Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 118-124
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411381

Hans汉斯

3C型顶点算子代数的(1/2, 1/16)-可实现群

高　洋

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2024年10月10日；录用日期：2024年11月10日；发布日期：2024年11月19日

摘　要

本文章的主要目的是证明对称群S_3是(1/2, 1/16)-可实现群。本文回顾了有关Ising向量和3-转置群的背景知识，并给出了(γ, δ)-可实现群的定义，然后给出了3C型VOA和其Griess代数的一些局部结构，最后给出了S_3是(1/2, 1/16)-可实现群的证明。

关键词

顶点算子代数，3-转置群，Ising向量

(1/2, 1/16)-Realizable Group of 3C-Vertex Operator Algebra

Yang Gao

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Oct. 10th, 2024; accepted: Nov. 10th, 2024; published: Nov. 19th, 2024

Abstract

In this paper, the main purpose is to prove that the group S_3 is a (1/2, 1/16)-realizable group. We review the background knowledge about Ising vectors and 3-transposition groups, then introduce the definition of (γ, δ)-realizable group. By Miyamoto's Results about 3C-VOA and Its Griess algebra, we finally prove that the group S_3 is a (1/2, 1/16)-realizable group.

Keywords

Vertex Operator Algebra, 3-Transposition Group, Ising Vector

文章引用: 高洋. 3C 型顶点算子代数的(1/2, 1/16)-可实现群[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 118-124.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411381

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

顶点算子代数(Vertex Operator Algebra，简称为 VOA)是二维共形场论的数学对象，它来源于月光猜想，这一猜想揭示了 Monster 单群 $\mathbb{M}$ 的一些神秘性质[1]。为了解决月光猜想，Frenkel、Lepowsky 和 Meurman 构造了 the moonshine VOA $V^{\natural}=\oplus_{i=0}^{\infty}V_i^{\natural}$，此 VOA 的全自同构群恰好就是 Monster 单群 $\mathbb{M}$ [2]。除去一个 Virasoro 元素后，其权为 2 的子空间与一个维数为 196,884 的交换非结合代数(称为 Monstrous Griess 代数)相一致。该代数由 Griess 所构造，用于构造 Monster 单群[3]。一般对 monstrous Griess 代数的研究都是从群论的观点出发，其中一个重要的结果是：每个 2A-对合 θ 定义了唯一一个 monstrous Griess 代数的幂等元 e_θ (称为轴)，使得内积 $\langle e_\theta, e_\phi\rangle$ 是由共轭类 θ_ϕ 唯一决定的，参见[4]。

另一方面，3-转置群的概念首先由 Fischer 提出并研究[5]，Fischer 通过中心自由和 reduced 的 3-转置群的分类发现了 Sporadic Fischer Groups。后来又有许多研究者进一步讨论了关于 3-转置群分类的问题，这些研究旨在通过推广某些群伦的结论来去掉中心自由性和 reduced 的假设。3-转置群的研究实际上相当于对其所对应的 Fischer 空间结构的研究。简单地来说，Fischer 空间是由 2 阶的对偶仿射平面和 3 阶的仿射平面胶合而成的部分线性空间。当 3 阶仿射平面不存在时，所对应的 3-转置群被称为辛型。

考虑到与中心载荷为 1/2 的 Virasoro 代数有关的顶点算子代数的 Griess 代数 $B=V_2$ 的一些一般特征，Miyamoto [6]发现在某些情况下，3-转置群作为 VOA 的自同构子群出现。在本文中，将会从一个 VOA V 出发，构造出一个 3-转置群，并由此引出 (γ,δ)-可实现群的定义。而通过 3-转置群可以构造出 Matsuo 代数，进一步可以观察 Griess 代数的局部结构[7]。

关于 VOA，设 $V=V_0\oplus V_1\oplus\cdots$ 是一个 VOA 且满足 $\dim V_0=1$ 和 $V_1=0$，设 e 是 Griess 代数 B 中中心载荷为 1/2 的共形向量且满足 e 生成 Virasoro VOA $L(1/2,0)$ (此时称 e 为 Ising 向量)。$L(1/2,0)$ 是有理的且有且只有 3 个不可约模，分别为 $L(1/2,0)$，$L(1/2,1/2)$ 和 $L(1/2,1/16)$ [8]。此时可以定义一个 V 的对合自同构 τ_e：

$$\tau_e=\begin{cases}1, & \text{on } V_e(0)\oplus V_e(1/2)\\ -1, & \text{on } V_e(1/16)\end{cases}$$

