

亲和矩阵图卷积子空间聚类

李丹阳, 王伟, 唐科威

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年10月15日; 录用日期: 2024年11月14日; 发布日期: 2024年11月27日

摘要

子空间聚类是聚类来源于底层子空间的数据的一个高效的方法。在近些年, 基于谱聚类的方法成为了最受欢迎的子空间聚类方法之一。新近提出的自适应图卷积子空间聚类方法受图卷积网络的启发, 使用图卷积技术去设计了新的特征提取的方法和系数矩阵的约束, 取得了优异的效果。但其需要重构系数矩阵满足对称和非负的条件, 这会限制重构系数矩阵的表示能力。为了克服这一缺陷, 本文改为直接约束由重构系数矩阵生成的亲和矩阵, 亲和矩阵天然具有对称和非负的性质, 进而设计了亲和矩阵图卷积子空间聚类算法。不仅克服了求解模型的困难之处, 还进行了对比实验在四个基准数据集上以此论证本文方法的有效性。

关键词

子空间聚类, 图卷积, 亲和矩阵, 基于谱聚类的方法

Affinity Matrix Graph Convolution Subspace Clustering

Danyang Li, Wei Wang, Kewei Tang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 15th, 2024; accepted: Nov. 14th, 2024; published: Nov. 27th, 2024

Abstract

Subspace clustering is an efficient method for clustering data derived from the bottom level subspace. In recent years, spectral clustering based methods have become one of the most popular subspace clustering methods. The recently proposed adaptive graph convolution subspace clustering method is inspired by graph convolutional networks and uses graph convolution techniques to design new feature extraction methods and constraints on coefficient matrices, achieving excellent results. But it requires the reconstruction coefficient matrix to satisfy symmetric and non negative

conditions, which limits the representational power of the reconstructed coefficient matrix. To overcome this limitation, this paper proposes to directly constrain the affinity matrix generated from the reconstructed coefficient matrix, which naturally has symmetric and non negative properties. Therefore, an affinity matrix graph convolution subspace clustering algorithm is designed. Not only did it overcome the difficulties in solving the model, but it also conducted comparative experiments on four benchmark datasets to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords

Subspace Clustering, Graph Convolution, Affinity Matrix, Method Based on Spectral Clustering

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

子空间聚类是聚类分析在数据挖掘领域的关键技术之一，在许多计算机视觉和机器学习的问题中，子空间聚类一直起着重要的作用。高维数据聚类是其重点与难点。而子空间聚类的目标就是将高维数据样本进行分割，划分其进入对应的底层子空间，可以看作数据是从多个低维子空间中提取的，每个子空间对应一个类别。

在过去的几十年中，不同类型的子空间聚类方法接连被提出[1]-[7]。在许多实际问题中，基于谱聚类的方法展现了极好的表现，因此引发了学者们的广泛关注。

在不失一般性的前提下，基于谱聚类的方法的框架分为三步：首先，计算数据集的线性重构系数矩阵

$C \in R^{n \times n}$ ；接着，使用获得的重构系数矩阵构建亲和矩阵 $W = \frac{|C| + |C^T|}{2}$ ，其中 $|C|$ 表示 C 的绝对值， C^T

表示 C 的转置；最后，通过使用基于谱聚类的方法(如归一化切割(Normalized cuts, N-cuts))获得分割结果[8]。不同类型方法的主要区别是使用了不同的正则化器去生成有独特特征的系数矩阵[2]。经典的基于谱聚类的算法聚焦于设计重构系数矩阵 C 的约束，以此帮助 C 携带确切的特征并且希望 C 能够准确的揭示原始数据集的内在结构。例如，低秩表示(Low-Rank Representation, LRR)通过最小化 C 的核范数来揭示数据的全局结构[5]。稀疏表示(Sparse Subspace Clustering, SSC)通过引入了稀疏约束 $\|C\|_1$ 去追求稀疏的重构系数矩阵[6]。最小二乘回归(Least Square Regression, LSR)定义了 $\|C\|_F^2$ ，目标是去寻找稠密的重构系数矩阵[3]。光滑表示(Smooth Representation, SMR)引入了强制分组效应条件，定义了新的亲和矩阵表示方法[4]。块对角表示(Block Diagonal Representation, BDR)通过最小化系数矩阵的拉普拉斯算子的最小的 k 个奇异值之和 $\|C\|_{\square}$ 从而获得一个具有 k 个块对角的重构系数矩阵[5]。幂等表示(Idempotent Representation, IDR)设计了一种新的幂等约束 $\|C\|_{id}$ ，为了追求使重构系数矩阵逼近归一化的隶属矩阵[2]，添加了约束条件 $1_n^T C = 1_n^T, C = C^T, C \geq 0$ 使幂等矩阵具备理想形式[9]-[11]。自适应图卷积子空间聚类(Adaptive Graph Convolutional Subspace Clustering, AGCSC)使用图卷积技术开发了一种特征提取方法和系数矩阵的约束 $\|2F - (C + I)X\|_F^2$ ，此外图卷积算子是自适应迭代更新的[1]。虽然上述经典的表示方法在应对实际子空间聚类任务时均展现出了不俗的成效，然而，它们所生成的系数矩阵却依然存在着一些缺陷。通常，由 SSC 方法获得的重构系数矩阵因过度稀疏导致了子空间内部缺乏连接性。相比之下，BDR 方法因构建的重构系数矩阵块与块之间的连接不充分可能产生不准确的聚类结果[7]。LRR 与 LSR 则另辟蹊径，它们构造的稠密系数矩阵确保了子空间之间的紧密连通，但代价是子空间的样本系数普遍呈现非零状态，这在一

