Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(10), 219-225
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1410362

带Logistic源的奇异趋化系统解的整体存在性

王　娇

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2024年9月15日；录用日期：2024年10月15日；发布日期：2024年10月28日

摘　要

本文研究一类在齐次Neumann边界条件下的具有奇异灵敏度和Logistic源的抛物－抛物趋化系统：$u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k$，$v_t = \Delta v - v + u$，其中$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为光滑有界凸域，$\mu, \chi > 0$，$r \in \mathbb{R}$。证明了当于$k > 1$及$\chi \le \frac{4}{n}$时，系统存在唯一的整体古典解。

关键词

趋化，奇异灵敏度，Logistic源，整体存在

Global Existence of Classical Solutions to a Singular Chemotaxis System with Logistic Source

Jiao Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 15th, 2024; accepted: Oct. 15th, 2024; published: Oct. 28th, 2024

Abstract

This paper investigates a class of parabolic chemotaxis systems with singular sensitivity and Logistic sources under homogeneous Neumann boundary conditions:
$u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + ru - \mu u^k$, $v_t = \Delta v - v + u$, **where** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **is a smooth bounded convex domain,** $\mu, \chi > 0$, $r \in \mathbb{R}$. **It is proved that for** $k > 1$ **with** $\chi \le \frac{4}{n}$, **the system admits a unique global classical solution.**

文章引用：王娇．带 Logistic 源的奇异趋化系统解的整体存在性[J]．理论数学, 2024, 14(10): 219-225.
DOI: 10.12677/pm.2024.1410362

Keywords

Chemotaxis, Singular Sensitivity, Logistic Source, Global Existence

1. 引言

近五十年来，趋化模型已成为生物数学研究的主要焦点之一。趋化性模型主要描述细胞受化学物质吸引产生的定向运动，这个过程在各种生物学应用中起着很大的作用，例如胚胎发育、伤口愈合和血管形成。因此，对趋化性的研究可以帮助理解这些基本过程，尤其是可以帮助探索生命系统发育机制。趋化系统中经典 Keller-Segel 系统是由 Keller 和 Segel 于 20 世纪 70 年代提出的[1]，由如下反应扩散方程组刻画：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(u\phi(v)\nabla v\right) + f(u) \\ v_t = \Delta v - v + u \end{cases} \tag{1.1}$$

模型(1.1)中的 PDE 系统在数学生物学中用于模拟趋化机制，即细胞对空间中不均匀分布的化学物质的存在作出反应的运动。在齐次 Neumann 边界条件下，u 表示细胞浓度，v 表示化学信号浓度，r,μ 为非负常数，$\Omega\in\mathbb{R}^n\,(n\ge1)$ 为有界光滑凸域，$\frac{\partial}{\partial\nu}$ 表示光滑边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。χ 表示趋化强度，当 $\chi>0$ 时，细胞表现出向更高信号浓度移动的趋势；相反地，当 $\chi<0$ 时细胞更倾向于远离化学物质。

现回顾系统(1.1)的相关结论。若 $\phi(v)=\frac{1}{v}, f(u)=0$，Fujie 等人证明了当 $0<\chi<\sqrt{\frac{2}{n}}\,(n\ge2)$ 时古典解的整体存在性以及当 $0<\chi<\sqrt{\frac{n+2}{3n-4}}\,(n\ge2)$ 时系统(1.1)存在一个整体弱解[2]；在径向对称条件下，Stinner 和 Winker 引入并证明了 Neumann 问题的广义解概念[3]；此外，Lankeit 等人证明了 $n=2$ 或 $n=3,\chi<\sqrt{8}$ 或 $n\ge4,\chi<\frac{n}{n-2}$ 时系统(1.1)有一个全局广义解[4]。若 $\phi(v)=\frac{1}{v}, f(u)=ru-\mu u^k$，Zhao 和 Zheng 证明了在 $n=2,k=2$ 时，如果满足 $r>\frac{\chi^2}{4}(0<\chi\le2)$ 或 $r>\chi-1(\chi>2)$ 时，系统(1.1)具有唯一的全局有界古典解[5]；后来，Zhao 研究了当 $\chi\in\left(0,\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right\}\right), n\ge2$ 时系统(1.1)解的整体存在性和有界性[6]。