其中 $V_e(h)$ 为所有作为 e 所生成 VOA 的模与 $L(1/2,h)$ 同构的子模的和。如果在 V 的分解中 $V_e(1/16)=0$，则也可以定义一个对合自同构 σ_e：

$$\sigma_e=\begin{cases}1, & \text{on } V_e(0)\\ -1, & \text{on } V_e(1/2)\end{cases}$$

此时，对于任意两个满足上述条件的向量 e 和 f，都满足 $\sigma_e\sigma_f$ 的阶为 1、2 或 3。

本文章的主要目的是证明对称群 S_3 是 $(1/2,1/16)$-可实现群。首先，本文回顾了有关 Ising 向量和 3-转置群的背景知识，并给出了 (γ,δ)-可实现群的定义[7]；然后给出了 3C 型 VOA 和其 Griess 代数的一些局部结构[9]；最后结合以上结果给出 S_3 是 $(1/2,1/16)$-可实现群的证明。

2. 预备知识

2.1. 顶点算子代数

设 V 是顶点算子代数(简称为 VOA)，且满足以下性质：

$$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n, V=\mathbb{C}\mathbf{1}, V_1=0.$$

则 V 上存在唯一的不变双线性型使得 $\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle=1$。考虑 V 的权为 2 的子空间 $B=V_2$，令 $x\cdot y=x_{(1)}y$，则 B 成为一个交换非结合代数；令 $(x,y)\mathbf{1}=x_{(3)}y$，则 $(\cdot,\cdot)$ 是 B 上唯一的对称不变双线性型。代数 B 称为 V 的 Griess 代数。注意到对任意的 $u,v\in V_2$，V 上双线性型 $\langle u,v\rangle$ 与 B 上双线性型 (u,v) 是一致的。实际上，我们有 $\langle u,v\rangle\mathbf{1}=\langle u(-1)\mathbf{1},v\rangle\mathbf{1}=\left\langle \mathbf{1},u_{(3)}v\right\rangle\mathbf{1}=u_{(3)}v$。在某些情况下，Griess 代数的某些子代数同构于某些 3-转置群所对应的 Matsuo 代数，因此可以从 Matsuo 代数的角度来考虑 Griess 代数的局部结构。

设 $e\in B$，如果 e 非零且满足 $e\cdot e=2e$，则称 e 为 Griess 代数 B 的幂等元。现在假设 e 是一个幂等元，则当 $n\geq 4$ 或 $n=2$ 时，有 $e_{(n)}e=0$。这意味着 e 是一个共形向量，即 $L_n^e=e_{(n+1)}$ 的作用满足中心载荷为 $c_e=2(e,e)$ 的 Virasoro 换位关系式：

$$\left[L_m^e,L_n^e\right]=(m-n)L_{m+n}^e+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_e Id.$$

定义 2.1 设 V 是一个 VOA，$V_{\mathbb{R}}\subset V$ 是包含真空向量 $\mathbf{1}$ 和 Virasoro 元素 ω 的子空间。若有 $V_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=V$，且 V 上运算限制在 $V_{\mathbb{R}}$ 上使得 $V_{\mathbb{R}}$ 成为一个实数域 $\mathbb{R}$ 上的 VOA，则称 $V_{\mathbb{R}}$ 是 V 的实形。

设 $V_{\mathbb{R}}$ 是 V 的一个实形，$(\cdot|\cdot)$ 是 $V_{\mathbb{R}}$ 上一个实不变双线性型，则 $(\cdot|\cdot)$ 可以扩充成一个 V 上的埃尔米特型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$。对所有的 $u\in V_{\mathbb{R}},u,w\in V$，埃尔米特型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 满足：

$$\langle Y(u,z)v\,|\,w\rangle=\left\langle v\,|\,Y\left(e^{zL_1}\left(-z^{-2}\right)^{L_0}u,z^{-1}\right)w\right\rangle.$$

我们称由 $V_{\mathbb{R}}$ 和 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 组成的有序对为 VOA V 上的不变埃尔米特型。

