Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 132-143
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411383

Hans汉斯

半环簇COS_n^+的一些子簇

胡　玉

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2024年10月2日；录用日期：2024年11月5日；发布日期：2024年11月27日

摘　要

研究半环簇COS_n^+中半环的格林关系，给出此类半环的$\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L},\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{R},\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{D},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{L},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{R},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{D}$关系的等价刻画，得到上述关系为同余的充分必要条件，证明由上述格林关系决定的半环类都是COS_n^+的子簇。

关键词

半环，格林关系，簇

Some Subvarieties of Semiring Variety COS_n^+

Yu Hu

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Oct. 2nd, 2024; accepted: Nov. 5th, 2024; published: Nov. 27th, 2024

Abstract

This paper mainly studies the Green's relations of COS_n^+, discusses the characterizations of the Green's relations of $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L},\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{R},\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{D},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{L},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{R},\overset{+}{H}\vee\overset{\cdot}{D}$ and obtains the necessary and sufficient conditions for the above relations to be congruent. It is proved that the semiring classes determined by these relations are all subvarieties of COS_n^+.

Keywords

Semiring, Green Relations, Variety

文章引用：胡玉. 半环簇COS_n^+的一些子簇[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 132-143. DOI: 10.12677/pm.2024.1411383

1. 引言

设$(S,+,\cdot)$是一个(2, ~2)-型代数，若满足以下 3 个条件：

1) $(S,+)$是半群；

2) $(S,\cdot)$是半群；

3) $(S,+,\cdot)$满足恒等式$x(y+z)\approx xy+xz$和$(x+y)z\approx xz+yz$，

则称$(S,+,\cdot)$是半环，简记为$(S,\cdot)$半群$(S,+)$为S的加法导出，半群$(S,\cdot)$为S的乘法导出。若一个半环的加法导出$(S,+)$是幂等半群($x+x\approx x$)，则称S为加法幂等半环；若一个半环的乘法导出$(S,\cdot)$是幂等半群($x^2\approx x$)，则称S为乘法幂等半环；若一个半环的乘法导出和加法导出都是幂等元半群，则这个半环被称为是幂等元半环。所有的幂等元半环构成一个簇，用 I 表示。若V为同型代数类，并对子代数、同态像、以及直积封闭，则称V为簇[1]-[3]。由 Birkhoff 定理知，一个同型代数类是簇当且仅当这个代数类是等式类[2]。半环是一种重要的代数结构，自从 1894 年德国科学家 Qedekind 在《代数数论》中首次引入了半环的概念以来，半环代数理论在数学领域的发展经历了显著的进展。1934 年，Vandiver H.S 第一次明确提出了半环的定义并将其视为一种由加法和乘法的半群结构通过分配律联系在一起的代数系统。简而言之，半环就是由两个运算(加法和乘法)构成的一个代数系统，其中加法和乘法满足分配律，但不要求加法逆元的存在。自然数集是人们最早接触的半环之一。在自然数的加法和乘法运算下，虽然加法并不具备逆元，但它构成了符合半环定义的结构。半环概念从此基础上逐渐演变和推广，成为现代数学中一类广泛研究的代数结构。20 世纪 60 年代，随着数学应用的拓展和实际问题的推动，半环理论取得了显著的发展，并逐渐应用到分析学，拓扑学以及非交换代数等领域。半环的特性使其成为描述一些代数结构的自然工具，特别是在这些学科中，许多问题的本质可以通过半环来描述和解决。2000 年前后，以色列数学家 Golan 在其专著“*The Theory of Semirings with Applications and Theoretical Computer Science*”中系统地阐述了半环的代数理论，并重点讨论了半环在数学及其理论计算机科学中地应用。他的工作为半环地现代研究奠定了基础，并通过探讨半环的基本性质及其与其他代数结构的关系，将半环应用推广到多个领域。

与此同时，半环的应用也得到了广泛的推广：在欧氏几何，泛函分析，组合学等各种数学领域中都出现了半环的身影；另外在数学与计算机科学，量子物理学的交叉领域中也广泛应用到半环的概念和特征。迄今为止对于半环的研究，众多学者主要从两个角度出发，一是将半环看作是环的推广来研究其性质。在这一视角下，环中的许多概念，如理想，同态，同构等，都可以相应地在半环中进行推广和应用。二是从半环定义出发，半环可以看作是由分配律联系着的同一非空集合上的两个半群。所以许多专家从半环的分支半群入手研究半环的结构和性质。在这一角度下，研究者通过分析半环中的加法半群和乘法半群的结构，进一步探讨半环的性质。这种方法特别适合分析没有负元的运算系统，因此推动了半环诸如自动机理论和图论中的应用，从而进一步推动了半环理论的发展。

因此，半环上的格林关系可以通过对半群上的格林关系进行研究，特别是幂等元半环。为了表示清楚，我们用符号$\dot{L}$表示半环S的乘法半群$(S,\cdot)$上的格林L关系，用$\overset{+}{L}$来表示半环S的加法半群$(S,+)$上的格林L关系。其他的格林关系都是类似地表示。Pastijin, Petrich [4]研究了幂等分配半环簇，证明其$\dot{D}$，$\overset{+}{D}$都是同余，有$\dot{D}\overset{+}{D}\dot{D}=\dot{D}\vee\overset{+}{D}=\overset{+}{D}\dot{D}\overset{+}{D}$。Zhao [5] [6]等分别对幂等元半环簇的$L$-子簇和$D$-子簇进行了研

