Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 125-131
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411382

度量空间中拟双曲映射的一个等价刻画

夏　令

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2024年10月15日；录用日期：2024年11月14日；发布日期：2024年11月26日

摘　要

本文在度量空间中介绍了拟双曲度量和拟双曲映射的概念，利用拟双曲度量的性质来刻画了度量空间中拟双曲映射的一个等价性质。

关键词

拟双曲度量，拟双曲映射，度量空间

An Equivalent Characterization of Quasihyperbolic Mapping in Metric Spaces

Ling Xia

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 15th, 2024; accepted: Nov. 14th, 2024; published: Nov. 26th, 2024

Abstract

In this paper, we introduce the concepts of quasihyperbolic metric and quasihyperbolic mapping in metric spaces, and obtain an equivalent property of quasihyperbolic mapping for metric spaces in terms of properties of quasihyperbolic metric.

Keywords

Quasihyperbolic Metric, Quasihyperbolic Mapping, Metric Space

文章引用：夏令. 度量空间中拟双曲映射的一个等价刻画[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 125-131.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411382

1. 引言

上世纪七十年代，为了讨论高维拟共形映射中的黎曼映射定理，Gehring 等人在文[1]中引进了欧氏空间中拟双曲度量的概念，随后得到了大量学者的研究，并将拟双曲度量广泛应用到 Banach 空间和度量空间。同时，在研究拟共形映射理论时，拟双曲度量也是非常有用的工具，有关拟双曲度量的文献请参见[2]-[4]。

由于欧氏空间中研究拟共形映射的很多方法在无限维 Banach 空间中并不适用，直至上世纪八十年代，Väisälä 开始研究 Banach 空间中自由拟共形映射的理论[5]-[9]。这种方法的主要优点是避免使用体积积分和共形模，这允许人们研究具有无限维的 Banach 空间和没有体积测量的度量空间中映射的拟共形性。因此，对拟双曲度量相关性质的研究得到了学者们的极大关注和广泛应用，请参见文献[2]-[4] [10] [14]。

近些年来，国内很多学者也应用拟双曲度量作为工具进行了该领域相关的研究，比如黄曼子教授等人在文[7]中结合拟双曲度量研究了拟共形映射的相关性质；黄小军教授等人在文[3] [4]中研究了度量空间中拟双曲度量与拟对称映射的相关性质，以及周青山教授在[15]中证明了 Banach 空间中拟双曲映射的相关性质，等等。

2. 拟双曲度量与拟双曲映射

在本文中，假设(X,d_X)和(Y,d_Y)是度量空间，简记为 X 和 Y，设 $D\subsetneq X$ 和 $D'\subsetneq Y$ 分别是 X 和 Y 的真子区域。对于 X 中的每一对点 x 和 y，它们之间的距离用 $d_X(x,y)$ 表示。对于任意的 $x\in D$ 和 $r>0$，记 $B(x,r)=\{y\in D:d_X(x,y)<r\}$ 表示以 x 为中心，r 为半径的度量开球。

曲线是指任意连续映射 $\gamma:[a,b]\to X$ 。γ 的长度定义为：

$$l(\gamma)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}d_X\left(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})\right)\right\},$$

其中上确界是针对$[a,b]$的任意划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 所取。如果 $l(\gamma)<\infty$，则称曲线 γ 是可求长的。称 $s_\gamma:[a,b]\to[0,l(\gamma)]$ 为 γ 的长度函数，定义 $s_\gamma(t)=l\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$。任意可求长曲线 $\gamma:[a,b]\to(X,d_X)$ 都存在唯一的一条曲线 $\gamma_s:[0,l(\gamma)]\to(X,d_X)$ 使得 $\gamma=\gamma_s\circ s_\gamma$，而且对于任意的 $t\in[0,l(\gamma)]$，有 $l(\gamma_s[0,t])=t$，则 γ_s 称作曲线 γ 的弧长参数化。