我们接下来将 Griess 代数 B 与实形 $V_{\mathbb{R}}$ 的交记为：

$$B_{\mathbb{R}}=B\cap V_{\mathbb{R}}.$$

2.2. 3-转置群

我们首先回顾 3-转置群的定义。

定义 2.2 设 G 是群，I 是由 G 中一些对合元素构成的子集，若下述条件成立，则称 (G,I) 为一个 3-转置群：

(i) G 由 I 生成；

(ii) I 在共轭作用下封闭，即 $\forall a,b\in I$，有 $a^b=bab\in I$；

(iii) 对任意的 a 和 $b\in I$，ab 的阶不大于 3。

设 (G,I) 是一个 3-转置群，$a,b\in I$。我们通过以下邻接关系定义 I 上的图结构：

$a\sim b$ 当且仅当 a 和 b 是非交换的。

如果 $a\sim b$，则 ab 的阶为 3，并且 $a^b=b^a\in I$，此时我们记 $a\circ b:=a^b=b^a$。由以上定义容易得到，I 是一个连通图当且仅当 I 是 G 的一个独立的共轭类。如果 I 是 G 的一个共轭类，则我们称 (G,I) 是不可分解的，进一步地，如果此时 I 不是一个单点集，即 G 不是循环群，则我们称 (G,I) 是非平凡的。我们约定，在 I 的定义显然且不会引起歧义的情况下，将 (G,I) 简记为 G。

在不假设有限性的情况下[10]，对中心自由的 3-转置群进行了分类。由[10]中分类的结果，我们有下面的结论。

定理 2.3 [10]每个 3-转置群 G 都是局部有限的，即 G 的每个有限子集都生成有限子群。

设 H 是 G 的一个子群，如果 H 可由 I 的子集生成，则称 H 是 G 的 I-子群。此时，$(H,H\cap I)$ 也是一个 3-转置群。

定义 2.4 设(G_1,I_1)和(G_2,I_2)是 3-转置群。我们定义他们的直积为(G,I)：

$$G=G_1\times G_2,\quad I=(I_1\times\{1\})\cup(\{1\}\times I_2)$$

易见(G,I)还是 3-转置群。

如果(G,I)是不可分解的，则我们可以得到一个非平凡的分解$I=I_1\sqcup I_2$使得$G_i=\langle I_i\rangle$是G的非平凡的 3-转置子群并且$G\simeq G_1\times G_2$。于是容易得知，一个 3-转置群是不可分解的当且仅当其没有非平凡的直积分解。

2.3. (γ,δ)-可实现群

设V是一个 VOA，且满足

$$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n, V=\mathbb{C}\mathbf{1}, V_1=0.$$

设e是一个幂等元并且记$B^e=\{v\in B\mid(e,v)=0\}$。如果$c_e\neq 0$，则$B=B^e\oplus\mathbb{C}e$。对每一个复数$h$，考虑其所对应的特征子空间：

$$B_e(h)=\{v\in B^e\mid e\cdot v=hv\}.$$

为了对 Griess 代数B的结构进一步讨论，我们令

$$B_e[\bar{0}]=B_e(0)\oplus\mathbb{C}e,$$

$$B_e[\bar{1}]=B_e(\delta),\delta\in\mathbb{C}.$$

如果有下述关系成立，

$$B_e[\varepsilon_1]\cdot B_e[\varepsilon_2]\subseteq B_e[\varepsilon_1+\varepsilon_2],\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

则称e有关于$h=\delta$的二元性融合性质。

接下来的过程将构造$AutV$的子群G_V以及其生成子集D_V，以引出定义 2.6。

设$e\in B_{\mathbb{R}}$是中心载荷为$c=\gamma$的实幂等元，e有关于$h=\delta$的二元性融合性质且满足$B=B_e(0)\oplus B_e(\delta)\oplus\mathbb{C}e$。此时定义线性映射$\tilde{\sigma}_e$：

$$\begin{aligned}&B\to B\\&x\mapsto\tilde{\sigma}_e(x)=x-2x_e(\delta).\end{aligned}$$

其中$x_e(\delta)$表示x在$B_e(\delta)$上的分量。

实际上，容易验证

$$\tilde{\sigma}_e=\begin{cases}1, & \text{on } B_e[\bar{0}]\\ -1, & \text{on } B_e[\bar{1}]\end{cases}$$

