Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(10), 46-54
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1410343

Hans汉斯

三维可压缩向列型液晶系统解的衰减率的改进

尤金凤，陈　菲*

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2024年9月5日；录用日期：2024年10月3日；发布日期：2024年10月12日

摘　要

本文的主要目的在于提高三维可压缩向列型液晶系统解的最高阶(*S*阶)空间导数的衰减率。如果初值的 $H^S\left(S\geq 3\right)$ 和 $\dot{H}^{-\alpha}\left(0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}\right)$ 范数都是有界的，并且其 H^3 范数足够小，则应用纯能量法，我们给出了解的最高阶空间导数 L^2 范数的最优衰减率为 $\left(1+t\right)^{-\left(\frac{S}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$，而在魏，李和姚的研究中其衰减率仅为 $\left(1+t\right)^{-\left(\frac{S-1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$。

关键词

可压缩向列型液晶系统，纯能量法，衰减率

An Improvement on Decay Rates for Solutions to the 3D System of Compressible Nematic Liquid Crystal

Jinfeng You, Fei Chen*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Sep. 5th, 2024; accepted: Oct. 3rd, 2024; published: Oct. 12th, 2024

Abstract

Abstract: The major objective of this thesis lies in improving the decay rates for the highest order (*S*-order) of spatial derivative of the solutions to the 3D system of compressible nematic liquid

*通讯作者。

文章引用：尤金凤，陈菲．三维可压缩向列型液晶系统解的衰减率的改进[J]．理论数学, 2024, 14(10): 46-54.
DOI: 10.12677/pm.2024.1410343

crystal. If the norms of both $H^S(S\ge 3)$ and $\dot{H}^{-\alpha}\left(0\le\alpha\le\frac{1}{2}\right)$ for the initial value are bounded, as well as the norm of H^3 for that is small enough, with applying pure energy method, we give that the optimal decay rates for the highest order of spatial derivative of the solutions in norm of L^2 are $(1+t)^{-\left(\frac{S}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$, while that is just $(1+t)^{-\left(\frac{S-1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$ in Wei, Li and Yao's study.

Keywords

System of Compressible Nematic Liquid Crystal, Pure Energy Method, Decay Rates

1. 引言

液晶是一种介于液体和固体之间的物质。当固体熔化时，如果能量增加足以改变位置序，但分子的形状又可以阻止取向序的立即崩溃，就会形成液晶。液晶既像液体一样具有流动性，又像固体一样各向异性，这两大关键属性使得液晶主要应用于可切换显示和光电器件等。特别地，液晶的研究和制造技术对显示器的质量和性能有着重要的影响。此外，液晶材料在生物医学、光学、热控制等领域有广泛的应用前景。而向列型又是液晶中常见的一种类型，向列型液晶是具有相同取向顺序的分子的聚集体，由细长的棒状分子组成。

本文，我们将深入研究如下三维可压缩向列型液晶系统([1])：

$$\begin{cases}\phi_t+\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{r})=0,\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\(\phi\boldsymbol{r})_t+\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})-\beta_1\Delta\boldsymbol{r}-(\beta_1+\beta_2)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\nabla P(\phi)=-\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h},\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3,\\\boldsymbol{h}_t+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{h}-\Delta\boldsymbol{h}+g(\boldsymbol{h})=0,\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3\\(\phi,\boldsymbol{r},\boldsymbol{h})(0,x)=(\phi_0,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{h}_0)(x),\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$x=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{r},\phi,\boldsymbol{h}$ 分别为流体速度，流体密度和分子排列方向场。压力 $P=P(\phi)$ 是 $\tilde{\phi}$ 的某邻域内的光滑函数，其中当 $\tilde{\phi}>0$ 时，$P'(\tilde{\phi})>0$。$g(\boldsymbol{h})=\frac{1}{\epsilon^2}\left(|\boldsymbol{h}|^2-1\right)\boldsymbol{h}$ (ϵ 为常数)。β_1 和 β_2 表示流体的剪切粘性系数和体积粘性系数，满足 $\beta_1>0$ 和 $\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2\ge 0$。由于 $\tilde{\phi}$ 是一个正常数，为简单起见，设 $\tilde{\phi}=1$。初始方向场满足 $|\boldsymbol{h}_0(x)|=1$，并且 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\boldsymbol{h}_0(x)=\varpi_0$，其中 ϖ_0 是一个固定向量满足 $|\varpi_0|=1$。