究，得到 L-(D-)子簇之间的 Mal'ev 积，给出了其格林关系是同余的充分必要条件。Pastijin [7]等研究了幂等半环乘法半群上的格林 D 关系，给出了乘法半群上格林 D 关系是半环同余的等价条件，随后研究了幂等元半环簇子簇上的格林 D 关系，证明其在任意幂等元半环簇上是最小的格同余。

随后许多学者对幂等元半环簇进行了更为深入的探讨，取得了一些重要的结果。如 Ren [8]等研究了满足附加恒等式 $x^n \approx x$ 的 ai-半环簇，得到了这些簇中半环的乘法半群的格林关系是同余的充要条件。Cheng, Shao [9]用半环上乘法半群格林关系的开同于定义了几种特殊的半环，得到了此类半环簇子簇之间的关系，并给出其 Mal'cev 积。另一方面，也有一些学者研究乘法幂等元半环簇，Vechtomov [10]主要研究乘法幂等元半环，证明了可换的乘法幂等半环簇可由 $3x \approx x$ 和 $3x \approx 2x$ 确定的可换的乘法幂等半环簇生成。Xian, Shao [11]等研究了半环簇 COS_3^+ 的一些子簇，刻画了 COS_3^+ 中半环的格林关系，给出其 $\overset{+}{H}\wedge\dot{L}, \overset{+}{H}\wedge\dot{R}, \overset{+}{H}\wedge\dot{D}, \overset{+}{H}\vee\dot{L}, \overset{+}{H}\vee\dot{R}, \overset{+}{H}\vee\dot{D}$ 关系的等价刻画，得到上述关系是同余的充分必要条件，证明由上述格林关系决定的半环类都是 COS_3^+ 的子簇，本文就是对半环簇 COS_3^+ 的一个推广。练利锋[12]研究了乘法半群是完全正则半群，加法半群是带的半环的格林关系，刻画了半环簇 $CR(n,1)$ 上的 $\dot{D}\wedge\overset{+}{D}, \dot{D}\wedge\overset{+}{L}, \dot{D}\wedge\overset{+}{R}$ 关系，给出了 $\dot{D}\wedge\overset{+}{D}$ 是同余的充分必要条件。同时在 $\bar{C}R(n,1)$ 半环簇[13] (乘法半群是完全正则半群)中给出了 $\dot{L}\wedge\overset{+}{D}, \dot{L}\wedge\overset{+}{R}, \dot{L}\wedge\overset{+}{L}$ 是同余的充分必要条件，并给出其 Mal'cev 积。王爱法[14]研究了乘法半群为完全正则半群加法半群为幂等元半群的半环簇上的格林关系，给出了 $\dot{L}\vee\overset{+}{D}, \dot{L}\vee\overset{+}{R}, \dot{L}\vee\overset{+}{L}, \dot{D}\vee\overset{+}{L}$ 关系是同余关系的充要条件，证明了由上述同余关系确定的半环类都是簇。邵勇，王俊玲[15]等研究了加法导出半群是完全正则半群，乘法导出半群是带的半环上的 $\overset{+}{H}\wedge\dot{L}, \overset{+}{H}\wedge\dot{R}, \overset{+}{H}\wedge\dot{D}, \dot{L}\wedge\overset{+}{L}$ $, \dot{L}\wedge\overset{+}{D}, \overset{+}{L}\wedge\dot{D}, \overset{+}{H}\vee\dot{L}, \overset{+}{H}\vee\dot{R}, \overset{+}{H}\vee\dot{D}$ 关系，给出了以上关系是同余的充分必要条件，并证明了由上述同余关系所确定的半环类是簇。付与琛，邵勇[16]等进一步讨论了加法半群是可换的 Clifford 半群，乘法半群是纯正群的半环上的 $\overset{+}{H}\wedge\dot{L}, \overset{+}{H}\wedge\dot{R}, \overset{+}{H}\wedge\dot{D}, \overset{+}{H}\wedge\dot{H}, \overset{+}{H}\vee\dot{L}, \overset{+}{H}\vee\dot{R}, \overset{+}{H}\vee\dot{D}, \overset{+}{H}\vee\dot{H}$ 关系，得到了以上关系为同余关系的充分必要条件，并证明了由上述同余所确定的半环类都是簇。

文章中出现的 Δ,∇ 分别表示 S 上的恒等关系和泛关系。

2. 预备知识

设半环 S 满足下列附加恒等式：

$$x^n \approx x, \tag{1}$$

$$nx \approx x, \tag{2}$$

$$(x+y)^{n-1} \approx x^{n-1} + y^{n-1}, \tag{3}$$

$$(xy)^{n-1} \approx x^{n-1} y^{n-1}, \tag{4}$$

$$(n-1)(x+y) \approx (n-1)x + (n-1)y. \tag{5}$$

则对任意 $a \in S$，由 $aa^{n-2} = a^{n-1} = a^{n-2}a$ 可知，$(S,\cdot)$ 是完全正则半群。设 V 是一个同型代数类，显然，所有满足等式(1)-(5)的半环的集合构成一个簇，记为 COS_n^+。由文献[2]可知在乘法半群上的格林关系定义如下：