于是$\tilde{\sigma}_e$显然是一个B上的自同构。

现在我们假设空间V有分解式$V=V_e[\bar{0}]\oplus V_e[\bar{1}]$使得下面性质成立：

(1) $V_e[\varepsilon_1]_{(n)}V_e[\varepsilon_2]\subseteq V_e[\varepsilon_1+\varepsilon_2],\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) $V_e[\varepsilon]\cap V_2=B_e[\varepsilon],\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

于是B上的自同构$\tilde{\sigma}_e$可以扩充成整个V上的自同构$\tilde{\tau}_e$：

$$\tilde{\sigma}_e=\begin{cases}1, & \text{on } V_e[\bar{0}]\\ -1, & \text{on } V_e[\bar{1}]\end{cases}$$

接下来考虑满足以上所有性质的幂等元构成的集合 E_V，进一步假设有下面性质成立

(3) $g\left(V_e[\varepsilon]\right)=V_{g(e)}[\varepsilon], g\in AutV, e\in E_V$ and $\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

记 $D_V=\left\{\tilde{\tau}_e \mid e\in E_V\right\}$，且记 G_V 为 $AutV$ 中由 D_V 生成的子群。

命题 2.5 在上述的假设下，V 的自同构 $\tilde{\tau}_e$ 满足：

$\forall g\in AutV$，有 $g\tilde{\tau}_e g^{-1}=\tilde{\tau}_{g(e)}$，

于是 $\left(G_V, D_V\right)$ 是一个 3-转置群。

定义 2.6 设 (D,V) 是一个 3-转置群，如果 (D,V) 同构于 V 由上述过程得到的 $\left(G_V, D_V\right)$，则称其为由 VOA V (γ,δ)-可实现的。

接下来引入的引理来源于顶点算子代数的张量积构造。

引理 2.7 设 V_1 和 V_2 是满足下述条件的 VOA：

(I) $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n, V=\mathbb{C}\mathbf{1}, V_1=0$，

(II) V 上有一个正定的不变埃尔米特型，

(III) V 可由其 Griess 代数 B 生成，B 由 E_V 张成，$\forall e_1\in E_1, e_2\in E_2, \left(e_1,e_2\right)=0$。

如果有两个 3-转置群分别由 V_1 和 V_2 (γ,δ)-可实现，则它们的直积可以由 VOA 的张量积 $V_1\otimes V_2$ (γ,δ)-可实现。

相反地，假设对于 E_V 有一个非平凡的正交分解，即 $E_V=E_1\cup E_2$ 是非空子集 E_1 和 E_2 的不交并，且 $E_1\perp E_2\left(\forall e_1\in E_1, e_2\in E_2, \left(e_1,e_2\right)=0\right)$。设 V_1 和 V_2 分别是 E_1 和 E_2 生成的子 VOA。由于条件(II)，V_1 和 V_2 是单 VOA，它们的张量积 $V_1\otimes V_2$ 也是单 VOA。因为 $E_1\perp E_2$，我们有 $\forall u^1\in V_1, u^2\in V_2, n\geq 0, u^1_{(n)}u^2=0$。因此，通过 VOA 张量积的相关性质，可以得到一个 VOA 的同态 $V_1\otimes V_2\to V$。由条件(III)可知，该同态是满射，再由 VOA 的单性，该同态实际上还是一个同构。

3. 关于 3C 型 VOA

本章节的主要目的是证明 S_3 是 $(1/2,1/16)$-可实现群。为实现这一目的，我们需要先回顾 3C 型 VOA 的局部结构。3C 型 VOA 是由 V 的两个 Ising 向量 e 和 f 生成的子代数，其 3C 型取决于同构类 $\tau_e\tau_f$，此时有 e，f 的内积为 $\langle e,f\rangle=\dfrac{1}{2^8}$。

设 V 是域 $\mathbb{R}$ 上的单 VOA，对任意的 $v\in V$，用 $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v(n)z^{-n-1}$ 来表示 v 对应的顶点算子。

我们还假设以下条件成立：

(I’) $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n, V=\mathbb{R}\mathbf{1}, V_1=0$。

一个 VOA 如果满足上述条件(I’)，则称其为 OZ-型。因为 $\dim V_0=1$ 且 $V_1=0$，V 上存在唯一一个不变双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得 $\langle\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle=1$。

(II’) 对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 V_n 上是正定的。

我们注意到 Griess 代数的双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 和 V 的双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 限制在 B 上是一致的。