在 20 世纪 60 年代，Ericksen [2]和 Leslie [3]建立了向列型液晶系统。向列型液晶系统是 Navier-Stokes 方程组与调和映照热流的强耦合，为描述分子构型中缺陷在流速影响下的运动提供了一个工具。当在稳态附近给定一个小扰动时，系统解的衰减率有效刻画了随着时间的增加，系统的解将以多快的速度衰减到稳态。因此，本文将致力于改进向列型液晶系统解的衰减率。以下我们仅介绍与本文相关的一些结果。对于三维不可压缩系统，Dai，Qing 和 Schonbek [4]利用基本能量估计和 Ladyzhenskaya 能量估计得到 $\|\boldsymbol{r}\|_{L^2}$ 和 $\|\nabla(\boldsymbol{h}-\varpi_0)\|_{L^2}$ 的衰减估计分别是 $(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ 和 $(1+t)^{-\frac{3}{8}}$。接下来，Dai 和 Schonbek [5]研究了

$H^m(m\ge 0)$ 的最优衰减率。特别是对任意的 $m\ge 0$，他们建立了 $\left\|\nabla^m\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{h}-\varpi_0\right)\right\|_{L^2}$ 衰减率为 $(1+t)^{-\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{4}\right)}$。对于三维可压缩系统，当 $g(\boldsymbol{h})=|\nabla\boldsymbol{h}|^2\boldsymbol{h}$ 时，在 $(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\nabla\boldsymbol{h}_0)$ 属于 $H^S(S\ge 3)$，$\left\|(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\nabla\boldsymbol{h}_0)\right\|_{H^3}\le\varsigma_0$ 以及 $\left\|(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{h}_0-\varpi_0)\right\|_{L^1}$ 和 $\left\|\boldsymbol{h}_0-\varpi_0\right\|_{L^2}$ 有界的情况下，Gao，Tao 和 Yao [6]用傅里叶分解的方法得到全局解的结论如下：

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla^m(\phi-1,\boldsymbol{r})(t)\right\|_{H^{S-m}}^2\le(1+t)^{-\frac{3+2m}{2}},\quad m=0,1,\cdots,S-1,\\&\left\|\nabla^n(\boldsymbol{h}-\varpi_0)(t)\right\|_{L^2}^2\le(1+t)^{-\frac{3+2n}{2}},\quad n=0,1,\cdots,S+1.\end{aligned}\tag{1.2}$$

在正则度低于 $H^S(S\ge 3)$ 的 H^2 空间中，Xu 等[7]利用谱分析得到了具有小初值的光滑解的存在性。更进一步，在初始值在 L^1 有界的条件下，得到了 $\left\|(\phi-1,\boldsymbol{r},\boldsymbol{h})\right\|_{L^p}$ 和 $\left\|\nabla(\phi-1,\boldsymbol{r})(t)\right\|_{H^1}+\left\|\nabla\boldsymbol{h}(t)\right\|_{H^2}$ 的衰减率分别为

$(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}(2\le p\le 6)$ 和 $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$。为了得到 Navier-Stokes (N-S)方程的最优衰减率，2012 年，Guo 和 Wang [8]利用纯能量方法，用 $\dot{H}^{-\alpha}$ 代替 L^p，克服了“L^p-L^2”方法中随时间演化保持解的 L^p 范数的困难，从而在 $(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0)\in H^S(S\ge 3)\cap\dot{H}^{-\alpha}\left(0\le\alpha<\frac{3}{2}\right)$ 和 $\left\|(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0)\right\|_{H^{[\frac{S}{2}]+2}}\le\varsigma_0$ 的条件下，得到了 N-S 方程解的衰减率：

$$\left\|\nabla^m(\phi-1,\boldsymbol{r})(t)\right\|_{H^{S-m}}^2\le C(1+t)^{-(m+\alpha)},\quad -\alpha<m\le S-1.\tag{1.3}$$

受[8]的方法论的启发，Liu [9]和 Wei，Li 和 Yao [1]将[8]的 N-S 方程的结果推广到液晶系统上来。当 $g(\boldsymbol{h})=|\nabla\boldsymbol{h}|^2\boldsymbol{h}$ 时，假设 $(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0)\in H^S\cap\dot{H}^{-\alpha}$，$\boldsymbol{h}_0-\varpi_0\in H^{S+1}\cap\dot{H}^{-\alpha+1}\left(S\ge 3,0\le\alpha<\frac{3}{2}\right)$ 且 $\left\|(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0)(t)\right\|_{H^3}+\left\|(\boldsymbol{h}_0-\varpi_0)(t)\right\|_{H^4}\le\varsigma_0$，Liu [9]得到

$$\left\|\nabla^m(\phi-1,\boldsymbol{r})(t)\right\|_{H^{S-m}}+\left\|\nabla^m(\boldsymbol{h}-\varpi_0)(t)\right\|_{H^{S-m+1}}\le C(1+t)^{-\frac{m+\alpha}{2}},\quad -\alpha<m\le S-1.\tag{1.4}$$