令 S 为半群，$a,b \in S$。则格林关系 L,R 定义如下：

$$aLb \Leftrightarrow S^1a = S^1b,$$
$$aRb \Leftrightarrow aS^1 = bS^1.$$

令 S 为半群，$a,b \in S$。则格林关系 L,R 等价条件如下：

$$aLb \Leftrightarrow \left(\exists x, y \in S^1\right) xa = b, yb = a,$$
$$aRb \Leftrightarrow \left(\exists x, y \in S^1\right) ax = b, by = a.$$

其中，$R \wedge L = H, R \vee L = D$。$H$ 和 D 分别表示 S 上的 Green H-关系和 Green D-关系。

由于半环是(2, 2)型代数，所以在半环$(S,+,\cdot)$上，加法半群$(S,+)$和乘法半群$(S,\cdot)$有各自的一套格林关系。我们用符号 $\dot{L},\dot{R},\dot{D}$ 分别表示半环 S 的乘法半群$(S,\cdot)$上的格林 L,R,D 关系，用 $\overset{+}{L},\overset{+}{R},\overset{+}{D}$ 来分别表示半环 S 的加法半群$(S,+)$上的格林 L,R,D 关系。

对半环簇 COS_n^+ 中半环 S，按照文献[2]分别定义其加法导出和乘法导出上的格林关系如下：

$$\left(\forall a,b \in S\right) a\overset{+}{L}b \Leftrightarrow a = a+\left(n-1\right)b, b = b+\left(n-1\right)a,$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\overset{+}{R}b \Leftrightarrow a = \left(n-1\right)b+a, b = \left(n-1\right)a+b,$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\overset{+}{D}b \Leftrightarrow a = a+\left(n-1\right)\left(b+a\right), b = b+\left(n-1\right)\left(a+b\right),$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\overset{+}{H}b \Leftrightarrow \left(n-1\right)a = \left(n-1\right)b,$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\dot{L}b \Leftrightarrow a = ab^{n-1}, b = ba^{n-1},$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\dot{R}b \Leftrightarrow a = b^{n-1}a, b = a^{n-1}b,$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\dot{D}b \Leftrightarrow a = ab^{n-1}a^{n-1}, b = ba^{n-1}b^{n-1},$$
$$\left(\forall a,b \in S\right) a\dot{H}b \Leftrightarrow a^{n-1} = b^{n-1}.$$

类似文献[11]，容易验证下面引理 2.1、2.2 成立。

引理 2.1 设 $S \in COS_n^+$。则对任意 $a,b \in S$，有：

(i) $a\overset{+}{H}b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = u+\left(n-1\right)v, b = \left(n-1\right)u+v$；

(ii) $a\dot{L}b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = u\left(vu\right)^{n-1}, b = vu^{n-1}$；

(iii) $a\dot{R}b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = \left(uv\right)^{n-1}u, b = u^{n-1}v$；

(iv) $a\dot{D}b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = uv^{n-1}, b = vu^{n-1}$；

(vi) $a\dot{H}b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = u^{n-1}v, b = uv^{n-1}$。

证明 设 $S \in COS_n^+$。我们只证明(i)，其他情况类似可证。如果有 $a\overset{+}{H}b$，设 $u = a, v = b$。那么有 $u+\left(n-1\right)v = a+\left(n-1\right)b = a+\left(n-1\right)a = a$，$\left(n-1\right)u+v = \left(n-1\right)a+b = \left(n-1\right)b+b = nb = b$。反过来，如果 $\exists u,v \in S$，使得 $a = u+\left(n-1\right)v$，$b = \left(n-1\right)u+v$。那么有：

$$\left(n-1\right)a = \left(n-1\right)\left[u+\left(n-1\right)v\right] = \left(n-1\right)u+\left(n-1\right)v,$$
$$\left(n-1\right)b = \left(n-1\right)\left[\left(n-1\right)u+v\right] = \left(n-1\right)u+\left(n-1\right)v.$$

即有$\left(n-1\right)a = \left(n-1\right)b$，所以有 $a\overset{+}{H}b$。

引理 2.2 设 $S \in COS_n^+$。则对任意 $a,b \in S$，有：

(i) $a\left(\overset{+}{H} \wedge \dot{L}\right)b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = u\left(vu\right)^{n-1}+\left(n-1\right)vu^{n-1}, b = \left(n-1\right)u\left(vu\right)^{n-1}+vu^{n-1}$，

(ii) $a\left(\overset{+}{H} \wedge \dot{R}\right)b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = \left(uv\right)^{n-1}u+\left(n-1\right)u^{n-1}v, b = \left(n-1\right)\left(uv\right)^{n-1}u+u^{n-1}v$，

(iii) $a\left(\overset{+}{H} \wedge \dot{D}\right)b \Leftrightarrow \left(\exists u,v \in S\right) a = uv^{n-1}+\left(n-1\right)vu^{n-1}, b = \left(n-1\right)\left(uv\right)^{n-1}+vu^{n-1}$。

证明 设 $S\in COS_n^+$。我们只证明(i)，其他情况类似可证。如果 $a\left(\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\right)b$，我们根据 $a\overset{+}{H}b$ 有 $(n-1)a=(n-1)b$。设 $u=ab^{n-1},v=ba^{n-1}$。那么有：

$$\begin{aligned}u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}&=ab^{n-1}\left(ba^{n-1}ab^{n-1}\right)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\left(ab^{n-1}\right)^{n-1}\\&=ab^{n-1}b^{n-1}a^{n-1}b^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}b^{n-1}\\&=ab^{n-1}+(n-1)ab^{n-1}\\&=ab^{n-1}\\&=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}&=(n-1)ab^{n-1}\left(ba^{n-1}ab^{n-1}\right)^{n-1}+ba^{n-1}\left(ab^{n-1}\right)^{n-1}\\&=(n-1)ab^{n-1}b^{n-1}a^{n-1}b^{n-1}+ba^{n-1}b^{n-1}\\&=(n-1)ab^{n-1}+ba^{n-1}b^{n-1}\\&=(n-1)b+b\\&=b\end{aligned}$$

