Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 98-103
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411379

Hans汉斯

留数定理在有理分式型不定积分中的应用

张后俊[1*]，刘雨喆[2#]

[1]南京邮电大学理学院，江苏 南京
[2]贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2024年9月23日；录用日期：2024年10月25日；发布日期：2024年11月15日

摘 要

本文结合实例讨论了留数应用于有理分式型不定积分的计算方法，利用此方法证明了一个已知的结论，即任何有理分式型不定积分都具有初等原函数。

关键词

留数定理，有理分式，完全分解，不定积分

Application of Residue Theorem in Rational Fractional Indefinite Integrals

Houjun Zhang[1*], Yuzhe Liu[2#]

[1]College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu
[2]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Sep. 23rd, 2024; accepted: Oct. 25th, 2024; published: Nov. 15th, 2024

Abstract

This article discusses the method of residues applied to the computation of rational fractional indefinite integrals, using this method to prove a known result that any rational fractional indefinite integral has an original function.

Keywords

Residue Theorem, Rational Fractional, Complete Decomposition, Indefinite Integral

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 张后俊, 刘雨喆. 留数定理在有理分式型不定积分中的应用[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 98-103.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411379

1. 引言

留数定理是用于计算复变函数定积分的一个重要定理，且在数学和物理等学科中都有重要的应用，例如文献[1]中利用留数定理来证明余元公式，文献[2]和[3]中利用留数定理处理某些实函数的定积分和某些特殊复函数的积分，文献[4]中利用留数定理处理级数。下面我们复习一下留数的定义：所谓留数，指的是在复平面 $\mathbf{C}$ 上某一点处的留数，用于表示函数在该点处的局部性质。具体地说，如果函数 $f(z)$ 在复平面上的某一点 $z=z_0$ 处有 n 级极点，且在此 n 级极点为中心的圆形区域 $|z-z_0|\le r$ 内亚纯，那么 $f(z)$ 在点 z_0 的留数可以通过计算一个围绕该点的闭合曲线积分得到。即：

$$\oint_{\substack{|z-z_0|=R\\(\forall R\le r)}} f(z)\mathrm{d}z=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\left(=\mathrm{Res}\left(f(z),z=z_0\right)\right)。$$

留数定理经常用于计算定积分和无穷积分[5] [6]，在这篇文章中，我们将探究留数定理一个新的应用：即通过留数定理对有理分式型不定积分进行计算，由此可得，有理分式型的不定积分总有初等原函数。

本文的第一节考虑有理分式的分解，并通过留数定理给出一般分解方法。本文的第二节将提供一些关于有理分式型不定积分计算的实例。

2. 利用留数定理分解有理分式

接下来，我们考虑如何利用留数定理来分解有理分式：即分子和分母都是有理多项式的分式。

2.1. 一般有理分式的分解形式

为了简便起见，本文总假设 $P_l(x)$，$Q_m(x)$ 和 $R_n(x)$ 是实系数多项式，其中下标取值于自然数集 $\mathbf{N}$，用于表示多项式的次数。有理多项式指的是形如 $\dfrac{Q_n(x)}{P_m(x)}$ 的分式，当 $n>m$ 时称此分式为假分式，当 $n\le m$ 时称此分式为真分式。我们知道，在复数域 $\mathbb{C}$ 上，任意次数多项式总可以分解为一次多项式的乘积，即：

$$P_m(x)=A\cdot\prod_{i=1}^{t}(x-x_i)^{a_i}，\quad a_i\in\mathbb{N}^+ \text{ 且 } x_1,\cdots,x_t \text{ 两两不等。}$$

因此，由多项式除法，不难证明有如下分解：

$$\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}=R_{n-m}(x)+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}$$

我们称上式为有理分式 $\dfrac{Q_n(x)}{P_m(x)}$ 的完全分解式。特别地，若 $n\le m$，则取 $R_{n-m}(x)=0$。可见，决定有理分式的完全分解式只需计算所有的常系数 A_{ij}。

2.2. 完全分解式的系数析出

下面给出决定有理分式完全分解式中常系数 A_{ij} 的一般性方法。对每一个 $P_m(x)$ 的根 x_u，完全分解式可以改写为：

$$\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}=\left(R_{n-m}(x)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq u}}^{t}\sum_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\right)+\frac{A_{u1}}{x-x_u}+\frac{A_{u2}}{(x-x_u)^2}+\cdots+\frac{A_{ua_u}}{(x-x_u)^{a_u}} \tag{1}$$