定义 3.1 如果一个共形向量 e 生成有理 VOA $L(1/2,0)$，则称之为 Ising 向量。

注：对于 $V=V^\natural$ 的情况，此时 monstrous Griess 代数的每个轴实际上就是 $V^\natural$ 的 Ising 向量的一半。

利用 Ising 向量，可以对 V 的 Griess 代数进行特征子空间的分解，并且可以借助 $L(1/2,0)$ 的对 V 进行分解，并构造出对合自同构。具体如下：

引理 3.2 [6]设 e 是一个 Ising 向量，则 V_2 有如下分解：

$$V_2=\mathbb{R}e\oplus E_e(0)\oplus E_e(1/2)\oplus E_e(1/16),$$

其中 $E_e(h)$ 表示 $e_{(1)}$ 关于特征值 h 的特征子空间。

对于一个 Ising 向量 e，V 有如下分解：

$$V=V_e(0)\oplus V_e(1/2)\oplus V_e(1/16),$$

其中 $V_e(h)$ 表示所有同构于 $L(1/2,h)$ 的不可约 $\langle e\rangle$-子模的和，$\langle e\rangle$ 是由 e 生成的子 VOA。

此时我们定义一个 V 的对合自同构 τ_e：

$$\tau_e=\begin{cases}1, & \text{on } V_e(0)\oplus V_e(1/2)\\ -1, & \text{on } V_e(1/16)\end{cases}$$

现在设 e,f 是两个互不相同的 Ising 向量，且有 $\tau_e(f)=\tau_f(e),\langle e,f\rangle=1/2^8$。

利用分解式 $V_2=\mathbb{R}e\oplus E_e(0)\oplus E_e(1/2)\oplus E_e(1/16)$，可以得到

$$f=\lambda e+a+b+c$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R},a\in E_e(0),b\in E_e(1/2),c\in E_e(1/16)$。注意到

$$\langle e,f\rangle=\langle e,\lambda e+a+b+c\rangle=\lambda\langle e,e\rangle$$

可以得到 $\lambda=4\langle e,f\rangle=1/2^6$。借助 Miyamoto 的结果[9]，$VA(e,f)$ 是 V 的子 VOA，$e+\omega_1$ 是其 Virasoro 元素，这里 $\omega_1=\dfrac{16}{9-48\lambda}a$。

从现在开始，我们记 $V_{\mathbb{R}}=VA(e,f)$，$V=\mathbb{C}\otimes V_{\mathbb{R}}$，$B_{\mathbb{R}}=(VA(e,f))_2$，$B=(\mathbb{C}\otimes V_{\mathbb{R}})_2$。

由 Miyamoto 在[9]中相关讨论，我们有

$$B=\mathbb{C}e\oplus\mathbb{C}a\oplus\mathbb{C}c=\mathbb{C}e\oplus B_e(0)\oplus B_e(1/16).$$

在这一章节的最后，我们将给出以下命题及其证明。

命题 3.3 3-转置群 S_3 是 $(1/2,1/16)$-可实现群。

证明 首先，我们约定使用上文给出的假设和记号。由[11]可知，V 有且只有 3 个 Ising 向量 $e,f,\tau_e(f)=\tau_f(e)$。

对于 e，我们令 $B_e[\bar{0}]=\mathbb{C}e\oplus B_e(0),B_e[\bar{1}]=B_e(1/16)$。利用 $L(1/2,0)$-模的融合律，我们有

$$B_e[\varepsilon_1]\cdot B_e[\varepsilon_2]\subseteq B_e[\varepsilon_1+\varepsilon_2],\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此 e 有关于 $\dfrac{1}{16}$ 的二元性融合性质。记 $V_e[\bar{0}]=V_e(0)\oplus V_e(1/2),V_e[\bar{1}]=V_e(1/16)$。由[12]以及 $L(1/2,0)$-模的融合律，可以得到下述性质：

$$B_e[\varepsilon]=V_e[\varepsilon]\cap B,\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$V_e[\varepsilon_1]_{(n)}V_e[\varepsilon_2]\subseteq V_e[\varepsilon_1+\varepsilon_2],\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此 $e\in E_V$ [7]。