相反，如果有 $u,v\in S$ 并且让 $a=u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}$，$b=(n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}$。那么有 $a\overset{+}{H}b$，并且有：

$$\begin{aligned}ab^{n-1}&=\left(u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right)\left[(n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}\right]^{n-1}\\&=\left(u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right)\left((n-1)u^{n-1}(vu)^{n-1}+v^{n-1}u^{n-1}\right)\\&=(n-1)uv^{n-1}u^{n-1}+uv^{n-1}u^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\\&=uv^{n-1}u^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\\&=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ba^{n-1}&=\left((n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}\right)\left[u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right]^{n-1}\\&=(n-1)uv^{n-1}u^{n-1}+(n-1)uv^{n-1}u^{n-1}+vu^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\\&=(n-1)uv^{n-1}u^{n-1}+vu^{n-1}\\&=b\end{aligned}$$

即 $a\overset{\cdot}{L}b$，所以有 $a\left(\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\right)b$。

定理 2.3 设 $S\in COS_n^+$。那么有：

(i) $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足等式：

$$\begin{aligned}&z\left(x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\right)\left(z\left((n-1)x(yx)^{n-1}+yx^{n-1}\right)\right)^{n-1}\\&\approx z\left(x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\right),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\left(z+x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\right)\left(z+(n-1)x(yx)^{n-1}+yx^{n-1}\right)^{n-1}\\&\approx z+x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1},\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\left(x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}+z\right)\left((n-1)x(yx)^{n-1}+yx^{n-1}+z\right)^{n-1}\\&\approx x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}+z.\end{aligned}\tag{8}$$

(ii) $\overset{+}{H} \wedge \dot{R} \in Con(S) \Leftrightarrow S$ 满足等式：

$$\left(\left((n-1)(xy)^{n-1}x+x^{n-1}y\right)z\right)^{n-1}\left((xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}yz\right) \approx (xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}yz,$$

$$\left((n-1)(xy)^{n-1}x+x^{n-1}y+z\right)^{n-1}\left((xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}y+z\right) \approx (xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}y+z,$$

$$\left(z+(n-1)(xy)^{n-1}x+x^{n-1}y\right)^{n-1}\left(z+(xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}y\right) \approx z+(xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}y.$$

(iii) $\overset{+}{H} \wedge \dot{D} \in Con(S) \Leftrightarrow S$ 满足等式：

$$\left(xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}+z\right)\left[\left((n-1)xy^{n-1}+yx^{n-1}+z\right)\left(xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}+z\right)\right]^{n-1}$$
$$\approx xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}+z,$$
$$\left(z+xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\right)\left[\left(z+xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\right)\left(z+(n-1)xy^{n-1}+yx^{n-1}\right)\right]^{n-1}$$
$$\approx z+xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}.$$

证明 这里我们只证明(i)。(ii)和(iii)可类似得出。如果 $\overset{+}{H} \wedge \dot{L} \in Con(S)$，由引理 2.2 (i)可得，对任意的 $a,b,c \in S$ ，有 $a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\left(\overset{+}{H} \wedge \dot{L}\right)(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}$ 。因此有：

$$\left(c\left(a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\right)\right)\dot{L}\left(c\left((n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}\right)\right),$$
$$\left(c+a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\right)\dot{L}\left(c+(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}\right),$$
$$\left(a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}+c\right)\dot{L}\left((n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}+c\right).$$

即：

$$c\left(a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\right)\left(c\left((n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}\right)\right)^{n-1} \approx c\left(a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\right),$$
$$\left(c+a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\right)\left(c+(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}\right)^{n-1} \approx c+a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1},$$
$$\left(a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}+c\right)\left((n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}+c\right)^{n-1} \approx a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}+c.$$

因此，S 满足(6)~(8)。

相反，如果 S 满足(6)~(8)。设 $a,b \in S$ ，$a\left(\overset{+}{H} \wedge \dot{L}\right)b$ 。那么由引理 2.2 (i)可得 $\exists u,v \in S$ 使得 $a=u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}$ ，$b=(n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}$ 。所以，对任意的 $c \in S$ 有：

$$c\left(u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right)\left(c\left((n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}\right)\right)^{n-1}=c\left(u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right),$$
$$\left(c+u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}\right)\left(c+(n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}\right)^{n-1}=c+u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1},$$
$$\left(u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}+c\right)\left((n-1)u(vu)^{n-1}+vu^{n-1}+c\right)^{n-1}=u(vu)^{n-1}+(n-1)vu^{n-1}+c.$$

即 $(ca)(cb)^{n-1}=ca$ ，$(c+a)(c+b)^{n-1}=c+a$ ，$(a+c)(b+c)^{n-1}=a+c$ 。

对称地，有 $(cb)(ca)^{n-1}=cb$ ，$(c+b)(c+a)^{n-1}=c+b$ ，$(b+c)(a+c)^{n-1}=b+c$ 。也就是说，$ca\,\dot{L}\,cb$ ，$(c+a)\dot{L}(c+b)$ ，$(a+c)\dot{L}(b+c)$ 。因此，$\dot{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的左同余，$(S,+)$ 上的同余。又因为 $\dot{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的