一定程度上增加了处理的复杂性。理想的重构系数矩阵应是块对角的，每个块表示一个子空间，且块与块之间应是充分连接的。由于基于谱聚类的方法假设原始数据样本服从自表达性，也就是说每个数据点都可以在可允许的误差范围内，通过给定数据集的点的线性组合来线性重构。在基于谱聚类的算法中，获得的重构系数矩阵 C 可以被用于定义亲和矩阵 $W = \frac{|C| + |C^T|}{2}$ 。而基于谱聚类的方法已经假设原始数据样本是服从自表达性的，如果强加一些额外的约束在 C 上，如 $C = C^T$ ， $C \geq 0$ ，显然会限制重构系数矩阵的表示能力。为了改变这一状况，我们提出了亲和矩阵图卷积子空间聚类(AMGCSC)。本文算法去掉了重构系数矩阵 C 上的限制，直接约束亲和矩阵 W ，可以很好克服 AGCSC 在表达能力上的缺陷。在本文中，我们就 AMGCSC 与一些相关算法进行了对比，特别是与 AGCSC 的对比，以展示 AMGCSC 的优势。最后在人造数据集和真实数据集进行了大量的实验展示了 AMGCSC 的有效性。

2. 自适应图卷积子空间聚类回顾

为了更好的说明我们的算法，将本文使用到的主要符号列在表 1。

Table 1. Main symbols used in this paper

表 1. 本文使用的主要符号

符号	含义
n	样本的数量
k	子空间的个数
d	样本的维数
$C \in R^{n \times n}$	重构系数矩阵
$W \in R^{n \times n}$	由 C 构建的亲和矩阵
$1_n \in R^{n \times 1}$	有 n 个元素的列向量且每个元素为 1
$\text{diag}(C)$	矩阵 C 的对角元构成的向量
$\ W\ _\infty$	$\ W\ _\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} w_{ij} $
$\ W\ _F^2$	$\ W\ _F^2 = \sum_{i, j=1}^n w_{ij} ^2$

本文算法 AMGCSC 是对 AGCSC 的不足提出的改进，因此在介绍我们的算法之前，先对 AGCSC 进行简要回顾。

假设数据集 $X = [X_1, X_2, \dots, X_k] \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ，其中 X_i 包含来自第 i 个子空间的 n_i 个数据点。在基于谱聚类的算法中，获得的重构系数矩阵 C 可以被用于定义亲和矩阵 $W = \frac{|C| + |C^T|}{2}$ 。如果强加一些额外的约束在 C 上，如 $C = C^T$ ， $C \geq 0$ ，那么就有 $W = C$ 。此外，如果 C 满足 $C1 = 1$ 和 $\text{diag}(C) = 0$ ，然后有 $\tilde{W} = W + I = C + I$ 和 $\tilde{D} = 2I$ ，其中 $1 \in \mathbb{R}^{n \times 1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ， $\text{diag}(C)$ 是 C 的块对角向量。最后，推导图卷积算子 $S = \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \tilde{A} \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} = \frac{C + I}{2}$ 。

在 S 被定义之后，得到原始数据矩阵新的表示 $F = SX = \frac{1}{2}(C + I)X \Rightarrow 2F = (C + I)X$ 。类似于 AGCSC，使用 F 去重构 X 并且希望 C 也成为重构系数矩阵，即 $X = CF$ 。计算 C 的新表示

$SC = \frac{1}{2}(C+I)C = \frac{1}{2}(C^2+C)$ ，由于 SC 与 C 有相似的特征，故定义关于 C 的约束 $\|C - SC\|_F^2 = \left\| C - \frac{1}{2}(C^2+C) \right\|_F^2 = \left\| \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C^2 \right\|_F^2 = \frac{1}{4}\|C - C^2\|_F^2$ 。