此外，Liu [10]还研究了 Besov 空间中的衰减率。假设 $(\phi_0-1)\in\tilde{B}^{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\cap\dot{B}_{2,\infty}^{-\mu}$，$\boldsymbol{r}_0\in\dot{B}^{\frac{1}{2}}\cap\dot{B}_{2,\infty}^{-\mu}$，$(\boldsymbol{h}_0-\varpi_0)\in\tilde{B}^{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\cap\dot{B}_{2,\infty}^{-\mu+1}$ 和 $\left\|(\phi_0-1,\boldsymbol{h}_0-\varpi_0)\right\|_{\tilde{B}^{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}}+\left\|\boldsymbol{r}_0\right\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2}}}\le\varsigma_0$，Liu [10]得到了如下的衰减结果：

$$\left\|\left(\phi-1,\boldsymbol{r},\nabla(\boldsymbol{h}-\varpi_0)\right)(t)\right\|_{\dot{B}^m}^2\le C(1+t)^{-(m+\mu)}.\tag{1.5}$$

这里 $-\mu<m\le\frac{1}{2}$。当 $g(\boldsymbol{h})=\frac{1}{\epsilon^2}\left(|\boldsymbol{h}|^2-\boldsymbol{1}\right)\boldsymbol{h}$，将[9]中的条件 $0\le\alpha<\frac{3}{2}$ 限制为 $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$ 时，Wei，Li 和 Yao [1]得出衰减率：

$$\left\|\nabla^m(\phi-1,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})(t)\right\|_{H^{S-m}}\le C(1+t)^{-\frac{m+\alpha}{2}},\quad m=0,1,\cdots,S-1.\tag{1.6}$$

很容易发现，在[9]和[1]中解的最高阶(S 阶)空间导数的衰减率仅与次高阶(S-1 阶)的衰减率相同，这并不是最优的。后来，在[8]的基础上，为了提高 N-S 方程解最高阶空间导数的衰减率，Gao，Li 和 Yao [11]不再利用动量方程引起的密度耗散，而是进一步采用加权能量法得到，即

$$\left\|\nabla^S(\phi-1,\boldsymbol{r})(t)\right\|_{L^2}^2\le C(1+t)^{-(S+\alpha)},\tag{1.7}$$

这优化了[8]中的结果。

受[8]和[11]的启发，本文的创新是利用加权能量法来提高系统(1.1)的解的最高阶空间导数的衰减率，从而克服[1]利用纯能量方法得到解的最高阶(S 阶)和次高阶(S-1 阶)空间导数的衰减率相同的问题。在本文中，我们在[1]的基础上考虑了 $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$ 的情况。对于[9]和[1]中 $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$ 的情况，可以通过与本文中类似的方法得到相应的结论。

我们先介绍下面这个定理，它在后面的部分起着至关重要的作用。

定理 1.1：([1])假设 $(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{h}_0-\varpi_0)\in H^S\times H^S\times H^{S+1}(S\ge3)$，若存在一个固定向量 ϖ_0 和一个常数 $\varsigma_0>0$，使得

$$\|\phi_0-1\|_{H^3}+\|\boldsymbol{r}_0\|_{H^3}+\|\boldsymbol{h}_0-\varpi_0\|_{H^4}\le\varsigma_0,\tag{1.8}$$

则对于所有的 $t\ge0$，系统(1.1)存在一个全局解 $(\phi,\boldsymbol{r},\boldsymbol{h})(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&\|(\phi-1,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})(t)\|_{H^S}^2+C\int_0^t\left(\|\nabla(\phi-1)(\tau)\|_{H^{S-1}}^2+\|(\nabla\boldsymbol{r},\nabla\nabla\boldsymbol{h})(\tau)\|_{H^S}^2\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\|(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\nabla\boldsymbol{h}_0)\|_{H^S}^2.\end{aligned}\tag{1.9}$$