右同余。所以，$\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\in Con(S)$。

推论 2.4 设 $S\in COS_n^+$。则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\approx(n-1)x(yx)^{n-1}+yx^{n-1}.$$

(ii) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{R}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$(xy)^{n-1}x+(n-1)x^{n-1}y\approx(n-1)(xy)^{n-1}x+x^{n-1}y.$$

(iii) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{D}=\Delta\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$xy^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\approx(n-1)xy^{n-1}.$$

证明 这里我们只证明(i)。(ii)和(iii)可类似得出。假设 $\forall a,b\in S$，有 $a\left(\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\right)b$，且 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}=\Delta$，则有：

$$a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}=a+(n-1)b,$$
$$(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}=nb=b.$$

又因为 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}=\Delta$，所以有 $a=b$。即 $x(yx)^{n-1}+(n-1)yx^{n-1}\approx(n-1)x(yx)^{n-1}+yx^{n-1}$。

反之，假设 $S\in COS_n^+$ 且满足(i)中等式，即对 $\forall a,b\in S$ 有 $a\left(\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}\right)b$ 且满足 $a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}\approx(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}$，则有

$$a(ba)^{n-1}+(n-1)ba^{n-1}=a+(n-1)b,$$
$$(n-1)a(ba)^{n-1}+ba^{n-1}=nb.$$

又因为 $a+(n-1)b=nb=b+(n-1)b$，所以有 $a=b$。即 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}=\Delta$。

由半环簇 COS_n^+ 中半环格林关系的定义，容易得到下列推论 2.5 成立：

推论 2.5 设 $S\in COS_n^+$。则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$(n-1)x\approx(n-1)y.$$

(ii) S 满足 $\overset{\cdot}{L}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$xy^{n-1}\approx x.$$

(iii) S 满足 $\overset{\cdot}{R}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$y^{n-1}x\approx x.$$

(iv) S 满足 $\overset{\cdot}{D}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式；

$$xy^{n-1}x^{n-1}\approx x.$$

以下推论的证明比较简单，故省略。

推论 2.6 设 $S\in COS_n^+$。则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\overset{\cdot}{L}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式；

$$(n-1)x\approx(n-1)y,$$
$$x\approx xy^{n-1}.$$

(ii) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\dot{R}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$(n-1)x\approx(n-1)y,$$
$$x\approx y^{n-1}x.$$

(iii) S 满足 $\overset{+}{H}\wedge\dot{D}=\nabla\Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$(n-1)x\approx(n-1)y,$$
$$x\approx x(yx)^{n-1}.$$

3. 主要结果

引理 3.1 对任意 $S\in COS_n^+$，有下列等式成立：

(i) $\overset{+}{H}\vee\dot{L}=\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}$；

(ii) $\overset{+}{H}\vee\dot{R}=\overset{+}{H}\dot{R}\overset{+}{H}$；

(iii) $\overset{+}{H}\vee\dot{D}=\overset{+}{H}\dot{D}\overset{+}{H}$；

(iv) $\overset{+}{H}\vee\dot{H}=\overset{+}{H}\dot{H}\overset{+}{H}$。

证明只需证(i)，其他等式类似可证。由文献[2]中命题 1.5.11，可得 $\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}\subseteq\overset{+}{H}\vee\dot{L}$。下面为了证明 $\overset{+}{H}\vee\dot{L}\subseteq\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}$。只需证明 $\dot{L}\overset{+}{H}\dot{L}\subseteq\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}$。设 $a,b\in S$，且 $a\dot{L}\overset{+}{H}\dot{L}b$，那么存在 $c,d\in S$ 使得 $a\dot{L}c\overset{+}{H}d\dot{L}b$，又由于 $\overset{+}{H}$ 是半环同余，所以有：

$$a=ac^{n-1}\overset{+}{H}ad^{n-1},$$
$$b=bd^{n-1}\overset{+}{H}bc^{n-1},$$
$$a=ac^{n-1}\overset{+}{H}ad^{n-1}c^{n-1}.$$

由 $a\dot{L}c$ 可得 $ad^{n-1}c^{n-1}\dot{L}cd^{n-1}c^{n-1}$。由 $b\dot{L}d$ 可得 $bc^{n-1}\dot{L}dc^{n-1}$。所以有 $a\overset{+}{H}ad^{n-1}c^{n-1}\dot{L}cd^{n-1}c^{n-1}\dot{L}dc^{n-1}\dot{L}bc^{n-1}\overset{+}{H}b$。则有 $\dot{L}\overset{+}{H}\dot{L}\subseteq\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}$，进而有 $\overset{+}{H}\vee\dot{L}\subseteq\overset{+}{H}\dot{L}\overset{+}{H}$。

引理 3.2 对于任意 $S\in COS_n^+$，则对于任意 $a,b\in S$，有以下等式成立：

(i) $a\left(\overset{+}{H}\vee\dot{L}\right)b\Leftrightarrow\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{H}_a,\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_b$；

(ii) $a\left(\overset{+}{H}\vee\dot{R}\right)b\Leftrightarrow\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_a,\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{H}_b$；

(iii) $a\left(\overset{+}{H}\vee\dot{D}\right)b\Leftrightarrow\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{H}_a,\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_b$。