通过整合上面这些定义，构建 AGCSC 模型如下：

$$\begin{aligned} \min_{F,C} \quad & \|2F - (C+I)X\|_F^2 + \alpha\|X - CF\|_F^2 + \beta\|C - C^2\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & C = C^T, C1 = 1, C \geq 0, \text{diag}(C) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 α 和 β 是两个正参数。

3. 亲和矩阵图卷积子空间聚类

通过第二章的回顾，我们发现为了获得理想的重构系数矩阵，需要施以对称和非负的限制条件，但是根据文章[5]，对称和非负的约束会限制重构系数矩阵的表示能力。然而，亲和矩阵直接具有对称和非负的性质，故本文尝试直接约束亲和矩阵来克服该缺陷。

3.1. AMGCSC 模型

根据前面的分析，我们直接将模型(1)中的重构系数矩阵替换为亲和矩阵，得到亲和矩阵图卷积子空间聚类(AMGCSC)方法，模型如下：

$$\begin{aligned} \min_{F,W,C} \quad & \|2F - (W+I)X\|_F^2 + \alpha\|X - WF\|_F^2 + \beta\|C - C^2\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & W = \frac{|C| + |C^T|}{2}, W1 = 1, \text{diag}(W) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

相对于 AGCSC 方法，我们的方法无需对重构系数矩阵施加额外限制，从而能够更好地挖掘数据间的关系。但是这也增加了模型求解上的难度，不过我们克服了这个难题。

3.2. 数值解法

类似于解决现存的大部分子空间聚类问题，我们使用交替最小化迭代(Alternating Direction Method, ADM) [12]来解决 AMGCSC 问题。

首先我们将问题(2)转换为如下等价问题：

$$\begin{aligned} \min_{F,W,C,Z,G,A} \quad & \|2F - (W+I)X\|_F^2 + \alpha\|X - WF\|_F^2 + \beta\|C - CZ\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & C = Z, W1 = 1, W = \frac{G+G^T}{2}, \text{diag}(G) = 0, G = |A|, A = C, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 Z, G, A 是辅助变量。问题(3)对应的增广拉格朗日函数定义如下：

$$\begin{aligned} \ell = & \|2F - (W+I)X\|_F^2 + \alpha\|X - WF\|_F^2 + \beta\|C - CZ\|_F^2 + \text{tr}(Y_1^T(C-Z)) + \text{tr}(Y_2^T(W1-1)) \\ & + \text{tr}\left(Y_3^T\left(W - \frac{G+G^T}{2}\right)\right) + \text{tr}(Y_4^T(G-|A|)) + \text{tr}(Y_5^T(A-C)) \\ & + \frac{\mu}{2}\left(\|C - Z\|_F^2 + \|W1 - 1\|_F^2 + \left\|W - \frac{G+G^T}{2}\right\|_F^2 + \|G - |A|\|_F^2 + \|A - C\|_F^2\right) \end{aligned}$$

其中 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 是拉格朗日乘子。通过最小化 ℓ ，固定其他变量，交替优化变量 W, F, C, Z, G, A 。

1) 固定其他变量更新 W 。

$$\begin{aligned} & \min_W \left\| 2F - (W + I)X \right\|_F^2 + \alpha \left\| X - WF \right\|_F^2 + \text{tr} \left(Y_2^T (W - I) \right) + \text{tr} \left(Y_3^T \left(W - \frac{G + G^T}{2} \right) \right) \\ & + \frac{\mu}{2} \left(\left\| W - I \right\|_F^2 + \left\| W - \frac{G + G^T}{2} \right\|_F^2 \right) \end{aligned}$$

很容易验证:

$$W = \left(4FX^T - 2XX^T + 2\alpha XF^T - Y_2 1^T - Y_3 + \mu \left(11^T + \frac{G + G^T}{2} \right) \right) \left(2XX^T + 2\alpha FF^T + \mu (11^T + I) \right)^{-1} \quad (4)$$

2) 固定其他变量更新 F 。

$$\min_F \left\| 2F - (W + I)X \right\|_F^2 + \alpha \left\| X - WF \right\|_F^2$$

容易得到:

$$F = (2\alpha WW^T + 8I)^{-1} \left((4W + 4I + 2\alpha W^T) X \right) \quad (5)$$

3) 固定其他变量更新 C 。

$$\min_C \beta \left\| C - CZ \right\|_F^2 + \text{tr} \left(Y_1^T (C - Z) \right) + \text{tr} \left(Y_5^T (A - C) \right) + \frac{\mu}{2} \left(\left\| C - Z \right\|_F^2 + \left\| A - C \right\|_F^2 \right)$$