若进一步要求 $(\phi_0-1,\boldsymbol{r}_0,\nabla\boldsymbol{h}_0)\in\dot{H}^{-\alpha}\left(0\le\alpha\le\frac{1}{2}\right)$，则对任意时间 $t\ge0$，可得

$$\|\phi(t)-1\|_{\dot{H}^{-\alpha}}^2+\|\boldsymbol{r}(t)\|_{\dot{H}^{-\alpha}}^2+\|\nabla\boldsymbol{h}(t)\|_{\dot{H}^{-\alpha}}^2\le C_0\tag{1.10}$$

和

$$\|\nabla^j(\phi-1,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})(t)\|_{H^{S-j}}^2\le C_0(1+t)^{-(j+\alpha)},\quad j=0,1,\cdots,S-1.\tag{1.11}$$

本文的主要结论如下：

定理 1.2：若定理 1.1 的条件满足，则有如下的衰减率：

$$\|\nabla^S(\phi-1,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})(t)\|_{L^2}^2\le C(1+t)^{-(S+\alpha)}\tag{1.12}$$

注 1：与 N-S 方程相比，该系统中不仅由液晶分子方向场方程的出现增加了计算复杂度，还需要克服项 $\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}$ 引起的困难。

注 2：与[1]相比，本文提高了系统(1.1)解的 S 阶空间导数的 L^2 范数的衰减率，从 $(1+t)^{-(S-1+\alpha)}$ 改进到 $(1+t)^{-(S+\alpha)}$。

注 3：对于本文中 $g(\boldsymbol{h})=\frac{1}{\epsilon^2}\left(|\boldsymbol{h}|^2-\boldsymbol{1}\right)\boldsymbol{h}\left(\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}\right)$ 和 $g(\boldsymbol{h})=|\nabla\boldsymbol{h}|^2\boldsymbol{h}\left(0\le\alpha<\frac{3}{2}\right)$ 的情况，通过使用类似于本文的过程，也可以得到与定理 1.2 中相同的结果。

本文剩余部分内容如下：在第二节中，我们展示了一些符号，重写了系统(1.1)，并给出了一些必要的不等式；在第 3 节中，我们首先建立引理 3.1 中解的空间导数 S 阶的加权时间可积性，这是引理 3.2 的预备引理，然后我们给出了引理 3.2，从而完成了定理 1.2 的证明。

2. 准备工作

首先，我们介绍了一些符号解释，然后将系统(1.1)重新写为(2.1)和(2.2)。最后我们引入一些不等式，这些不等式将在本文后面的证明中广泛使用。

定义：为了方便起见，我们使用符号 $y\lesssim x$ 表示 $y\le Cx$，其中 $C>0$ 是一个与时间 t 无关的常数，而 C 在不同的地方可能为不同的正数。用 C_0 和 C_ε 分别用于强调对初始值和 ε 的依赖。 $y\sim x$ 表示存在某个

正常数 C_1 使得 $C_1 x \le y \le \frac{1}{C_1} x$。$L^p\left(\mathbb{R}^3\right)(1\le p<\infty)$，$H^q\left(\mathbb{R}^3\right)(q\in R)$ 和 $\dot{H}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)(\alpha\in R)$ 分别表示范数为 $\|\cdot\|_{L^p}$ 的勒贝格空间、范数为 $\|\cdot\|_{L^p}$ 的索伯列夫空间和范数为 $\|\cdot\|_{\dot{H}^\alpha}$ $\left(\|n\|_{\dot{H}^\alpha}=\left\|\nabla^\alpha n\right\|_{L^2}\right)$ 的齐次索伯列夫空间。此外，我们定义 $\|(n,m)\|_Z \overset{\text{def}}{=} \|n\|_Z+\|m\|_Z$。

定义 $\varphi=\phi-1$，系统(1.1)可表述为：

$$\begin{cases}\varphi_t+\operatorname{div}\boldsymbol{r}=B_1,\\ \boldsymbol{r}_t-\beta_1\Delta\boldsymbol{r}-\left(\beta_1+\beta_2\right)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\nabla\varphi=B_2,\\ \boldsymbol{h}_t-\Delta\boldsymbol{h}=B_3,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中，

$$\begin{cases}B_1=-\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi,\\ B_2=-\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{r}-f_2(\varphi)\left[\beta_1\Delta\boldsymbol{r}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{r}\right]-f_3(\varphi)\nabla\varphi-f_1(\varphi)(\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}),\\ B_3=-\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{h}-g(\boldsymbol{h}),\end{cases} \tag{2.2}$$

和

$$f_1(\varphi)=\frac{1}{\varphi+1},\quad f_2(\varphi)=\frac{\varphi}{\varphi+1},\quad f_3(\varphi)=\frac{P'(\varphi+1)}{\varphi+1}-1. \tag{2.3}$$