本文受以上结论启发，研究一类在齐次 Neumann 边界条件下具有奇异灵敏度和 Logistic 源的抛物－抛物趋化系统：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot\left(\frac{u}{v}\nabla v\right) + ru - \mu u^k, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\mu,\chi>0$， $r\in\mathbb{R}$ 和 $k>1$， $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 为光滑有界凸域。初始条件满足：

$$u_0\in C^0\left(\bar{\Omega}\right),v_0\in W^{1,q}\left(\Omega\right)\left(q>1\right). \tag{1.3}$$

定理 1.1 设 $\mu,\chi>0$， $r\in\mathbb{R}$， $k>1$ 且初始条件满足(1.3)。当 $\chi\le\frac{4}{n}$ 时，系统(1.2)存在唯一的整体古典解。

注 不同于相关文献[6]，本文在齐次 Neumann 边界条件下，通过构造能量函数 $z=\frac{u}{v}+\frac{\chi}{2}\left|\nabla\log v\right|^2$，进而利用先验估计和 Neumann 热半群理论，证明了当趋化敏感函数和方程中的参数满足一定的条件时，古典解整体存在。

2. 预备知识

根据 Banach 不动点理论，可以得到如下解的局部存在性，具体证明参考相关文献[7]。

引理 2.1 假设 u_0,v_0 满足(1.3)。若 $\mu,\chi>0$， $k>1$， $r\in\mathbb{R}$，则存在 $T_{\max}\in\left(0,\infty\right]$ 及唯一非负函数 $\left(u,v\right)$

$$\begin{cases} u\in C^0\left(\bar{\Omega}\times\left[0,T_{\max}\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times\left(0,T_{\max}\right)\right)\right) \\ v\in C^0\left(\bar{\Omega}\times\left[0,T_{\max}\right)\cap C^{2,1}\left(\bar{\Omega}\times\left(0,T_{\max}\right)\right)\cap L^\infty_{loc}\left(\left[0,T_{\max}\right);W^{1,q}\left(\Omega\right)\right)\right) \end{cases}$$

满足(1.2)。另外， $T_{\max}=\infty$ 或者 $T_{\max}<\infty$ 并且 $\lim\limits_{t\to T_{\max}}\left(\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|v\left(\cdot,t\right)\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}\right)=\infty$。

为了方便，记 $T=T_{\max}$， 设 $\left(u,v\right)$ 是系统(1.2)的非负光滑解，根据比较原理以及 v 的正性，可得：

$$v\left(x,t\right)\ge\left(\inf_{x\in\Omega}v_0\right)\mathrm{e}^{-t},\quad t\in\left(0,T\right). \tag{1.4}$$

下面给出 u 的一个先验估计。

引理 2.2 设 $\mu,\chi>0$， $k>1$， $r\in\mathbb{R}$， 则

$$\int_\Omega u\left(\cdot,t\right)\mathrm{d}x\le L_1:=\max\left\{\int_\Omega u_0\mathrm{d}x,\left|\Omega\right|\left(\frac{\left|r\right|}{\mu}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right\},\quad t\in\left(0,T\right). \tag{2.1}$$

证明 根据(1.2)的第一个方程，知：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\mathrm{d}x=r\int_\Omega u\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^k\mathrm{d}x,\quad t\in\left(0,T\right),$$

由 Hölder 不等式有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\mathrm{d}x\le r\int_\Omega u\mathrm{d}x-\frac{\mu}{\left|\Omega\right|^{k-1}}\left(\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)^k=:L_1,\quad t\in\left(0,T\right).$$