很容易验证:

$$C = (-Y_1 + Y_5 + \mu(Z + A)) \left(2\beta(I - Z)(I - Z)^T + 2\mu I \right)^{-1} \quad (6)$$

4) 固定其他变量更新 Z 。

$$\min_Z \beta \left\| C - CZ \right\|_F^2 + \text{tr} \left(Y_1^T (C - Z) \right) + \frac{\mu}{2} \left\| C - Z \right\|_F^2$$

容易得到:

$$Z = (2\beta C^T C + \mu I)^{-1} (2\beta C^T C + Y_1 + \mu C) \quad (7)$$

5) 固定其他变量更新 G 。

$$\min_G \text{tr} \left(Y_3^T \left(W - \frac{G + G^T}{2} \right) \right) + \text{tr} \left(Y_4^T (G - |A|) \right) + \frac{\mu}{2} \left(\left\| W - \frac{G + G^T}{2} \right\|_F^2 + \left\| G - |A| \right\|_F^2 \right) \quad (8)$$

问题(8)可转化为对如下等价问题的讨论

$$\min_G \frac{\mu}{2} \left(\left\| G - M \right\|_F^2 + \left\| \frac{G + G^T}{2} - N \right\|_F^2 \right)$$

其中 $M = |A| - \frac{Y_4}{\mu}$, $N = W + \frac{Y_3}{\mu}$ 。由于 $\text{diag}(G) = 0$, 所以仅需考虑矩阵非对角元处元素。

其非对角元素的最优解为 G^* , G^* 的计算公式如下, 其中 $i > j$ 。

$$\begin{cases} G_{ij}^* = \frac{3}{4} M_{ij} - \frac{1}{4} M_{ji} + \frac{1}{4} N_{ij} + \frac{1}{4} N_{ji} \\ G_{ji}^* = \frac{3}{4} M_{ji} - \frac{1}{4} M_{ij} + \frac{1}{4} N_{ij} + \frac{1}{4} N_{ji} \end{cases} \quad (9)$$

6) 固定其他变量更新 A 。

$$\min_A \text{tr}(Y_4^T (G - |A|)) + \text{tr}(Y_5^T (A - C)) + \frac{\mu}{2} (\|G - |A|\|_F^2 + \|A - C\|_F^2) \quad (10)$$

问题(10)可转化为对如下等价问题的讨论:

$$\min_A \frac{\mu}{2} (\| |A| + P \|_F^2 + \|A - Q\|_F^2)$$

其中 $P = -G - \frac{Y_4}{\mu}$, $Q = C - \frac{Y_5}{\mu}$

a) 当 $P_{ij} \geq 0$

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{Q_{ij} - P_{ij}}{2} & \text{当 } Q_{ij} > P_{ij} \\ \frac{P_{ij} + Q_{ij}}{2} & \text{当 } Q_{ij} < -P_{ij} \end{cases} \quad (11)$$

b) 当 $P_{ij} < 0$

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{Q_{ij} - P_{ij}}{2} & \text{当 } Q_{ij} \geq 0 \\ \frac{P_{ij} + Q_{ij}}{2} & \text{当 } Q_{ij} < 0 \end{cases} \quad (12)$$

3.3. 数值算法

本文算法步骤如下:

算法	AMGCSC
输入	数据矩阵 $X = [X_1, X_2, \dots, X_k] \in \mathbb{R}^{d \times n}$, 参数 $\alpha, \beta > 0$, 最大迭代次数
输出	亲和矩阵 W^*
步骤 1	初始化参数, 即 $t = 0, \mu_t = 10^{-6}, \mu_{\max} = 10^{30}, \rho = 1.1, \varepsilon = 10^{-7}, F_t = X$, $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0, W = C = Z = G = A = 0$
步骤 2	更新 W , 通过公式(4)
步骤 3	更新 F , 通过公式(5)
步骤 4	更新 C , 通过公式(6)
步骤 5	更新 Z , 通过公式(7)
步骤 6	更新 G , 通过公式(9)
步骤 7	更新 A , 通过公式(11)、(12)
步骤 8	更新参数, $Y_1 = Y_1 + \mu(C - Z), Y_2 = Y_2 + \mu(W1 - 1), Y_3 = Y_3 + \mu\left(W - \frac{G + G^T}{2}\right)$, $Y_4 = Y_4 + \mu(G - A), Y_5 = Y_5 + \mu(A - C), \mu = \min(\mu_{\max}, \rho\mu)$
步骤 9	验证收敛条件: $\ C - Z\ _{\infty} < \varepsilon, \ W1 - 1\ _{\infty} < \varepsilon, \left\ W - \frac{G + G^T}{2}\right\ _{\infty} < \varepsilon, \ G - A \ _{\infty} < \varepsilon, \ A - C\ _{\infty} < \varepsilon$

