

高等代数中抽象思维能力的培养

胡建华*, 朱 林, 刘昌良

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年9月25日; 录用日期: 2024年10月28日; 发布日期: 2024年11月28日

摘 要

抽象思维能力是数学素养的一个重要方面, 它不仅是解决数学问题的核心能力, 也是学生进行科学研究与创新的基础。《高等代数》作为高中《代数》的进阶, 具有高度抽象性。因此, 在《高等代数》课程中如何培养抽象思维能力, 使学生实现高中到大学学习的顺利过渡是值得研究的课题。本文分析了《高等代数》中抽象性思维四个方面的体现, 并从抽象概念的理解、逻辑推理的训练、推广与类比、可视化、解决问题、以及探索与创新等方面给出了抽象性思维培养的途径和方法。

关键词

《高等代数》, 数学素养, 抽象思维, 线性空间

Cultivation of Abstract Thinking Ability in Advanced Algebra

Jianhua Hu*, Lin Zhu, Changliang Liu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Sep. 25th, 2024; accepted: Oct. 28th, 2024; published: Nov. 28th, 2024

Abstract

Abstract thinking ability is an important aspect of mathematical literacy. It is not only a core competence for solving mathematical problems but also the foundation for students' scientific research and innovation. As a progression from high school *Algebra*, *Advanced Algebra* is highly abstract. Therefore, how to cultivate abstract thinking skills in the *Advanced Algebra* course to facilitate a smooth transition for students from high school to university learning is a worthy topic of research. This paper analyzes several aspects of abstract thinking in *Advanced Algebra* and provides approaches and methods for cultivating abstract thinking from the perspectives of understanding abstract concepts, training logical reasoning, generalization and analogy, visualization, problem-solving, and exploration and innovation.

*通讯作者。

文章引用: 胡建华, 朱林, 刘昌良. 高等代数中抽象思维能力的培养[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 179-186.

DOI: 10.12677/pm.2024.1411387

Keywords

Advanced Algebra, Mathematical Literacy, Abstract Thinking, Linear Space

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

数学素养通常指个体在日常生活、学习和工作中运用数学知识和技能的能力。它不仅仅包括对数学概念、方法和技巧的理解,还涉及将这些知识运用到实际问题中的能力。数学素养的内涵通常包含了数学知识、数学思维、数学方法、数学思想、数学技能、个性品质等多个方面的内容。对数学学科教育而言,核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析[1]。这些核心素养既相对独立、又相互交融,是一个有机的整体。

抽象思维能力是指个体从具体的经验和信息中提取出一般性规律和概念的能力。这种能力使人能够在面对新的、未知的问题时,识别出关键因素并进行有效推理。具体而言,抽象思维不仅仅是对具体事物的简单归纳,而是将主观经验转化为能够适用于更广泛情境的客观概念。在培养数学核心素养中,抽象思维起着十分重要的作用,图1展示了抽象思维在数学素养培育中的中心地位。

抽象思维是形成数学概念的基础,帮助学生从具体实例中概括出数学规律,使学生有效地将实际问题转化为数学问题,并找到解决方案;抽象思维是逻辑推理的前提,有助于学生理解和应用数学证明和逻辑推理;抽象思维使学生能够从现实世界中提取数学模型,应用于更广泛的情境,如在数据分析时识别数据中的模式和趋势,进行概括和预测;抽象思维与直观想象相辅相成,直观想象可以帮助学生在抽象思维过程中形成视觉或空间上的直观理解;抽象思维有助于学生理解运算规则的本质,提高运算技能和策略的灵活性;抽象思维能力使学生能够准确地用数学语言表述数学思想和数学结论。

《高等代数》课程是数学专业的重要基础课程,也是数学素养的核心课程[2],它不仅涉及一系列抽象的数学概念和理论,还需要学生具备较强的抽象思维能力。这种能力不仅是解决数学问题的基础,也是理解和应用人工智能算法的关键。人工智能(AI)技术的发展要求学生具备更高层次的逻辑思维和抽象能力,以便在复杂的数据分析和模型构建中能够灵活应对[3]。

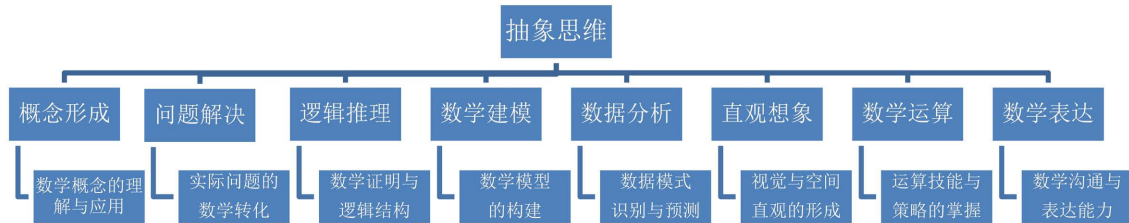


Figure 1. The central role of abstract thinking in cultivating mathematical literacy
图1. 抽象思维在数学素养培育中的中心地位