在定理 1.2 的条件下，根据[1]中的(2.1)和(3.12)，可以得出，对于正常数 $\varsigma\ll 1$，

$$\|\varphi(t)\|_{H^3}+\|\boldsymbol{r}(t)\|_{H^3}+\left\|\left(\boldsymbol{h}-\varpi_0\right)(t)\right\|_{H^4}\le\varsigma. \tag{2.4}$$

通过结合(2.4)和 Sobolev 不等式，很容易得出

$$\left\|\left(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\left(\boldsymbol{h}-\varpi_0\right)\right)(t)\right\|_{L^\infty}\le\varsigma. \tag{2.5}$$

然后，对于任何常数 $m\ge 1$，可以通过[1]中的(2.3)和本文(2.5)得到

$$\left|f_1(\varphi)\right|\le C,\left|f_2(\varphi)\right|\le C|\varphi|,\left|f_3(\varphi)\right|\le C|\varphi|,\left|f_1^{(m)}(\varphi)\right|\le C,\left|f_2^{(m)}(\varphi)\right|\le C,\left|f_3^{(m)}(\varphi)\right|\le C. \tag{2.6}$$

引理 2.1： 如果 $\|\varphi\|_{L^\infty}\le 1$，$2\le p\le\infty$，函数 $f(\varphi)$ 是光滑的，并且其余各阶导数都是有界的，那么对于任意正整数 n，可得

$$\left\|\nabla^n f(\varphi)\right\|_{L^p}\lesssim\left\|\nabla^n\varphi\right\|_{L^p}. \tag{2.7}$$

因为证明类似于[12]中的引理 A.2，所以这里省略了证明过程。

引理 2.2： ([13])整数 $n>0$，定义运算：

$$\left[\nabla^n,\alpha_1\right]\alpha_2=\nabla^n\left(\alpha_1\alpha_2\right)-\alpha_1\nabla^n\alpha_2, \tag{2.8}$$

则有

$$\left\|\left[\nabla^n,\alpha_1\right]\alpha_2\right\|_{L^p}\lesssim\left\|\nabla\alpha_1\right\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^{n-1}\alpha_2\right\|_{L^{p_2}}+\left\|\alpha_2\right\|_{L^{p_3}}\left\|\nabla^n\alpha_1\right\|_{L^{p_4}}. \tag{2.9}$$

当 $n\ge 0$ 时，有

$$\left\|\nabla^n\left(\alpha_1\alpha_2\right)\right\|_{L^p}\lesssim\left\|\alpha_1\right\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^n\alpha_2\right\|_{L^{p_2}}+\left\|\alpha_2\right\|_{L^{p_3}}\left\|\nabla^n\alpha_1\right\|_{L^{p_4}}, \tag{2.10}$$

这里 $p_2,p_4,p\in(1,+\infty)$ 并且满足 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}$。

引理 2.3：([14])若 $0\le n,\xi\le\chi$，则有

$$\left\|\nabla^{\xi}h\right\|_{L^p}\lesssim\left\|\nabla^{\chi}h\right\|_{L^2}^{\vartheta}\left\|\nabla^{n}h\right\|_{L^2}^{1-\vartheta},\tag{2.11}$$

其中 $\vartheta\in[0,1]$ 和 ξ 满足

$$\frac{1}{p}-\frac{\xi}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\chi}{3}\right)\vartheta+\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{3}\right)(1-\vartheta).$$

当 $p=\infty$ 时，需要 $0<\vartheta<1, n\le\xi+1$ 和 $\chi\ge\xi+2$。

3. 定理 1.2 的证明

现在，根据定理 1.1 的(1.11)，首先提供 $(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})$ 的 S 阶空间导数时间可积性的预备引理 3.1。

引理 3.1：对于任意固定常数 $0<\lambda<1$，根据定理 1.1，可得

$$(1+t)^{S+\alpha+\lambda-1}\left\|\nabla^{S-1}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2+C\int_0^t(1+\tau)^{S+\alpha+\lambda-1}\left(\left\|\nabla^{S}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2+\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau\lesssim(1+t)^{\lambda}.\tag{3.1}$$

证明：在[1]中的不等式(2.4)，(2.43)和(2.87)中取 $k=S-1$，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^{S-1}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^{S}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\lesssim\varsigma\left\|\nabla^{S}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2,\tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^{S}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\lesssim\varsigma\left(\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\right),\tag{3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^3}\nabla^{S-1}\boldsymbol{r}\cdot\nabla^{S}\varphi\mathrm{d}x+C\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2\lesssim\left\|\nabla^{S}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2.\tag{3.4}$$