4. 实验

4.1. 实验设置

在这一部分,我们进行了大量的子空间聚类实验去评估亲和矩阵图卷积子空间聚类方法 AMGCSC 在聚类过程中的实际表现。

1) 数据集: 为了论证 AMGCSC 的有效性,我们在人造数据集和真实数据集上进行了大量实验。用于评估的四个基准数据集包括 ORL 人脸数据集¹,PIE 人脸数据集²,MNIST 手写体数字数据集³,COIL20 一般物品图像数据集[13]。

2) 对比算法: 我们将 AMGCSC 与一些经典的相关方法进行对比,例如有 LRR、SSC、BDR、LSR1、LSR2、SMR、IDR、AGCSC,进而去验证 AMGCSC 的有效性。

3) 参数设置: 由于不同参数对于评估的算法实验结果影响较大,因此对于每一种比较的算法,我们都采取其对应文献中建议的参数设置并保留其在每个实验数据集上得到的最好结果。对于 AMGCSC,我们的参数设置在 AGCSC 的基础上进行了再次细化以追求更好的实验效果。AMGCSC 的参数选择区间为 $\{1e-5, 1e-4, 1e-3, 5e-3, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 10, 100\}$ 。

4) 评价指标: 为了能更全面地评估所有算法的性能,我们使用获得的重构系数矩阵去构建无任何后处理的亲和矩阵。本文采用了准确率(Accuracy, ACC)、归一化互信息(Normalized Mutual Information, NMI)、纯度(Purity)调整兰德系数(Adjusted Rand Index, ARI)、F 值(F-score)、查准率(Precision)、查全率(Recall)共计七个评价指标进行量化,对于上述七个评价指标而言,数值越高表示聚类性能越好。

4.2. 在人造数据集上实验

我们在 MALAB 中生成了一个 8×8 的包含负数的块对角矩阵。

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

显然该矩阵包含四个对角块,由于在相同的数据集上对不同算法进行实验可以充分地比较出不同聚类算法的性能优劣。故我们在上述数据上应用了不同算法进行聚类实验。

图 1 展示了由我们提出的算法和 AGCSC 在人造数据集上获得的两个系数矩阵,我们可以看到:

1) AGCSC 未呈现正确的聚类结果,AMGCSC 的聚类结果为 4 类,AMGCSC 获得了准确的聚类结果;

2) 通过对 AGCSC 相关工作的分析以及在具体实验的过程中我们可以发现 AGCSC 的对称限制及非负限制会对真实的聚类结果造成影响,如遇到了负的代表系数就会难以处理,算法中可能会出现计算错误,使其无法得到正确的聚类结果;

3) 去掉 AGCSC 关于矩阵 C 对称及非负的限制后转而替换为约束幂等亲和矩阵 W ,以此方法进行改

¹<https://www.cl.cam.ac.uk/research/dtg/attarchive/facedatabase.html>。

²<https://www.ri.cmu.edu/project/pie-database/>。

³<https://yann.lecun.com/exdb/mnist>。

进的 AMGCS 就可以很好规避该影响,使得重构系数矩阵有了更好的表示能力,从而获得数据的真实分类情况(4类)。且可以在更一般的情况下进行使用,无论何种表示系数都能得到准确的聚类结果;



Figure 1. Block results of subspace clustering for AGCSC and AMGCS. (a) AGCSC block results; (b) AMGCS block results

图 1. AGCSC、AMGCS 的子空间聚类分块结果。(a) AGCSC 分块结果; (b) AMGCS 分块结果

从上述实验以及分析中我们不难发现 AMGCS 是克服了 AGCSC 的缺陷的一个更加准确且普适的子空间聚类算法。但人工合成的数据集是在未考虑噪声的情况下进行实验。而真实数据集大部分都是存在噪声的,故我们又在真实数据集中进行了大量实验。

4.3. 在人脸数据集上实验

1) ORL 人脸数据库是目前使用最广泛的标准人脸数据库。共有 40 个不同年龄、不同性别和不同种族的对象。每个人 10 幅图像共计 400 幅灰度图像组成,图像尺寸是 32×32 ,图像背景为黑色。其中人脸部分表情和细节均有变化,例如笑与不笑、眼睛睁着或闭着,戴或不戴眼镜等,人脸姿态也有变化,其深度旋转和平面旋转可达 20 度,人脸尺寸也有最多 10% 的变化。在本数据集的实验中,我们选取了 40 类图像,每类选取了 10 张人脸图进行实验。ORL 数据集部分样本展示如图 2(a)。