于是，对任意$1\le k\le a_u-1$，有

$$\frac{(x-x_u)^k Q_n(x)}{P_m(x)}=G(x)(x-x_u)^k+\sum_{j_1=1}^{k}A_{uj_1}(x-x_u)^{k-j_1}+\frac{A_{u,k+1}}{x-x_u}+\sum_{j_2=k+2}^{a_u}\frac{A_{uj_2}}{(x-x_u)^{j_2-k}},$$

其中，$G(x)=R_{n-m}(x)+\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq u}}^{t}\sum\limits_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}$。因此，由留数定理，我们有：

$$\begin{aligned}A_{u(k+1)}&=\lim_{r_u\to0^+}\oint_{|z-x_u|=r_u}\frac{(z-x_u)^k Q_n(z)}{P_m(z)}\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left(\frac{(z-x_u)^k Q_n(z)}{P_m(z)},z=x_u\right)\\&=\lim_{z\to x_u}\frac{\mathrm{d}^{a_u-k-1}}{\mathrm{d}z^{a_u-k-1}}(z-x_u)^{a_u-k}\cdot\frac{(z-x_u)^k Q_n(z)}{P_m(z)}=\left[\frac{\mathrm{d}^{a_u-(k+1)}}{\mathrm{d}z^{a_u-(k+1)}}\frac{(z-x_u)^{a_u}Q_n(z)}{P_m(z)}\right]_{z\to x_u}\end{aligned}。$$

综上，对任意$0\le k\le a_u$，有：

$$A_{uk}=\mathrm{Res}\left(\frac{(z-x_u)^{k-1}Q_n(z)}{P_m(z)},z=x_u\right)=\left[\frac{\mathrm{d}^{a_u-k}}{\mathrm{d}z^{a_u-k}}\frac{(z-x_u)^{a_u}Q_n(z)}{P_m(z)}\right]_{z\to x_u}。\tag{2}$$

我们已不难证明下面定理。

定理. 令$\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}$是有理分式，则：

$$\int\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}\mathrm{d}x=\int R_{n-m}(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{t}A_{ij}\ln(x-x_i)+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=2}^{a_i}\frac{A_{ij}}{1-j}(x-x_i)^{1-j}+C,\tag{3}$$

其中，$A_{ij}=\mathrm{Res}\left(\frac{(z-x_i)^{j-1}Q_n(z)}{P_m(z)},z=x_i\right)$是常数；并且，当$n\ge m$时，$R_{n-m}(x)$是某个$n-m$次多项式，否则$R_{n-m}(x)=0$。

证明. 当$k\ne0$且$k\ne a_u$时，被积函数$\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}$可以展开为(1)的形式，其中求和各项系数A_{uk}由(2)给出。逐项积分，即得式(3)。对当$k=0$或者$k=a_u$时，证明类似。

3. 有理分式的不定积分

例 1. 求$\frac{1}{x^n+1}$的完全分解式。特别地，当$n=3$时，计算不定积分$\int\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$。

解：(1) 若n是奇数，则$x^n+1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}+\pi\mathrm{i}}\right)$，所以

$$\frac{1}{x^n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{x-\mathrm{e}^{2k\pi i/n+\pi i}},$$

其中，$A_k=\mathrm{Res}\left(\frac{z-\mathrm{e}^{2k\pi i/n+\pi i}}{z^n+1},z=\mathrm{e}^{2k\pi i/n+\pi i}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-(n-1)(2k\pi i/n+\pi i)}$。

(2) 若 n 是偶数，则 $x^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/n}\right)$ 所以

$$\frac{1}{x^n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{x-\mathrm{e}^{(2k+1)\pi i/n}},$$

其中，$A_k=\operatorname{Res}\left(\frac{z-\mathrm{e}^{(2k+1)\pi i/n}}{z^n+1},z=\mathrm{e}^{(2k+1)\pi i/n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-(2k+1)(n-1)\pi\mathrm{i}/n}$。