定义 2.1 设 $D\subsetneq X$ 是一个非空子区域，γ 是 D 中的可求长曲线，γ 的拟双曲长度定义为

$$l_{k_D}(\gamma)=\int_\gamma\frac{1}{\delta_D(x)}\mathrm{d}s,$$

其中 $\delta_D(x)$ 表示 x 到 D 的边界 ∂D 的距离，即 $\delta_D(x)=\operatorname{dist}(x,\partial D)$。任意 $x,y\in D$，它们之间的拟双曲距离可以用 $k_D(x,y)$ 表示，定义为

$$k_D(x,y)=\inf_\gamma l_{k_D}(\gamma),$$

其中 γ 取遍 D 中所有连接 x,y 的可求长曲线，同时称 k_D 为 D 中的拟双曲度量。

对于任意的 $x,y\in D$，根据拟双曲度量的定义，恒有如下不等式[9]

$$\left|\ln\frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)}\right|\le\ln\left(1+\frac{d_X(x,y)}{\min\{\delta_D(x),\delta_D(y)\}}\right)\le k_D(x,y).\tag{2.1}$$

定义 2.2 设 $D\subsetneq X$ 和 $D'\subsetneq Y$ 分别是 X 和 Y 的真子区域，$f:D\to D'$ 是一个同胚映射，$M\ge1$是一个常数。

(1) 若对于任意的 $x,y\in D$，都有

$$\frac{1}{M}k_D(x,y)\le k_{D'}(f(x),f(y))\le Mk_D(x,y),$$

则称 f 是 M-拟双曲映射。

(2) 如果 f 限制在 D 中任意的子区域上是 M-拟双曲映射，则称 f 是一个 fully M-拟双曲映射。

(3) 如果对任意 $x\in D$， $f:B_x\to f(B_x)$ 是 M-拟双曲映射，则称 f 是一个 semi-local M-拟双曲映射，其中 $B_x=B(x,\delta_G(x))$。

根据拟双曲距离和拟双曲映射的定义，我们引入 Väisälä 在文[9]中的例子，通过该例子的证明过程，可以很好地解释拟双曲距离和拟双曲映射的定义。

例 2.1 [9]设 E 是一个 Banach 空间， $D=E\setminus\{0\}$， $\alpha\ge1$。定义映射 $f:D\to D$ 为 $f(x)=|x|^{\alpha-1}x$，则 f 是一个 α -拟双曲映射。

3. 重要的引理

为了引入本文的重要引理，还需要引入如下的两个定义。

定义 3.1 设 X 和 Y 是两个度量空间， $f:X\to Y$ 是一个同胚映射，点 x 是 X 中的非孤立点。记

$$L(x,f)=\limsup_{y\to x}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}\text{和}\,l(x,f)=\liminf_{y\to x}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}。$$

我们分别称 $L(x,f)$ 和 $l(x,f)$ 为 f 在点 x 处的极大拉伸和极小拉伸。显然有 $0\le l(x,f)\le L(x,f)\le\infty$。

定义 3.2 设 $c\ge1$，如果 X 中的任意两点 x 和 y 都能被一条可求长曲线 γ 连接，且满足 $l(\gamma)\le cd_X(x,y)$，则称度量空间 X 是一个 c-拟凸度量空间。

在文[4]中，黄小军教授等人在一般度量空间中研究了拟双曲映射的性质，并得到了如下结论。

引理 3.1 [4] 设 X 是 c-拟凸度量空间，D 是 X 的真子区域。对于任意的 $x,y\in D$，如果满足 $d_X(x,y)\le\frac{1}{8c}\delta_D(x)$ 或 $k_D(x,y)\le\frac{1}{4}$，则

$$\frac{1}{2}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le k_D(x,y)\le 2c\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}.$$

引理 3.2 [4] 假设 X 和 Y 分别是 c_1-拟凸度量空间，c_2-拟凸度量空间，$D\subsetneq X$ 和 $D'\subsetneq Y$，且 $f:D\to D'$ 是一个 M-拟双曲映射，则 f 是一个 fully M_1-拟双曲映射，其中 $M_1=16c_1c_2M^2\cdot\max\{c_1,c_2\}$。

引理 3.3 [4] 假设 X 和 Y 分别是 c_1-拟凸度量空间和 c_2-拟凸度量空间，D 和 D' 分别是 X 和 Y 的真子区域，且 $f:D\to D'$ 是一个同胚映射。 $M\ge1$ 是一个常数。如果对任意的 $x\in D$，有

$$L(x,f)\le c_1M\frac{\delta_{D'}(f(x))}{\delta_D(x)}\text{和}\,l(x,f)\ge\frac{1}{c_2M}\frac{\delta_{D'}(f(x))}{\delta_D(x)},$$