《高等代数》这门课程开设在大学第一年,是高中学习方法向大学学习方法转变的时期。其内容的高度抽象性要求学生具备较强的抽象思维能力。因此,探讨如何有效地在《高等代数》课程中培养学生的抽象思维能力,具有重要的实际意义[4][5]。

2. 高等代数中抽象思维的体现

《数学的美与理》一书中明确指出，数学区别于其他学科有明显特点有三个：第一是它的抽象性，第二是它的精确性，第三是它的应用极端广泛性[1]。高等代数作为数学专业的基础课程，具有更加高度的抽象性。

2.1. 数学概念的抽象化

《高等代数》中引入了一系列抽象概念，如线性空间、线性变换、线性相关与线性无关等。这些概念并非具体的数字、图形或特定的对象，而是对数学对象的高度概括和抽象。例如，线性空间的定义不依赖于元素的具体类型，可以是数字、多项式、向量、矩阵或变换等。这要求学生不仅要理解概念的直观意义，还要能够严格地、形式化地处理它们。

2.2. 数学表达的符号化

在高等代数的学习中，具体实例(如多项式、向量)通常是理解抽象概念的起点，而符号化则有助于将这些具体实例上升到更抽象的层次。符号化是指使用符号(如字母、运算符、数学符号等)来表示数学对象及其关系，如特征方程、矩阵的满秩分解等。通过符号化，复杂的代数表达式和运算可以更简洁地表示，同时这种数学表达具有普遍性，使得我们能够在更高的抽象层次上进行思考，也能够适用于各种特定情况。

2.3. 逻辑推理的抽象化

逻辑推理是理解和构建代数理论的基础。高等代数中的逻辑推理建立在公理化方法的基础上。通过一组公理、定义(基本假设)出发，推导出一系列定理和性质，这种方法具有严谨的逻辑性，有助于建立坚实的理论基础。逻辑推理要求学生能够识别和理解不同数学概念和知识板块之间的联系，例如，矩阵和线性变换的对应，特征值和特征向量与线性变换的不变子空间的关系。

2.4. 代数结构的抽象化

《高等代数》涉及的代数结构(如数域、线性空间)本质上是面向数学对象与运算关系的抽象描述，强调对象的内在结构和它们之间的关系。例如，线性空间的研究不仅关注向量本身，还关注加法和数乘运算、如何在这个空间中定义子空间、和空间以及直和分解等问题。《高等代数》中，代数结构的抽象化是从具体的实例中提炼出一般性的理论，这一过程不仅帮助我们理解代数结构的内在性质，还为解决实际问题提供了强有力的工具，促进了数学的统一性和广泛性。

3. 高等代数中抽象思维能力的培养

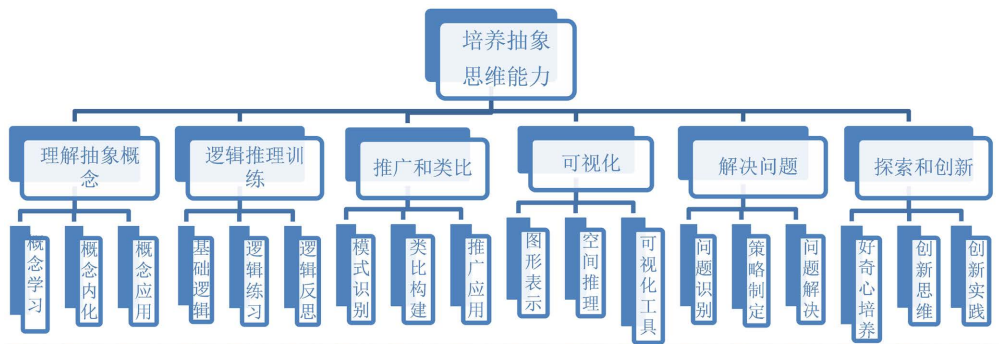


Figure 2. Six major approaches to cultivating abstract thinking in t advanced algebra
图 2. 高等代数中培养抽象思维的六大途径

抽象思维能力并不是一种与生俱来的技能,良好的抽象思维需要经过系统地训练。图2给出了在《高等代数》课程中培养抽象思维的六大途径以及具体的方法。

3.1. 从抽象概念的理解中提高抽象思维能力

抽象思维的起点是对抽象概念的深刻理解。概念的学习是基础,内化是将学习到的概念内化为自己的思维模式,并通过重复和实践加深理解。许多高等代数的核心概念,如线性空间、线性相关、不变子空间和直和等,具有高度的抽象性。因此,学生需要在学习过程中善于抓住这些概念的本质,深入理解它们的性质及相互关系。如向量组线性相关的定义本质是零向量可以被此向量组非平凡表示出来,说明其中至少有一个向量可以用其余向量的线性组合表示。这一理解不仅帮助学生在解决具体问题时进行准确判断,也让他们意识到向量之间的依赖关系。又如线性空间定义中零元 o 的本质是在加法运算下,与任意元 α 都满足 $\alpha + o = \alpha$; α 的负元的本质是空间中满足 $\alpha + \beta = o$ 的向量 β 。这种对零元和负元本质的理解是学习线性空间的重要基础。