将(3.4)乘以常数 δ (足够小)的结果加到(3.2)和(3.4)，另外，考虑 ς 的小性，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)+C\left(\left\|\nabla^{S}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2+\delta\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2\right)\le 0,\tag{3.5}$$

其中 $A(t)$ 表示为

$$A(t)=\underbrace{\left\|\nabla^{S-1}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2}_{A_1(t)}+\underbrace{\delta\int_{R^3}\nabla^{S-1}\boldsymbol{r}\cdot\nabla^{S}\varphi\mathrm{d}x}_{A_2(t)}\overset{\mathrm{def}}{=}A_1(t)+A_2(t).\tag{3.6}$$

基于 δ 足够小，很明显

$$A(t)\backsim A_1(t)=\left\|\nabla^{S-1}(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2.\tag{3.7}$$

对于固定常数 $\lambda\in(0,1)$，将(3.5)乘以 $(1+t)^{S+\lambda+\alpha-1}$，并使用(3.7)和(1.11)，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1+t)^{S+\lambda+\alpha-1}A(t)\right]+C(1+t)^{S+\lambda+\alpha-1}\left(\left\|\nabla^{S}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2+\delta\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2\right)\\&\lesssim(1+t)^{S+\lambda+\alpha-2}A(t)\\&\lesssim(1+t)^{\lambda-1}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

对(3.8)在 $[0,t]$ 上进行积分，推导出

$$\begin{aligned}&(1+t)^{S+\lambda+\alpha-1}A(t)+C\int_0^t(1+\tau)^{S+\lambda+\alpha-1}\left(\left\|\nabla^{S}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{H^1}^2+\delta\left\|\nabla^{S}\varphi\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_0^t(1+\tau)^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau+A(0)\\&\lesssim(1+t)^{\lambda}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

将(3.9)和(3.7)结合起来，得到(3.1)。

接下来，我们将利用引理 3.1 中耗散项的 S 阶空间导数的加权时间可积性来构造解的 S 阶空间导数的衰减率。

引理 3.2：根据定理 1.1，对于 $0<\lambda<1$，我们得到

$$(1+t)^{S+\alpha}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C(1+t)^{-\lambda}\int_0^t(1+\tau)^{S+\lambda+\alpha}\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le C. \tag{3.10}$$

证明：将 ∇^S 作用到(2.1)-1 和(2.1)-2，∇^{S+1} 作用到(2.1)-3，然后分别乘以 $\nabla^S\varphi$、$\nabla^S\boldsymbol{r}$ 和 $\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}$。通过将它们相加并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+\beta_1\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}^2+(\beta_1+\beta_2)\left\|\nabla^S\mathrm{div}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^{S+1}\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^2\\&=\int_{R^3}\nabla^S B_1\cdot\nabla^S\varphi\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla^S B_2\cdot\nabla^S\boldsymbol{r}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla^{S+1}B_3\cdot\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}\mathrm{d}x\\&\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^3 E_i.\end{aligned} \tag{3.11}$$

根据(2.2)-1 和[11]中的(4.17)和(4.18)，我们得出

$$E_1\le\varepsilon\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r})\right\|_{L^2}^2. \tag{3.12}$$

对于 E_2，通过使用分部积分和(2.2)-2，我们很容易得到

$$\begin{aligned}E_2&=\int_{R^3}\nabla^{S-1}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{r})\cdot\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla^{S-1}\left[f_2(\varphi)\left(\beta_1\Delta\boldsymbol{r}+(\beta_1+\beta_2)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{r}\right)\right]\cdot\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{R^3}\nabla^{S-1}\left(f_3(\varphi)\nabla\varphi\right)\cdot\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla^{S-1}\left(f_1(\varphi)\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}\right)\cdot\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\mathrm{d}x\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^4 E_{2i}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

根据[11]中的(4.20)~(4.24)和(4.26)，可得

$$E_{21}+E_{22}+E_{23}\le(\varepsilon+\varsigma)\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(1+\alpha)}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r})\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(S+2\alpha+1)}. \tag{3.14}$$