则 f 是一个 $2c_1c_2M$ -拟双曲映射。

为了证明本文的主要结论，我们还需要证明如下的结论。

引理 3.4 设 X 是 c_1-拟凸度量空间，Y 是 c_2-拟凸度量空间， $D\subset X$, $D'\subset Y$ 分别是 X 和 Y 的真子区域，且 $f:D\to D'$ 是一个同胚映射。

(1) 设常数 $C\ge1$，如果对任意的 $x,y\in D$，有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)},$$

则 f 是 M-拟双曲映射，其中 $M=2c_1c_2C$。

(2) 如果 f 是 M-拟双曲映射，则存在常数 $C\ge 1$，对于任意的 $x,y\in D$，使得当 $d_X(x,y)\le \left(1/(8c_1M)\right)\delta_D(x)$ 时，有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)},$$

其中 C 仅与 M 有关。

证明: (1) 假设常数 $C\ge 1$，对任意的 $x,y\in D$，有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}.$$

则根据函数 f 在点 x 的极大拉伸和极小拉伸的定义，我们可以得到

$$L(x,f)=\limsup_{y\to x}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}\le c_1C\frac{\delta_{D'}(f(x))}{\delta_D(x)},$$

$$l(x,f)=\liminf_{y\to x}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}\ge\frac{1}{c_2C}\frac{\delta_{D'}(f(x))}{\delta_D(x)}.$$

再根据引理 3.3，可知 $f:D\to D'$ 是 M-拟双曲映射，其中 $M=2c_1c_2C$。

(2) 对于任意的 $x,y\in D$，$d_X(x,y)\le\left(1/(8c_1M)\right)\delta_D(x)$，则根据引理 3.1 可得

$$k_D(x,y)\le 2c_1\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le 2c_1\cdot\frac{1}{8c_1M}=\frac{1}{4M}. \tag{3.1}$$

结合不等式(2.1)和(3.1)，根据拟双曲映射的定义可得

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\right)&\le k_{D'}(f(x),f(y))\le Mk_D(x,y)\\&\le\min\left\{\frac{1}{4},\ 2Mc_1\cdot\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\right\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

进而可以推出

$$d_Y(f(x),f(y))\le\left(e^{\frac{1}{4}}-1\right)\delta_{D'}(f(x)) \tag{3.3}$$

因此，结合不等式(3.2)和(3.3)，以及函数的简单性质，容易验证得到

$$\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\le e^{\frac{1}{4}}\cdot\ln\left(1+\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\right)\le 2Mc_1e^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)} \tag{3.4}$$

另外，不等式(3.2)蕴含着

$$k_{D'}(f(x),f(y))\le Mk_D(x,y)\le 1/4. \tag{3.5}$$

根据引理 3.1，再次应用(2.1)和(3.5)，可以得到

$$\ln\left(1+\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\right)\le k_D(x,y)\le Mk_{D'}(f(x),f(y))\le\min\left\{2Mc_2\cdot\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))},\frac{M}{4}\right\}.$$

类似于不等式(3.4)的方法，可得

$$\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)} \le e^{\frac{M}{4}} \cdot \ln\left(1+\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\right) \le 2Mc_2 e^{\frac{M}{4}} \cdot \frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))} \tag{3.6}$$

因此，再结合(3.4)和(3.6)，对于任意的 $x,y\in D$ 且 $d_X(x,y)\le \left(1/(8c_1M)\right)\delta_D(x)$，都有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)} \le \frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))} \le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}.$$

其中

$$C=\max\left\{2Me^{\frac{1}{4}},\ 2Me^{\frac{M}{4}}\right\}=2Me^{\frac{M}{4}}.$$

因此，引理 3.4 得以证明。

4. 主要结论及其证明

在欧氏空间和 Banach 空间中已有很多拟双曲映射的相关结论，请参见[4]-[9] [15]。一个很自然的问题就是关于拟双曲映射的性质在一般度量空间中是否也成立？因此，在本文中，我们将拟双曲映射的一些等价性质推广至一般度量空间中，并得到一般度量空间中拟双曲映射的一个等价刻画，具体内容叙述如下：

