案例教学法, 以发现问题、提出问题、分析问题、解决问题为基本路线, 以一个实际案例为主线, 遵循学生的认知逻辑, 深入浅出, 发现事物内在的属性和规律, 理论与实际相结合, 激发学生兴趣和主动性, 提高了学生数学建模、抽象概括以及将理论应用到实际的能力, 从中体悟从特殊到一般的数学哲学思想, 并展现了如何运用案例教学法将课程思政潜移默化地融入课堂, 一个案例贯彻始终, 培养了学生的科学思维和民族自信心, 提高了教学效果, 实现了 “以学生为本” 的教学理念。

基金项目

上海高校本科重点教改项目。

参考文献

- [1] 赵静, 高有, 金永, 王蕊. 新工科背景下线性代数课程教学改革与实践[J]. 高等数学研究, 2024, 27(1): 91-94.
- [2] 王青梅, 赵革. 国内外案例教学法研究综述[J]. 宁波大学学报, 2009, 31(3): 7-11.
- [3] 魏连鑫. 大学数学教学应重视学生四种能力的培养[J]. 上海理工大学学报(社会科学版), 2021, 43(1): 81-84.
- [4] 刘罗华, 汤琼. 工科院校大学数学的案例式教学探讨[J]. 湖南工业大学学报, 2010, 24(2): 80-82.
- [5] 冯杰, 杨慧, 董连春. 基于案例教学的“线性代数”课程教学创新与研究[J]. 科技风, 2023(4): 120-122+165.
- [6] 周儒省, 柴华金. 融合案例的线性代数课程教学实践[J]. 高师理科学刊, 2023, 43(9): 70-75.
- [7] 宇振盛. 数学建模视域下的大学数学教学研究[J]. 创新创业理论研究与实践, 2020(19): 6-8.
- [8] 吴军. 数学之美(第三版)[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2020.
- [9] 刘锡平, 宇振盛, 何常香, 等. 线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [10] 丁南庆, 刘公祥, 纪庆忠, 郭学军, 等. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2021.