根据 Holder 不等式，(2.10)、(2.6)、(2.7)、(2.11)、带 ε 的 Young 不等式和(2.4)，可得

$$\begin{aligned}E_{24}&\lesssim\left\|\nabla^{S-1}\left(f_1(\varphi)\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\nabla^{S-1}\left(f_1(\varphi)\right)\right\|_{L^6}\left\|\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^3}\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}+\left\|f_1(\varphi)\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{S-1}(\Delta\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\nabla^{S-1}\left(f_1(\varphi)\right)\right\|_{L^6}\left\|\Delta\boldsymbol{h}\right\|_{L^3}\left\|\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\\&\quad+\left(\left\|f_1(\varphi)\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{S-1}\Delta\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^3}+\left\|f_1(\varphi)\right\|_{L^\infty}\left\|\Delta\boldsymbol{h}\right\|_{L^3}\left\|\nabla^{S-1}\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\right)\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\nabla^S\varphi\right\|_{L^2}\left\|\nabla^2\boldsymbol{h}\right\|_{H^1}^2\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}+\left(\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\left\|\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{H^1}+\left\|\nabla^2\boldsymbol{h}\right\|_{H^1}\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\\&\le(\varepsilon+\varsigma)\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(1+\alpha)}\left\|\nabla^S(\varphi,\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

从(3.13)~(3.15)推断出

$$E_2\le(\varepsilon+\varsigma)\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(1+\alpha)}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(S+2\alpha+1)}. \tag{3.16}$$

对于 E_3，通过(2.2)-3 和分部积分知

$$E_3=\int_{R^3}\nabla^S(\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{h})\cdot\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\nabla^S\left(g(\boldsymbol{h})\right)\cdot\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\mathrm{d}x\overset{\mathrm{def}}{=}E_{31}+E_{32}. \tag{3.17}$$

借助 Holder 不等式，(2.10)，(2.11)，带 ε 的 Young 不等式和(1.11)，可知

$$\begin{aligned}E_{31} &\lesssim \left(\left\|\nabla^S \boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\left\|\nabla \boldsymbol{h}\right\|_{L^\infty}+\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\left\|\boldsymbol{r}\right\|_{L^\infty}\right)\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left(\left\|\nabla^S \boldsymbol{r}\right\|_{L^2}\left\|\nabla^2 \boldsymbol{h}\right\|_{H^1}+\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\left\|\nabla\boldsymbol{r}\right\|_{H^1}\right)\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\le \varepsilon\left\|\nabla^{S+1}\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(1+\alpha)}\left\|\nabla^S(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.18}$$

考虑 $g(h)$ 和 $|\varpi_0|=1$ 的表达式，此外，使用 Holder 不等式，(2.10)，(2.11)和(2.4)，有

$$\begin{aligned}E_{32} &= \frac{1}{\epsilon^2}\int_{R^3}\nabla^S\left[\left(|\boldsymbol{h}|^2-1\right)\boldsymbol{h}\right]\cdot\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\int_{R^3}\nabla^S\left[(\boldsymbol{h}-\varpi_0)(\boldsymbol{h}+\varpi_0)\boldsymbol{h}\right]\cdot\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\,\mathrm{d}x\\ &\lesssim \left\|\nabla^S\left[(\boldsymbol{h}-\varpi_0)(\boldsymbol{h}+\varpi_0)\boldsymbol{h}\right]\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left\|\nabla^S\left[(\boldsymbol{h}-\varpi_0)(\boldsymbol{h}+\varpi_0)\right]\right\|_{L^3}\left\|\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^S\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}+\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left\|\nabla^S(\boldsymbol{h}-\varpi_0)\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}+\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^S(\boldsymbol{h}+\varpi_0)\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\quad+\left\|\nabla^S\boldsymbol{h}\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\boldsymbol{h}+\varpi_0\right\|_{L^6}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \varsigma\left\|\nabla^{S+1}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\left\|\nabla(\boldsymbol{h}-\varpi_0)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \varsigma\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^{\frac{S+1}{S+2}}\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^2}^{\frac{1}{S+2}}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{S+2}}\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^2}^{\frac{S+1}{S+2}}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \varsigma\left\|\boldsymbol{h}-\varpi_0\right\|_{L^2}\left\|\nabla^{S+2}\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^2\\ &\lesssim \varsigma\left\|\nabla^{S+1}\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中运用了 $\nabla^k(\boldsymbol{h}-\varpi_0)=\nabla^k(\boldsymbol{h}+\varpi_0)=\nabla^k\boldsymbol{h}$，对于 $\forall k\in N^+$。根据(3.17)~(3.19)，我们得到

$$E_3 \lesssim (\varepsilon+\varsigma)\left\|\nabla^{S+1}\nabla\boldsymbol{h}\right\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(1+t)^{-(1+\alpha)}\left\|\nabla^S(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2. \tag{3.20}$$