定理 4.1 设 X 是 c_1-拟凸度量空间，Y 是 c_2-拟凸度量空间，$D\subsetneq X$ 和 $D'\subsetneq Y$ 分别是 X 和 Y 的真子区域，且 $f:D\to D'$ 是一个同胚映射。对于任意的 $x\in D$，则如下结论等价：

(1) f 是 M-拟双曲映射；

(2) f 是一个 semi-local M_1-拟双曲映射，且 $\delta_{D'}(f(x))\le M_2\delta_{f(B_x)}(f(x))$。

其中 M 和 M_1, M_2 互相依赖且与 c_1, c_2 有关。

定理 4.1 的证明： $(2)\Rightarrow(1)$ 假设 f 是一个 semi-local M_1-拟双曲映射，且它满足对任意的 $x\in D$，$\delta_{D'}(f(x))\le M_2\delta_{f(B_x)}(f(x))$，接下来需要证明 $f:D\to D'$ 是 M-拟双曲映射，其常数 $M=M(M_1,M_2,c_1,c_2)\ge 1$。

根据 semi-local 拟双曲映射的定义，可知 $f:B_x\to f(B_x)$ 是一个 M_1-拟双曲映射，其中 $B_x=B(x,\delta_G(x))$。应用引理 3.4 (2)，则存在常数 $C\ge 1$，对于任意的 $x,y\in B_x$，使得当 $d_X(x,y)\le\left(1/(8c_1M_1)\right)\delta_{B_x}(x)$ 时，有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_{B_x}(x)} \le \frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{f(B_x)}(f(x))} \le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_{B_x}(x)}. \tag{4.1}$$

其中 C 仅与 M_1 相关。根据 $\delta_{D'}(f(x))$ 的定义，可得

$$\delta_{f(B_x)}(f(x))\le\delta_{D'}(f(x))\le M_2\delta_{f(B_x)}(f(x)),$$

再结合(4.1)以及 $\delta_D(x)=\delta_{B_x}(x)$，可以推出

$$\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))} \le \frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{f(B_x)}(f(x))} \le c_1C\cdot\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)},$$

和

$$\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))} \ge \frac{1}{M_2}\cdot\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{f(B_x)}(f(x))} \ge \frac{1}{c_2CM_2}\cdot\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}.$$

因此，根据引理 3.4 (1)，可得 $f:D\to D'$ 是 M-拟双曲映射，其中 $M=2c_1c_2CM_2$。

$(1)\Rightarrow(2)$ 已知 $f:D\to D'$ 是 M-拟双曲映射，则根据引理 3.2，对于任意的 $x\in D$，$f:B_x\to f(B_x)$ 是一个 M_1-拟双曲映射，即 $f:D\to D'$ 是一个 semi-local M_1-拟双曲映射，其中 $M_1=16c_1c_2M^2\cdot\max\{c_1,c_2\}$。

接下来继续证明

$$\delta_{D'}(f(x))\le M_2\delta_{f(B_x)}(f(x))。$$

设 $x\in D\cap B_x$。一方面，由 $f:D\to D'$ 是 M-拟双曲映射，根据引理 3.4 (2)，则存在常数 $C\ge 1$，对任意的 $x,y\in D$，使得 $d_X(x,y)\le(1/(8c_1M))\delta_D(x)$，有

$$\frac{1}{c_2C}\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}\le\frac{d_Y(f(x),f(y))}{\delta_{D'}(f(x))}\le c_1C\frac{d_X(x,y)}{\delta_D(x)}. \tag{4.2}$$

另一方面，由于 $f:B_x\to f(B_x)$ 是 M_1-拟双曲映射，根据引理 3.4 (2)，则存在常数 $C'\ge 1$，对于任意的 $z\in B_x$，使得 $d_X(x,z)\le(1/(8c_1M_1))\delta_{B_x}(x)$，有

$$\frac{1}{c_2C'}\frac{d_X(x,z)}{\delta_{B_x}(x)}\le\frac{d_Y(f(x),f(z))}{\delta_{f(B_x)}(f(x))}\le c_1C'\frac{d_X(x,z)}{\delta_{B_x}(x)}, \tag{4.3}$$

其中 C' 与 M_1 有关。又因为 $\delta_D(x)=\delta_{B_x}(x)$，$M_1=16c_1c_2M^2\cdot\max\{c_1,c_2\}\ge M$，所以

$$B\left(x,\frac{1}{8c_1M_1}\delta_{B_x}(x)\right)\subset B\left(x,\frac{1}{8c_1M}\delta_D(x)\right).$$