实际上，由上述性质，我们还可以得出 τ_e 与 $\tilde{\tau}_e$ 在 V 上是一致的。

$$\forall\alpha\in V_e[\varepsilon],\varphi\in AutV,\quad \tau_{\varphi(e)}(\varphi(\alpha))=\varphi\tau_e\varphi^{-1}(\varphi(\alpha))=\varphi\tau_e(\alpha)=\begin{cases}\varphi(\alpha), & \varepsilon=\bar{0}\\ -\varphi(\alpha), & \varepsilon=\bar{1}\end{cases}$$

$$\therefore\varphi(V_e[\varepsilon])\subset V_{\varphi(e)}[\varepsilon].$$

$$\forall\beta\in V_{\varphi(e)}[\varepsilon],\quad \varphi\tau_e\varphi^{-1}(\beta)=\tau_{\varphi(e)}(\beta)=\begin{cases}\beta, & \varepsilon=\bar{0}\\ -\beta, & \varepsilon=\bar{1}\end{cases}\Rightarrow\tau_e\varphi^{-1}(\beta)=\begin{cases}\varphi^{-1}(\beta), & \varepsilon=\bar{0}\\ -\varphi^{-1}(\beta), & \varepsilon=\bar{1}\end{cases}$$

$$\therefore V_{\varphi(e)}[\varepsilon]\subset\varphi(V_e[\varepsilon]).$$

注意到 $\tau_{\tau_f(e)}(e)=\tau_f\tau_e\tau_f(e)=f=\tau_e\tau_f(e)$， $e,f,\tau_f(e)$ 地位相同，所以我们可以对 $f,\tau_f(e)$ 作与 e 相同的讨论。于是有 $f,\tau_f(e)\in E_V$ 且 $\{e,f,\tau_f(e)\}$ 满足 2.3 节中的假设(3)。

显然， E_V 中的元素是 Ising 向量。因此 $E_V=\{e,f,\tau_f(e)\}$ 。

另一方面，考虑到 $S_3=\langle\{(12),(13),(23)\}\rangle$，易知 V 所对应的 3-转置群 $G_V\simeq S_3$ 。

最后由于 3C 型 VOA 的存在唯一性[13]，命题得证。

参考文献

[1] Conway, J.H. and Norton, S.P. (1979) Monstrous Moonshine. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **11**, 308-339. https://doi.org/10.1112/blms/11.3.308

[2] Frenkel, I., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1988) Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, Vol. 134, Academic Press.

[3] Griess, R.L. (1982) The Friendly Giant. *Inventiones Mathematicae*, **69**, 1-102. https://doi.org/10.1007/bf01389186

[4] Conway, J.H. (1985) A Simple Construction for the Fischer-Griess Monster Group. *Inventiones Mathematicae*, **79**, 513-540. https://doi.org/10.1007/bf01388521

[5] Fischer, B. (1971) Finite Groups Generated by 3-Transpositions. I. *Inventiones Mathematicae*, **13**, 232-246. https://doi.org/10.1007/bf01404633

[6] Miyamoto, M. (1996) Griess Algebras and Conformal Vectors in Vertex Operator Algebras. *Journal of Algebra*, **179**, 523-548. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0023

[7] Matsuo, A. (2005) 3-Transposition Groups of Symplectic Type and Vertex Operator Algebras. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **57**, 639-649. https://doi.org/10.2969/jmsj/1158241926

[8] Dong, C., Mason, G. and Zhu, Y. (1994) Discrete Series of the Virasoro Algebra and the Moonshine Module. *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society*, **56**, 295-316.

[9] Miyamoto, M. (2003) Vertex Operator Algebras Generated by Two Conformal Vectors Whose T-Involutions Generate S3. *Journal of Algebra*, **268**, 653-671. https://doi.org/10.1016/s0021-8693(03)00096-6

[10] Cuypers, H. and Hall, J.I. (1995) The 3-Transposition Groups with Trivial Center. *Journal of Algebra*, **178**, 149-193. https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1344

[11] Lam, C.H., Yamada, H. and Yamauchi, H. (2005) McKay's Observation and Vertex Operator Algebras Generated by Two Conformal Vectors of Central Charge 1/2. *International Mathematics Research Papers*, **2005**, 117-181. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0503239

[12] Sakuma, S. (2007) 6-Transposition Property of τ-Involutions of Vertex Operator Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **2007**, rnm030. https://doi.org/10.1093/imrn/rnm030

[13] Dong, C. and Zheng, W. (2021) Uniqueness of VOA Structure of 3c-Algebra and 5a-Algebra. *Journal of Algebra*, **572**, 76-110. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.12.011