2) PIE 数据集是著名人脸识别数据库,经常被应用于各种聚类实验。该数据集共包含 68 个人,每人约 170 张正脸、左右侧脸、正脸微笑以及不同角度光照下的人脸图片,原始图像大小为 32×32 ,共计 11,554 张。在本数据集的实验中,我们选取了 8 类图像,每类选取 60 张人脸图进行实验。PIE 数据集部分样本展示如图 2(b)。

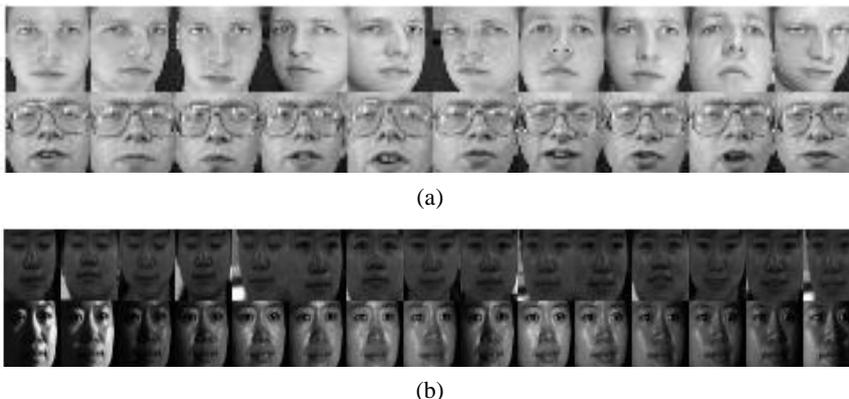


Figure 2. Sample images of face dataset. (a) ORL dataset sample images; (b) PIE dataset sample images

图 2. 人脸数据集的样本图像。(a) ORL 数据集样本图像; (b) PIE 数据集样本图像

然而，两个数据集上每个图像的像素都位于 $[0, 255]$ 之间，为了便于计算且得到更好的聚类结果，我们将每个像素值都除以 255，这一做法可以在不改变原始数据分布的情况下使得每个像素值都位于 $[0, 1]$ 之间。

在每个子空间上，我们评估了这些方法的表现。随着参数的变化，我们发现聚类结果有很大的不同。为了防止随机性，我们统一固定了每组实验的中心以保证在不同次实验中同一算法、同一组数据在同一参数下得到的聚类结果是相同的。详细实验结果见表 2~3。

Table 2. Experimental results on ORL dataset

表 2. 在 ORL 数据集上的实验结果

方法	ACC	NMI	Purity	ARI	F-score	Precision	Recall
LRR	0.7925	0.8664	0.8025	0.6738	0.6815	0.6570	0.7078
SSC	0.7675	0.8787	0.8025	0.6622	0.6706	0.6068	0.7494
LSR1	0.8200	0.8806	0.8250	0.6990	0.7062	0.6739	0.7417
LSR2	0.8075	0.8750	0.8150	0.6909	0.6981	0.6708	0.7278
BDR	0.8125	0.8843	0.8250	0.7026	0.7096	0.6829	0.7383
IDR	0.7925	0.8754	0.8075	0.6880	0.6954	0.6625	0.7317
SMR	0.7650	0.8613	0.7875	0.6597	0.6677	0.6369	0.7017
AGCSC	0.8050	0.8878	0.8225	0.7144	0.7212	0.6848	0.7617
AMGCSC	0.8200	0.8914	0.8325	0.7258	0.7322	0.7049	0.7617

Table 3. Experimental results on PIE dataset

表 3. 在 PIE 数据集上的实验结果

方法	ACC	NMI	Purity	ARI	F-score	Precision	Recall
LRR	0.8396	0.8161	0.8396	0.7067	0.7441	0.7199	0.7700
SSC	0.8333	0.7782	0.8333	0.6703	0.7123	0.6886	0.7376
LSR1	0.8958	0.8563	0.8958	0.7854	0.8126	0.7911	0.8352
LSR2	0.8896	0.8489	0.8896	0.7731	0.8019	0.7793	0.8258
BDR	0.7458	0.7025	0.7458	0.5575	0.6171	0.5646	0.6803
IDR	0.9958	0.9911	0.9958	0.9905	0.9917	0.9915	0.9918
SMR	0.8975	0.8636	0.8975	0.8024	0.8269	0.8231	0.8307
AGCSC	0.7729	0.7753	0.7750	0.6717	0.7131	0.6970	0.7299
AMGCSC	0.9000	0.8839	0.9000	0.8120	0.8359	0.8105	0.8629