证明 设 $S\in COS_n^+$。我们只证明(i)，其他情况类似可证。

若 $a,b\in S$ 使得 $a\left(\overset{+}{H}\vee\dot{L}\right)b$，则由引理 3.1 (i)可知，存在 $c,d\in S$ 使得 $a\overset{+}{H}c\dot{L}d\overset{+}{H}b$。所以有 $ab^{n-1}\overset{+}{H}cb^{n-1}$，$cd^{n-1}\overset{+}{H}ad^{n-1}$。由以上可得 $a\overset{+}{H}c=cd^{n-1}\overset{+}{H}cb^{n-1}\overset{+}{H}ab^{n-1}$。因此，$\overset{+}{H}_a=\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}$，对称地，有 $\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_b$。

反之，若对任意 $a,b\in S$，$\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{H}_a$，$\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_b$，则 $a\overset{+}{H}ab^{n-1}\dot{L}ba^{n-1}b^{n-1}\overset{+}{H}b$，即 $a\overset{+}{H}c\dot{L}d\overset{+}{H}b$，由引理 3.1(i)可知，$a\left(\overset{+}{H}\vee\dot{L}\right)b$。

引理 3.3 对于任意 $S\in COS_n^+$，则有：

(i) $\overset{+}{H}\vee\dot{L}\in Con(S)\Leftrightarrow\dot{L}_{S/\overset{+}{H}}$ 为 $S/\overset{+}{H}$ 上的同余；

(ii) $\overset{+}{H}\vee \dot{R}\in Con(S)\Leftrightarrow \dot{R}_{S/\overset{+}{H}}$ 为 $S/\overset{+}{H}$ 上的同余；

(iii) $\overset{+}{H}\vee \dot{D}\in Con(S)\Leftrightarrow \dot{D}_{S/\overset{+}{H}}$ 为 $S/\overset{+}{H}$ 上的同余。

引理 3.4 对于任意 $S\in COS_n^+$，则有：

(i) $\dot{L}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$z\left(x\left(yx\right)^{n-1}\right)\left(z\left(yx^{n-1}\right)\right)^{n-1}\approx z\left(x\left(yx\right)^{n-1}\right), \tag{9}$$

$$\left(z+x\left(yx\right)^{n-1}\right)\left(z+yx^{n-1}\right)^{n-1}\approx z+x\left(yx\right)^{n-1}, \tag{10}$$

$$\left(x\left(yx\right)^{n-1}+z\right)\left(yx^{n-1}+z\right)^{n-1}\approx x\left(yx\right)^{n-1}+z. \tag{11}$$

(ii) $\dot{R}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$\left(\left(xy\right)^{n-1}xz\right)^{n-1}\left(x^{n-1}yz\right)\approx x^{n-1}yz,$$

$$\left(z+\left(xy\right)^{n-1}x\right)^{n-1}\left(z+x^{n-1}y\right)\approx z+x^{n-1}y,$$

$$\left(\left(xy\right)^{n-1}x+z\right)^{n-1}\left(x^{n-1}y+z\right)\approx x^{n-1}y+z.$$

(iii) $\dot{D}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$\left(z+xy^{n-1}\right)\left(\left(z+yx^{n-1}\right)\left(z+xy^{n-1}\right)\right)^{n-1}\approx z+xy^{n-1},$$

$$\left(xy^{n-1}+z\right)\left(\left(yx^{n-1}+z\right)\left(xy^{n-1}+z\right)\right)^{n-1}\approx xy^{n-1}+z.$$

证明 设 $S\in COS_n^+$。我们只证明(i)，其他情况类似可证。由引理 2.1 (ii)可得，对任意 $a,b\in S$ $a\left(ba\right)^{n-1}\dot{L}\,ba^{n-1}$。如果 $\dot{L}\in Con(S)$，那么对所有的 $c\in S$ 有：

$$c\left(a\left(ba\right)^{n-1}\right)\dot{L}\,c\left(ba^{n-1}\right),$$

$$\left(c+a\left(ba\right)^{n-1}\right)\dot{L}\left(c+ba^{n-1}\right),$$

$$\left(a\left(ba\right)^{n-1}+c\right)\dot{L}\left(ba^{n-1}+c\right).$$

即：

$$c(a\left(ba\right)^{n-1})(c(ba^{n-1}))^{n-1}\approx c\left(a\left(ba\right)^{n-1}\right),$$

$$\left(c+a\left(ba\right)^{n-1}\right)\left(c+ba^{n-1}\right)^{n-1}\approx c+a\left(ba\right)^{n-1},$$

$$\left(a\left(ba\right)^{n-1}+c\right)\left(ba^{n-1}+c\right)^{n-1}\approx a\left(ba\right)^{n-1}+c.$$

所以，S 满足等式(9)~(11)。反之，若 S 满足等式(9)~(11)，设 $a,b\in S$， $a\,\dot{L}\,b$，那么由引理 2.1 (ii)可得，存在 $u,v\in S$ 使得 $a=u\left(va\right)^{n-1},b=vu^{n-1}$。进而对任意的 $c\in S$ 有：

$$c\left(u\left(vu\right)^{n-1}\right)\left(c\left(vu^{n-1}\right)\right)^{n-1}=c\left(u\left(vu\right)^{n-1}\right),$$

$$\left(c+u\left(vu\right)^{n-1}\right)\left(c+vu^{n-1}\right)^{n-1}=c+u\left(vu\right)^{n-1},$$

$$\left(u\left(vu\right)^{n-1}+c\right)\left(vu^{n-1}+c\right)^{n-1}=u\left(vu\right)^{n-1}+c.$$