(3) 由(1)知，

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{\mathrm{e}^{-4\pi i/3}}{x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}+\frac{\mathrm{e}^{-8\pi i/3}}{x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}}{x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}}{x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}\right)$$

因此，

$$\int\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\right)\right|+\frac{\sqrt{-3}}{2}\ln\left|\frac{x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}{x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}\right)。$$

需要注意的是，最后一个等式我们使用了公式 $\ln\left(\frac{a+b\mathrm{i}}{a-b\mathrm{i}}\right)=\mathrm{i}\arctan\frac{2ab}{a^2-b^2}$。因此，

$$\ln\left|\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\right|=\mathrm{i}\arctan\frac{2\sqrt{3}(2x-1)}{(2x-1)^2-3}.$$

注：更一般地，对任意的正整数 n，我们有

$$\int\frac{1}{x^n+1}\mathrm{d}x=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln\left(x-\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n+\pi\mathrm{i}}\right)}{n\mathrm{e}^{(n-1)(2k\pi\mathrm{i}/n+\pi\mathrm{i})}}+C, & \text{如果}\, n=2m+1;\\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln\left(x-\mathrm{e}^{(2k+1)\pi i/n}\right)}{n\mathrm{e}^{(2k+1)(n-1)\pi i/n}}+C, & \text{如果}\, n=2m.\end{cases}$$

例 2. 计算不定积分 $\int\frac{x+2}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x$。

解. 设

$$\frac{x+2}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A_1}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{A_2}{x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}+\frac{A_3}{x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)},$$

于是 $A_1=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x+2)}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}=1$，类似可得 $A_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$，$A_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$。把 A_1,A_2,A_3 带入得：

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x&=\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\right)\ln\left|x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right|\\&\quad+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\right)\ln\left|x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right|+C\\&=\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{2x(x+1)-1}+C。\end{aligned}$$

4. 总结

利用留数法处理有理分式型不定积分，其本质是通过留数定理来对有理分式进行分拆。该方法有一定的普适性，具体地说，给定有理分式 $\frac{Q_n(x)}{P_m(x)}$，其必定具有式(1)所示的形式，(1)的每个求和项的原函数都是容易计算的，同时也只有常数 A_{ij}，A_{uk} 是未知的。紧接着，利用留数法依次求出所有的 A_{ij} 和 A_{uk}，即可快速得到被积函数的原函数。例如，在例 2 中，被积函数 $\frac{x+2}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}$ 的分母有三个解 $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，和 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，因此可以直接假设其分解式为

$$\frac{A_1}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{A_2}{x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}+\frac{A_3}{x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)},$$

其中 A_1，A_2 和 A_3 是待定系数。在经典的数学分析理论中，往往利用通分合并和待定系数法来，并解方程以求解出 A_1，A_2 和 A_3，计算量相对而言比较复杂。使用留数定理，则对 A_1，A_2 和 A_3 的计算最后将转化为求导数和极限的计算，见公式(2)。并最终得到 $\frac{x+2}{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)}$ 的原函数。

致　谢

本文的作者对审稿人为本文给出的重要建议表示诚挚的感谢。

基金项目

本文由国家自然科学基金项目(12301051, 12401042)；贵州省科技厅科学计划项目(黔科合－基础ZK[2024]YiBan066)；南京邮电大学人才引进科研启动基金项目(NY222092)；贵州大学高等教育研究项目(申请号 703217243301)；贵州大学引进人才科研启动基金项目(贵大人基合字-[2023] 16，[2022] 53，[2022] 65)资助。

参考文献

[1] 郭烨. 余元公式的留数证明方法[J]. 高等数学研究, 2021, 24(4): 77-79.

[2] 何明轩. 留数定理在一些实积分计算中的应用[J]. 数学学习与研究, 2021(5): 138-139.

[3] 马建清. 一类特殊复积分的探讨[J]. 高等数学研究, 2024, 27(3): 11-12.
[4] 邱为钢. 无穷求和与留数定理[J]. 大学物理, 2020, 39(9): 31-33.
[5] 曾乔. 探究留数定理在求解不同类型积分上的应用[J]. 科技创新与应用, 2020(11): 175-176.
[6] 周文平, 刘奕帆, 宋铁磊. 由留数定理求解的两类无穷积分[J]. 物理与工程, 2022, 32(1): 56-59.