应用伯努利不等式(参见[[6], Lemma 2.2)得(2.1)。

3. 主要结果

引理 3.1 设 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 为光滑有界凸域， $\mu,\chi>0$， $k>1$， $r\in\mathbb{R}$。若 $\chi\le\frac{4}{n}$ 时，存在一个无关于时间 t 的常数 $L_1>0$，使得

$$\left\|\frac{u}{v}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|\nabla\log v\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le L_2\mathrm{e}^{2t},\quad t\in\left(0,T\right). \tag{3.1}$$

证明 由系统(1.2)的第一个方程，有

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\Delta u}{v}-\frac{\chi}{v}\nabla\cdot(u\nabla\log v)+(r+1)\left(\frac{u}{v}\right)-\mu\left(\frac{u^k}{v}\right)-\frac{u\Delta v}{v^2}-\left(\frac{u}{v}\right)^2 \\
&= \frac{\Delta v}{v}-\frac{u\Delta v}{v^2}-\chi\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\nabla\log v-\chi\left(\frac{u}{v}\right)|\nabla\log v|^2-\chi\left(\frac{u}{v}\right)\Delta\log v \\
&\quad +(r+1)\left(\frac{u}{v}\right)-\mu\left(\frac{u^k}{v}\right)-\left(\frac{u}{v}\right)^2 \\
&= \Delta\left(\frac{u}{v}\right)+2\left(\frac{\nabla u}{v}\right)\nabla\log v-(2+\chi)\left(\frac{u}{v}\right)|\nabla\log v|^2-\chi\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\nabla\log v \\
&\quad -\chi\left(\frac{u}{v}\right)\Delta\log v+(r+1)\left(\frac{u}{v}\right)-\mu\frac{u^k}{v}-\left(\frac{u}{v}\right)^2 \\
&= \Delta\left(\frac{u}{v}\right)+(2-\chi)\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\nabla\log v-\chi\left(\frac{u}{v}\right)|\nabla\log v|^2-\chi\left(\frac{u}{v}\right)\Delta\log v \\
&\quad +(r+1)\left(\frac{u}{v}\right)-\mu\left(\frac{u^k}{v}\right)-\left(\frac{u}{v}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

由系统(1.2)的第二个方程，利用等式 $\nabla\omega\cdot\nabla\Delta\omega=\frac{1}{2}\Delta|\nabla\omega|^2-|D^2\omega|^2$ 可得

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(|\nabla\log v|^2\right) &= 2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{\Delta v}{v}\right)+2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{u}{v}\right) \\
&= 2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{\Delta v}{v}-\left(\frac{\nabla v}{v}\right)^2\right)+2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{\nabla v}{v}\right)^2+2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{u}{v}\right) \\
&= 2\nabla\log v\cdot\nabla\Delta\log v+2\nabla\log v\cdot\nabla|\nabla\log v|^2+2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{u}{v}\right) \\
&= \Delta|\nabla\log v|^2-2|D^2\log v|^2+2\nabla\log v\cdot\nabla|\nabla\log v|^2+2\nabla\log v\cdot\nabla\left(\frac{u}{v}\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

令 $z=\frac{u}{v}+\frac{\chi}{2}|\nabla\log v|^2$，由于 $\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial\nu}=0$ 可以得到在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial z}{\partial\nu}\le 0$。将(3.2)与 $\frac{\chi}{2}$ (3.3)相加并移项有：

$$\partial_t z-\Delta z-2\nabla z\cdot\nabla\log v+\chi\left(\frac{u}{v}\right)|\nabla\log v|^2+\chi|D^2\log v|^2+\mu\left(\frac{u^k}{v}\right)+\left(\frac{u}{v}\right)^2=-\chi\left(\frac{u}{v}\right)\Delta\log v+(r+1)\left(\frac{u}{v}\right).$$