即 $(ca)(cb)^{n-1}=ca$，$(c+a)(c+b)^{n-1}=c+a$ 和 $(a+c)(b+c)^{n-1}=a+c$。对称地，$(cb)(ca)^{n-1}=cb$，$(c+b)(c+a)^{n-1}=c+b$ 和 $(b+c)(a+c)^{n-1}=b+c$。进而有 $ca\,\dot{L}\,cb$，$(c+a)\dot{L}(c+b)$ 和 $(a+c)\dot{L}(b+c)$。由此可得，$\dot{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的左同余，$(S,+)$ 上的同余。又因为 $\dot{L}$ 是 $(S,\cdot)$ 上的右同余，所以有 $\dot{L}$ 是 S 上的同余。

定理 3.5 假设 $S\in COS_n^+$，则有：

(i) $\overset{+}{H}\vee\dot{L}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$(n-1)z\left(xy^{n-1}x^{n-1}\right)\left(z\left(yx^{n-1}\right)\right)^{n-1}\approx(n-1)z\left(xy^{n-1}x^{n-1}\right), \tag{12}$$

$$(n-1)\left(z+xy^{n-1}x^{n-1}\right)\left(z+yx^{n-1}\right)^{n-1}\approx(n-1)\left(z+xy^{n-1}x^{n-1}\right), \tag{13}$$

$$(n-1)\left(xy^{n-1}x^{n-1}+z\right)\left(yx^{n-1}+z\right)\approx(n-1)\left(xy^{n-1}x^{n-1}+z\right). \tag{14}$$

(ii) $\overset{+}{H}\vee\dot{R}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$(n-1)\left(\left(x^{n-1}y\right)z\right)^{n-1}z\left(x^{n-1}y^{n-1}x\right)\approx(n-1)\left(x^{n-1}y^{n-1}x\right)z,$$

$$(n-1)\left(z+x^{n-1}y\right)^{n-1}\left(z+x^{n-1}y^{n-1}x\right)\approx(n-1)\left(z+x^{n-1}y^{n-1}x\right),$$

$$(n-1)\left(x^{n-1}y+z\right)^{n-1}\left(x^{n-1}y^{n-1}x+z\right)\approx(n-1)\left(x^{n-1}y^{n-1}x+z\right).$$

(iii) $\overset{+}{H}\vee\dot{D}\in Con(S)\Leftrightarrow S$ 满足以下恒等式：

$$(n-1)\left(z+xy^{n-1}\right)\left(z+yx^{n-1}\right)^{n-1}\left(z+xy^{n-1}\right)^{n-1}\approx(n-1)\left(z+xy^{n-1}\right),$$

$$(n-1)\left(xy^{n-1}+z\right)\left(yx^{n-1}+z\right)^{n-1}\left(xy^{n-1}+z\right)^{n-1}\approx(n-1)\left(xy^{n-1}+z\right).$$

证明 我们只证明(i)，其他情况类似可证。如果 $\overset{+}{H}\vee\dot{L}\in Con(S)$，由引理 3.3 (i)可 $a,b,c\in S$，有：

$$\overset{+}{H}_{c\left(ab^{n-1}a^{n-1}\right)\left(c\left(ba^{n-1}\right)\right)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{c\left(ab^{n-1}a^{n-1}\right)},$$

$$\overset{+}{H}_{\left(c+ab^{n-1}a^{n-1}\right)\left(c+ba^{n-1}\right)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{c+ab^{n-1}a^{n-1}},$$

$$\overset{+}{H}_{\left(ab^{n-1}a^{n-1}+c\right)\left(ba^{n-1}+c\right)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{ab^{n-1}a^{n-1}+c}.$$

进而有：

$$(n-1)c\left(ab^{n-1}a^{n-1}\right)\left(c\left(ba^{n-1}\right)\right)^{n-1}=(n-1)c\left(ab^{n-1}a^{n-1}\right),$$

$$(n-1)\left(c+ab^{n-1}a^{n-1}\right)\left(c+ba^{n-1}\right)^{n-1}=(n-1)\left(c+ab^{n-1}a^{n-1}\right),$$

$$(n-1)\left(ab^{n-1}a^{n-1}+c\right)\left(ba^{n-1}+c\right)^{n-1}=ab^{n-1}a^{n-1}+c.$$

所以，S 满足等式(12)~(14)。反之，如果 S 满足恒等式(12)~(14)，则有 $\overset{+}{H}_{\left(c+ab^{n-1}a^{n-1}\right)\left(c+ba^{n-1}\right)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{c+ab^{n-1}a^{n-1}}$；$\overset{+}{H}_{\left(ab^{n-1}a^{n-1}+c\right)\left(ba^{n-1}+c\right)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{ab^{n-1}a^{n-1}+c}$。由引理 3.4 (i)可知，$\dot{L}$ 是 $S/\overset{+}{H}$ 上的同余。由引理 3.3 (i)可得，$\overset{+}{H}\vee\dot{L}\in Con(S)$。

推论 3.6 假设 $S\in COS_n^+$，则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H}\vee\dot{L}=\nabla$，即满足 $\overset{+}{H}_{ab^{n-1}}=\overset{+}{H}_{a}\Leftrightarrow S$ 满足等式 $(n-1)xy^{n-1}\approx(n-1)x$。