4.4. 在手写体数字数据集上实验

MNIST 数据集包含 0~9 共计十个手写体数字，每个手写体数字包含 200 个样本，共计 2000 个。每个图像像素大小为 28×28 。MNIST 数据集部分样本展示如图 3。在本数据集的实验中，我们选取了 3 类作为实验对象，每类选取 200 张手写数字图像进行实验。

我们使用了同人脸数据集参数调节及固定中心相同的实验方法对不同算法在 MNIST 数据集上进行评估，得到的实验结果见表 4。

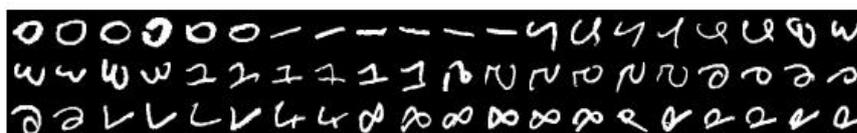


Figure 3. Sample images of MNIST dataset

图 3. MNIST 数据集的样本图像

Table 4. Experimental results on MNIST dataset

表 4. 在 MNIST 数据集上的实验结果

方法	ACC	NMI	Purity	ARI	F-score	Precision	Recall
LRR	0.9100	0.7447	0.9100	0.7594	0.8400	0.8329	0.8473
SSC	0.9050	0.6947	0.9050	0.7411	0.8272	0.8269	0.8274
LSR1	0.9117	0.7201	0.9117	0.7575	0.8383	0.8352	0.8415
LSR2	0.9300	0.7613	0.9300	0.8033	0.8688	0.8669	0.8707
BDR	0.9033	0.7135	0.9033	0.7357	0.8244	0.8161	0.8329
IDR	0.9033	0.7035	0.9033	0.7345	0.8234	0.8169	0.8301
SMR	0.9417	0.7924	0.9417	0.8346	0.8896	0.8885	0.8907
AGCSC	0.9267	0.7567	0.9267	0.7947	0.8631	0.8603	0.8659
AMGCSC	0.9550	0.8254	0.9550	0.8690	0.9126	0.9116	0.9136

4.5. 在一般物品图像数据集上实验

COIL20 数据集是灰度图片集合，包含了对 20 个物体从不同角度的拍摄，每隔 5 度拍摄一张图像，每个物体有 72 张图像，共计 1440 张图像。每张图像大小进行了统一处理为 32×32 。COIL20 数据集的样本展示如图 4。

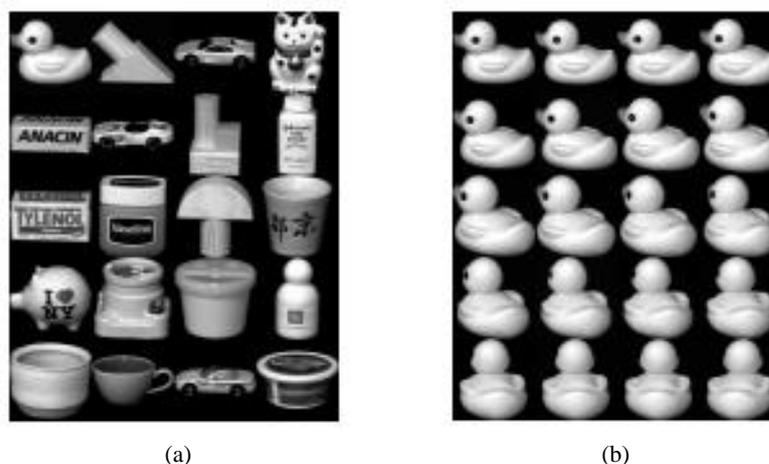


Figure 4. Sample images of COIL20 dataset. (a) COIL20 dataset sample images;

(b) The first sample image of COIL20 dataset

图 4. COIL20 数据集的样本图像。(a) COIL20 数据集的样本图像；(b) COIL20 数据集的第一个样本图像

在本数据集的实验中，我们随机选取了 10 类物体每类选取 70 张图像作为实验对象对不同算法进行

评估。采取的参数调节及固定中心方法与上述方法相同。得到的实验结果见表 5。

Table 5. Experimental results on COIL20 dataset
表 5. 在 COIL20 数据集上的实验结果

方法	ACC	NMI	Purity	ARI	F-score	Precision	Recall
LRR	0.7857	0.7618	0.7857	0.6757	0.7084	0.6935	0.7239
SSC	0.6886	0.7118	0.6886	0.5642	0.6087	0.5888	0.6299
LSR1	0.7657	0.7337	0.7657	0.6414	0.6777	0.6600	0.6964
LSR2	0.7286	0.7202	0.7300	0.6127	0.6525	0.6269	0.6803
BDR	0.7657	0.8039	0.7657	0.6993	0.7297	0.7117	0.7486
IDR	0.7900	0.7717	0.7914	0.6800	0.7125	0.6924	0.7338
SMR	0.7057	0.7204	0.7186	0.5838	0.6270	0.5964	0.6609
AGCSC	0.8771	0.8962	0.8771	0.8327	0.8498	0.8207	0.8810
AMGCSC	0.8857	0.9147	0.8857	0.8488	0.8644	0.8284	0.9036