令

$$w\in B\left(x,\frac{1}{8c_1M_1}\delta_{B_x}(x)\right),$$

则对于任意的 $x\in D$，结合不等式(4.2)和(4.3)，以及 $\delta_D(x)=\delta_{B_x}(x)$，有

$$\begin{aligned}\delta_{D'}(f(x))&\le c_2C\frac{\delta_D(x)}{d_X(x,w)}\cdot d_Y(f(x),f(w))\\&\le c_2C\frac{\delta_D(x)}{d_X(x,w)}\cdot c_1C'\frac{d_X(x,w)}{\delta_{B_x}(x)}\cdot\delta_{f(B_x)}(f(x))\\&=c_1c_2CC'\cdot\delta_{f(B_x)}(f(x)).\end{aligned}$$

即

$$\delta_{D'}(f(x))\le M_2\cdot\delta_{f(B_x)}(f(x)),$$

其中 $M_2=c_1c_2CC'$。证毕。

参考文献

[1] Gehring, F.W. and Palka, B.P. (1976) Quasiconformally Homogeneous Domains. *Journal d'Analyse Mathématique*, **30**, 172-199. https://doi.org/10.1007/bf02786713

[2] Gehring, F.W. and Osgood, B.G. (1979) Uniform Domains and the Quasi-Hyperbolic Metric. *Journal d'Analyse Mathématique*, **36**, 50-74. https://doi.org/10.1007/bf02798768

[3] Huang, X. and Liu, J. (2015) Quasihyperbolic Metric and Quasisymmetric Mappings in Metric Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6225-6246. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2015-06240-0

[4] Huang, X., Liu, H. and Liu, J. (2016) Local Properties of Quasihyperbolic Mappings in Metric Spaces. *Annales*

Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, **41**, 23-40. https://doi.org/10.5186/aasfm.2016.4106

[5] Väisälä, J. (1990) Free Quasiconformality in Banach Spaces I. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A I Mathematica*, **15**, 355-379. https://doi.org/10.5186/aasfm.1990.1527

[6] Väisälä, J. (1991) Free Quasiconformality in Banach Spaces II. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A I Mathematica*, **16**, 255-310. https://doi.org/10.5186/aasfm.1991.1629

[7] Väisälä, J. (1992) Free Quasiconformality in Banach Spaces III. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A I Mathematica*, **17**, 393-408. https://doi.org/10.5186/aasfm.1992.1732

[8] Väisälä, J. (1998) Free Quasiconformality in Banach Spaces IV. In: Cazacu, C.A., *et al*., Eds., *Analysis and Topology*, World Scientific, 697-717. https://doi.org/10.1142/9789812817297_0040

[9] Väisälä, J. (1999) The Free Quasiworld. Freely Quasiconformal and Related Maps in Banach Spaces. *Banach Center Publications*, **48**, 55-118. https://doi.org/10.4064/-48-1-55-118

[10] 刘红军. 度量空间中拟对称映射与拟双曲一致域的研究[J]. 数学学报(中文版), 2020, 63(5): 537-544.

[11] Huang, M., Rasila, A., Wang, X. and Zhou, Q. (2018) Semisolidity and Locally Weak Quasisymmetry of Homeomorphisms in Metric Spaces. *Studia Mathematica*, **242**, 267-301. https://doi.org/10.4064/sm8629-6-2017

[12] 梁茜, 刘红军, 杨倩, 唐树安. 拟双曲度量空间 Gromov 双曲性的几何性质[J]. 数学学报(中文版), 2024: 1-14.

[13] Klén, R., Vuorinen, M. and Zhang, X. (2013) Quasihyperbolic Metric and Möbius Transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 311-322. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2013-11765-x

[14] Wang, X. and Zhou, Q. (2017) Quasimöbius Maps, Weakly Quasimöbius Maps and Uniform Perfectness in Quasi-Metric Spaces. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **42**, 257-284. https://doi.org/10.5186/aasfm.2017.4216

[15] Zhou, Q. (2021) Quasihyperbolic Mappings in Banach Spaces. *Annales Fennici Mathematici*, **46**, 335-344. https://doi.org/10.5186/aasfm.2021.4619