(ii) S 满足 $\overset{+}{H}\vee\dot{R}=\nabla$，即满足 $\overset{+}{H}_{ba^{n-1}}=\overset{+}{H}_{a}\Leftrightarrow S$ 满足等式 $(n-1)y^{n-1}x\approx(n-1)x$。

(iii) S 满足 $\overset{+}{H}\vee\dot{D}=\nabla$，即满足 $\overset{+}{H}_{a(ba)^{n-1}}=\overset{+}{H}_{b(ab)^{n-1}}\Leftrightarrow S$ 满足等式 $(n-1)x(yx)^{n-1}\approx(n-1)y(xy)^{n-1}$。

由引理 2.1 容易得到下列推论成立：

推论 3.7 假设 $S \in COS_n^+$，则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足等式 $x + (n-1)y \approx (n-1)x + y$。

(ii) S 满足 $\dot{L} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足等式 $x(yx)^{n-1} \approx yx^{n-1}$。

(iii) S 满足 $\dot{R} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足等式 $(xy)^{n-1} x \approx x^{n-1} y$。

(iii) S 满足 $\dot{D} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足等式 $xy^{n-1} \approx yx^{n-1}$。

推论 3.8 假设 $S \in COS_n^+$，则有：

(i) S 满足 $\overset{+}{H} \vee \dot{L} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$x + (n-1)y \approx (n-1)x + y,$$
$$x(yx)^{n-1} \approx yx^{n-1}.$$

(ii) S 满足 $\overset{+}{H} \vee \dot{R} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$x + (n-1)y \approx (n-1)x + y,$$
$$(xy)^{n-1} x \approx x^{n-1} y.$$

(iii) S 满足 $\overset{+}{H} \vee \dot{D} = \Delta \Leftrightarrow S$ 满足下列等式：

$$x + (n-1)y \approx (n-1)x + y,$$
$$xy^{n-1} \approx yx^{n-1}.$$

4. 总结分析

本文主要研究了半环簇 COS_n^+ 中半环的格林关系，得到此类半环簇中格林关系的等价刻画，证明了由格林关系决定的半环类构成了特定的子簇。

其中格林关系从半群理论发展而来，并在半环理论中找到重要的应用，特别是在自动机理论，图论和组合数学等领域。随着研究的深入，格林关系的思想可能在环、模、代数群、范畴论以及偏序集等其他代数结构中得到进一步推广。例如在模理论中，格林关系的推广可以用于分类模的元素。特别是，对于自由模或者投射模等特定类型的模，格林关系可以帮助研究其生成集和同构关系。这一类研究可以为模结构提供新的视角。因此通过引入格林关系，研究者能够更加系统地研究这些结构中的等价性问题，提供更简洁，有效的分析工具，从而推动代数结构理论的更进一步发展。

参考文献

[1] Burris, S. and Sankappanavar, H.P. (1981) A Course in Universal Algebra. Springer.

[2] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford Science Publication.

[3] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely Regular Semigroup. Wiley.

[4] Pastijin, F. (1983) Idempotent Distributive Semirings II. *Semigroup Forum*, **26**, 151-166. https://doi.org/10.1007/bf02572828

[5] Zhao, X.Z., Shum, K.P. and Guo, Y.Q. (2001) *L*-Subvarieties of the Variety of Idempotent Semirings. *Algebra Universalis*, **46**, 75-96. https://doi.org/10.1007/pl00000348

[6] Zhao, X.Z., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2002) *D*-Subvarieties of the Variety of Idempotent Semirings. *Algebra Colloquium*, **9**, 15-28.

[7] Pastijn, F. and Zhao, X.Z. (2000) Green's *D*-Relation for the Multiplication Reduct of an Idempotent Semiring. *Aechivum Mathematicum*, **36**, 77-93.

[8] Ren, M.M., Zhao, X.Z. and Shao, Y. (2016) On a Variety of Burnside AI-Semirings Satisfying $x^n \approx x$. *Semigroup Forum*, **93**, 501-515. https://doi.org/10.1007/s00233-016-9819-4

[9] Cheng, Y.L. and Shao, Y. (2020) Semiring Varieties Related to Multiplicative Green's Relations on a Semiring. *Semigroup Forum*, **101**, 571-584. https://doi.org/10.1007/s00233-020-10108-3

[10] Vechtomov, E.M. and Prtrov, A.A. (2015) Multiplicatively Idempotent Semirings. *Journal of Mathematical Sciences*, **206**, 634-653. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2340-6

[11] Xian, X.L. Shao, Y. and Wang, J.L. (2021) Some Subvarieties of Semiring Variety COS_3^+. *AIMS Mathematics*, **7**, 4293-4303. https://doi.org/10.3934/math.2022237

[12] 练利锋. 半环类 $CR(n,1)$ 上的格林 D-关系[J]. 兰州理工大学学报, 2019, 45(3): 164-167.

[13] 练利锋, 任苗苗, 陈益智. 关于一类半环上的格林关系的若干研究[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014, 30(4): 420-427.

[14] 王爱法. 满足某些恒等式的半环上的格林关系[J]. 西南大学学报, 2017, 39(12): 67-73.

[15] 王俊玲, 邵勇. 一类乘法幂等半环的格林关系[J]. 山东大学学报, 2022, 57(6): 15-22.

[16] 付钰琛, 邵勇. 半环簇 $COS_n^{\cdot}$ 的一些子簇[J]. 山东大学学报, 2024, 59(4): 31-37.