4.6. 实验结果分析

在表 2~5 中，我们对在不同指标下表现最好的两种算法进行了加粗标注。综合各个指标的聚类结果，可以直观地看到，我们的算法在上述四个数据集中都获得了极为不错的表现。在 ORL、MNIST、COIL20 数据集上，AMGCSC 各评价指标都取得了第一，展现了最优的聚类表现。但在 PIE 数据集上，IDR 取得了最好的结果，但 AMGCSC 取得了仅次于 IDR 的结果，也可以充分证明 AMGCSC 在实践中的有效性。

5. 结论

在本文中，我们提出了一种新的子空间聚类算法，在 AGCSC 的模型上进行改进，将其命名为亲和矩阵图卷积子空间聚类 AMGCSC。在 AMGCSC 中，我们提出了一种直接基于亲和矩阵的约束能很好地克服 AGCSC 在表示能力上的缺陷。我们也使用 AMGCSC 在基准数据集上做了大量的子空间聚类实验以展示我们方法的有效性，进一步提升子空间聚类算法的性能。

基金项目

国家自然科学基金(62076115)。

参考文献

- [1] Wei, L., Chen, Z., Yin, J., Zhu, C., Zhou, R. and Liu, J. (2023). Adaptive Graph Convolutional Subspace Clustering. 2023 *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vancouver, 17-24 June 2023, 6262-6271. <https://doi.org/10.1109/cvpr52729.2023.00606>
- [2] Wei, L., Liu, S., Zhou, R., Zhu, C. and Liu, J. (2024) Learning Idempotent Representation for Subspace Clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **36**, 1183-1197. <https://doi.org/10.1109/tkde.2023.3303343>
- [3] Lu, C., Min, H., Zhao, Z., Zhu, L., Huang, D. and Yan, S. (2012) Robust and Efficient Subspace Segmentation via Least Squares Regression. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 347-360. https://doi.org/10.1007/978-3-642-33786-4_26
- [4] Hu, H., Lin, Z., Feng, J. and Zhou, J. (2014) Smooth Representation Clustering. 2014 *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, 23-28 June 2014, 3834-3841. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2014.484>
- [5] Liu, G., Lin, Z., Yan, S., Sun, J., Yu, Y. and Ma, Y. (2013) Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 171-184.

-
- <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.88>
- [6] Elhamifar, E. and Vidal, R. (2013) Sparse Subspace Clustering: Algorithm, Theory, and Applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 2765-2781. <https://doi.org/10.1109/tpami.2013.57>
 - [7] Lu, C., Feng, J., Lin, Z., Mei, T. and Yan, S. (2019) Subspace Clustering by Block Diagonal Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 487-501. <https://doi.org/10.1109/tpami.2018.2794348>
 - [8] Shi, J.B. and Malik, J. (2000) Normalized Cuts and Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **22**, 888-905. <https://doi.org/10.1109/34.868688>
 - [9] Lee, M., Lee, J., Lee, H. and Kwak, N. (2015) Membership Representation for Detecting Block-Diagonal Structure in Low-Rank or Sparse Subspace Clustering. 2015 *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Boston, 7-12 June 2015, 1648-1656. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2015.7298773>
 - [10] Zass, R. and Shashua, A. (2005) A Unifying Approach to Hard and Probabilistic Clustering. *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1*, Beijing, 17-21 October 2005, 294-301. <https://doi.org/10.1109/iccv.2005.27>
 - [11] Zass, R. and Shashua, A. (2007) Doubly Stochastic Normalization for Spectral Clustering. In: *Advances in Neural Information Processing Systems 19*, The MIT Press, 1569-1576. <https://doi.org/10.7551/mitpress/7503.003.0201>
 - [12] Lin, Z.C., Chen, M.M. and Ma, Y. (2024) The Augmented Lagrange Multi Plier Method for Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Matrices. <https://arxiv.org/abs/1009.5055>
 - [13] Nene, S.A., Nayar, S.K. and Murase, H. (2024) Columbia University Image Library. <https://www.doc88.com/p-7788908259433.html>