对上式右边的第一项应用 Young 不等式，由不等式 $|\Delta\omega|\le\sqrt{n}|D^2\omega|\left(\omega\in C^2(\bar{\Omega})\right)$ 得

$$-\chi\left(\frac{u}{v}\right)\Delta\log v\le\chi|D^2\log v|+\left(\frac{u}{v}\right)^2-\left(1-\frac{n\chi}{4}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

经分析可得：当 $\chi\le\frac{4}{n}$ 时，有 $\left(1-\frac{n\chi}{4}\right)\ge 0$。此外，利用 u,v 的正性，结合(1.4)与引理 2.2 有：

$$\begin{aligned}
\partial_t z-\Delta z-2\nabla z\cdot\nabla\log v &\le (r+1)\left(\frac{u}{v}\right) \\
&\le (r+1)C_1\cdot\frac{e^t}{\inf\limits_{x\in\Omega}v_0} \\
&\le C_2e^t,\ t\in(0,T)
\end{aligned}$$

其中 $C_2=\dfrac{(r+1)C_2}{\inf\limits_{x\in\Omega} v_0}>0$。接下来，令 $Z=z-C_2\mathrm{e}^t$，则有：

$$\partial_t Z-\Delta Z-2\nabla Z\cdot\nabla\log v\le 0.$$

由于在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial z}{\partial \nu}\le 0$，对上式应用极值原理得：

$$\|Z(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|Z(\cdot,0)\|_{L^\infty(\Omega)},\quad t\in(0,T).$$

因此得到了(3.1)。

接下来，我们给出当 $\chi\le\dfrac{4}{n}$ 时，u 在时间上的有界估计。

引理 3.2 设 $\mu,\chi>0$，$k>1$，$r\in\mathbb{R}$。若 $\chi\le\dfrac{4}{n}$，则存在无关于时间 t 的常数 $L_3>0$，使得

$$\sup_{t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\sup_{t\le T}\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le L_3\mathrm{e}^{CT}+C,\quad t\in(0,T).$$

证明 由常数变易公式有：

$$u(\cdot,t)=\mathrm{e}^{t(\Delta-1)}u_0-\chi\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\left(\frac{u}{v}\nabla v\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}\left(ru-\mu u^k\right)\mathrm{d}s,\quad t\in(0,T).$$

根据 Neumann 热半群理论(参考[8], Lemma 2.1)，对于 $p>n$ 有：

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}&\le\left\|\mathrm{e}^{t(\Delta-1)}u_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\chi\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\left(\frac{u}{v}\nabla v\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s+\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}\left(ru-\mu u^k\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le C_3\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+K_4\chi\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\left\|\frac{u}{v}\nabla v\right\|_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}s+C_4.\end{aligned}\tag{3.4}$$

应用 Young 不等式、插值不等式、引理 2.2 和引理 3.1，对于(3.4)式右边的第二项有：

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\left\|\frac{u}{v}\nabla v\right\|_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u\nabla\log v(s)\|_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u(s)\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\log v(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u(s)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac1p}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac1p}\|\nabla\log v(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le L_1^{\frac1p}L_2\mathrm{e}^t\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac12-\frac{n}{2p}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac1p}\mathrm{d}s\\&\le C_5\mathrm{e}^t\sup_{s\le t}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac1p},\end{aligned}$$

其中 $C_5=L_1^{\frac1p}L_2>0$，将上式带入(3.4)式中，应用 Young 不等式，取 $t\in(0,T)$ 的极值，可得：

$$\sup_{t\le T}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_5\mathrm{e}^T\sup_{t\le T}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac1p}+C_6\le L_3\mathrm{e}^{CT}+C_6,\quad t\in(0,T)\tag{3.5}$$

其中 $C_6>0$。

由常数变易公式有：

$$\left\|v(\cdot,t)\right\| \le \mathrm{e}^{t(\Delta-1)}v_0+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}u\mathrm{d}s,\quad t\in(0,T).$$