将(3.12)，(3.16)和(3.20)代入(3.11)，并借助 ε 和 ς 的小性，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\lesssim(1+t)^{-1}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+(1+t)^{-(S+\alpha+1)}. \tag{3.21}$$

将(3.21)乘以 $(1+t)^{S+\lambda+\alpha}$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1+t)^{S+\lambda+\alpha}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\right]+C(1+t)^{S+\lambda+\alpha}\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\\ &\lesssim(1+t)^{S+\lambda+\alpha-1}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+(1+t)^{\lambda-1}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

将(3.22)从 0 到 t 的积分且使用(3.1)，得到

$$\begin{aligned}&(1+t)^{S+\lambda+\alpha}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2+C\int_0^t(1+\tau)^{S+\lambda+\alpha}\left\|\nabla^{S+1}(\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\\ &\le\left\|\nabla^S(\varphi_0,\boldsymbol{r}_0,\nabla\boldsymbol{h}_0)\right\|_{L^2}^2+C\int_0^t(1+\tau)^{S+\lambda+\alpha-1}\left\|\nabla^S(\varphi,\boldsymbol{r},\nabla\boldsymbol{h})\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+C\int_0^t(1+\tau)^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim(1+t)^\lambda.\end{aligned} \tag{3.23}$$

将(3.23)乘以 $(1+t)^{-\lambda}$，我们最终推导出(3.10)。

借助引理 3.2，我们可以快速推导出定理 1.2。

基金项目

国家自然科学基金(项目编号：12101345)；山东省自然科学基金(项目编号：ZR2021QA017)。

参考文献

[1] Wei, R., Li, Y. and Yao, Z. (2015) Decay of the Nematic Liquid Crystal System. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 452-474. https://doi.org/10.1002/mma.3494

[2] Ericksen, J.L. (1962) Hydrostatic Theory of Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **9**, 371-378. https://doi.org/10.1007/bf00253358

[3] Leslie, F.M. (1968) Some Constitutive Equations for Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **28**, 265-283. https://doi.org/10.1007/bf00251810

[4] Dai, M., Qing, J. and Schonbek, M. (2012) Asymptotic Behavior of Solutions to Liquid Crystal Systems in R^3. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 2138-2164. https://doi.org/10.1080/03605302.2012.729172

[5] Dai, M. and Schonbek, M. (2014) Asymptotic Behavior of Solutions to the Liquid Crystal System in $H^M(\mathbb{R}^3)$. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 3131-3150. https://doi.org/10.1137/120895342

[6] Gao, J., Tao, Q. and Yao, Z. (2016) Long-time Behavior of Solution for the Compressible Nematic Liquid Crystal Flows in R^3. *Journal of Differential Equations*, **261**, 2334-2383. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.04.033

[7] Xu, F., Zhang, X., Wu, Y. and Liu, L. (2017) Global Existence and the Optimal Decay Rates for the Three Dimensional Compressible Nematic Liquid Crystal Flow. *Acta Applicandae Mathematicae*, **150**, 67-80. https://doi.org/10.1007/s10440-017-0094-5

[8] Guo, Y. and Wang, Y. (2012) Decay of Dissipative Equations and Negative Sobolev Spaces. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 2165-2208. https://doi.org/10.1080/03605302.2012.696296

[9] Liu, Q. (2016) On Temporal Decay Estimates for the Compressible Nematic Liquid Crystal Flow In. *Applicable Analysis*, **96**, 897-924. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1165216

[10] Liu, Q. (2018) On Temporal Decay of Solution to the Three-Dimensional Compressible Flow of Nematic Liquid Crystal in Besov Space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 6589-6603. https://doi.org/10.1002/mma.5176

[11] Gao, J., Li, M. and Yao, Z. (2023) Optimal Decay of Compressible Navier-Stokes Equations with or without Potential Force. *Journal of Differential Equations*, **342**, 63-120. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.09.030

[12] Wang, Y. (2012) Decay of the Navier-Stokes-Poisson Equations. *Journal of Differential Equations*, **253**, 273-297. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.03.006

[13] Ju, N. (2004) Existence and Uniqueness of the Solution to the Dissipative 2D Quasi-Geostrophic Equations in the Sobolev Space. *Communications in Mathematical Physics*, **251**, 365-376. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1062-2

[14] Nirenberg, L. (1959) On Elliptic Partial Differential Equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-classe Di Scienze*, **13**, 115-162.