根据 Neumann 热半群理论和 $W^{1,q}(\Omega)$ 的定义，由引理 3.2，对于 $q>1$ 有：

$$\begin{aligned}\|v\|_{W^{1,q}(\Omega)} &\le \left\|\mathrm{e}^{t(\Delta-1)}v_0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}+\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}u(s)\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}\mathrm{d}s\\ &\le C_7\|v_0\|_{W^{1,q}(\Omega)}+K_2\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\|u(s)\|_{L^q(\Omega)}\mathrm{d}s\\ &\le C_8+K_2\int_0^t\left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-(t-s)}\mathrm{d}s\cdot\sup_{s\le t}\|u(s)\|_{L^q(\Omega)}\\ &\le C_8+L_4\mathrm{e}^{ct},\quad t\in(0,T)\end{aligned}$$

其中 $C_7,C_8>0$ 结合上式，取 $t\in(0,T)$ 的极值有

$$\sup_{t\le T_{\max}}\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le L_3\mathrm{e}^{CT}+C_8,\quad t\in(0,T_{\max}) \tag{3.6}$$

结合(3.5)与(3.6)可得

$$\sup_{t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\sup_{t\le T}\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le L_3\mathrm{e}^{CT}+C,\quad t\in(0,T).$$

其中 $C>0$。

证毕。

接下来证明主要结论，应用反证法来证明系统(1.2)古典解的整体存在性。

定理 1.1 证明

假设 $T_{\max}<\infty$，则设 $t\le T\le T_{\max}<\infty$。则由引理 3.2 可得：

$$\sup_{t\le T_{\max}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\sup_{t\le T_{\max}}\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le L_3\mathrm{e}^{CT}+C<\infty,\quad t\in(0,T_{\max}).$$

上式显然矛盾于引理 2.1，故假设不成立，因此有 $T_{\max}=\infty$。从而系统(1.2)存在一个唯一的全局古典解。

证毕。

4. 论文意义与展望

趋化系统简单而又直观的刻画了生物的趋化现象，通过研究模型解的性质，从而了解物质运动的客观规律，具备了较强的现实意义。关于带 Logistic 源的奇性敏感的生物趋化模型，关于解的行为的研究(如整体有界性)还有待进一步完善。

参考文献

[1] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[2] Fujie, K. (2015) Boundedness in a Fully Parabolic Chemotaxis System with Singular Sensitivity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **424**, 675-684. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.11.045

[3] Stinner, C. and Winkler, M. (2011) Global Weak Solutions in a Chemotaxis System with Large Singular Sensitivity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 3727-3740. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.07.006

[4] Lankeit, J. and Winkler, M. (2017) A Generalized Solution Concept for the Keller-Segel System with Logarithmic Sensitivity: Global Solvability for Large Nonradial Data. *Nonlinear Differential Equations and Applications Nonlinear Differential Equations & Applications NoDEA*, **24**, Article No. 49. https://doi.org/10.1007/s00030-017-0472-8

[5] Zhao, X. and Zheng, S. (2016) Global Boundedness to a Chemotaxis System with Singular Sensitivity and Logistic Source. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **68**, Article No. 2. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0749-5

[6] Zhao, X. (2022) Boundedness to a Parabolic-Parabolic Singular Chemotaxis System with Logistic Source. *Journal of Differential Equations*, **338**, 388-414. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.08.003

[7] Lankeit, E. and Lankeit, J. (2019) Classical Solutions to a Logistic Chemotaxis Model with Singular Sensitivity and Signal Absorption. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **46**, 421-445. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.09.012

[8] Cao, X. and Lankeit, J. (2016) Global Classical Small-Data Solutions for a Three-Dimensional Chemotaxis Navier–stokes System Involving Matrix-Valued Sensitivities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, Article No. 107. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1027-2