为了更具体地说明抽象概念的内涵,举个简单的例子:实数域上的全体正实数 $V = \mathbb{R}^+$,在加法与数量乘法定义 $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$, $k \circ \alpha = \alpha^k$ 下构成线性空间, V 中的零元是 1,而正数 α 的负元为 α^{-1} 。这个例子中,数字 1 承担了零元的角色,即 $o = 1$,而每个正数 α 的“负元”并不是我们直观理解上的负数,而是它的倒数 α^{-1} ,即 $\alpha^{-1} = -\alpha$ 。由此看出,高等代数中概念的抽象不再局限于我们熟知的形式,给理解概念增加了难度,只有抓住本质,才能有效地掌握这些抽象概念,并将其应用于更复杂的问题解决中。

3.2. 从逻辑推理训练中提高抽象思维能力

逻辑推理是抽象思维的核心。高等代数的内容建立在公理化的方法之上,通过这种系统化的逻辑结构形成了一套严谨的知识体系。在高等代数的学习过程中,逻辑推理的训练贯穿始终,以帮助学生逐步掌握抽象概念并提高思维能力。在教学中的具体策略有:

1) 归纳推理:训练学生从特殊到一般的推理过程,如高等代数中的第二归纳法。

2) 演绎推理:练习从一般到特殊的推理,如线性空间的维数公式,应用到具体的 n 维向量空间,就可以用来证明矩阵的秩的不等式。

3) 因果推理:分析命题之间的因果关系,建立不同因素之间的逻辑联系。高等代数中有很多等价命题,如直和的判定条件、正定矩阵的充要条件等,学生通过这些充分必要条件的证明,可以更好地掌握因果推理的技巧,提升逻辑思维能力。

4) 错误分析:提供错误示例,展示一些常见的逻辑错误让学生识别,鼓励学生分析这些错误的原因,并讨论如何避免。

5) 逆向推理练习:针对高等代数中一些结论,给学生反向设计一些结论,让学生判断结论是否正确,或推导结论正确的条件,并加以证明。

6) 推理过程反思:鼓励学生反思自己的推理过程,识别其中的逻辑跳跃和不合理的假设。

例如线性空间 V ,它是在给定数域 P 的基础上,对集合 V 赋予加法和数乘运算,且满足加法交换律、数乘分配律等八大条性质。这些性质的确立并不是随意选择的,而是通过逻辑推理所形成的严密框架。在线性空间的八大基本性质中,加法的交换律并不是绝对必要的,它可以通过其他七条性质严格推导出来: $\forall \alpha, \beta \in V$, 比较

$$(1+1)(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = \alpha + (\beta + \alpha) + \beta \quad (1)$$

$$(1+1)(\alpha + \beta) = (1+1)\alpha + (1+1)\beta = (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta \quad (2)$$

从而有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ，即加法交换律成立。这一过程不仅展示了代数运算内在的逻辑关系，也强调了逻辑推理在抽象思维中的重要性。

此外，逻辑推理的训练还体现在对反例和特殊情况的分析上。学生在学习过程中，常常需要构造反例来验证某一命题是否成立，或通过特殊情况来简化问题。这种方法不仅促进了对理论的深刻理解，还培养了学生的批判性思维能力，使他们能够从多个角度看待问题，避免思维的局限。

3.3. 从推广和类比中提高抽象思维能力

推广是将特定问题或概念扩展到更普遍情境的过程，而类比则是在不同概念之间寻找相似之处，以帮助理解新的概念。在高等代数中，许多概念和理论的形成依赖于这种推广与类比的思维方式。这种方法不仅丰富了代数的内涵，还帮助学生更深入地理解不同代数结构之间的关系。许多高等代数的概念最初源于具体实例，随后逐渐推广到更一般的情形。例如，多项式代数、向量代数和矩阵代数都属于具体的代数系统，通过挖掘这些系统的共同性质，形成了更为一般的代数结构。这种推广不仅使代数结构的定义更加广泛，也使它们能够应用于更复杂的数学问题。

此外，高等代数中的不同代数结构之间存在着深刻的联系。通过类比，学生能够理解这些结构之间的相似性和不同。例如，对称矩阵和反对称矩阵性质、方阵的性质和线性变换性质、矩阵的三大等价关系等。同构概念的引入进一步促进了代数结构之间的类比。通过研究不同结构之间的同构关系，学生能够看到不同代数结构在某些方面的相似性。两个同构的线性空间意味着它们在结构上是“一样的”。这样的类比不仅简化了复杂的代数问题，也为理论的发展提供了新的视角。

3.4. 从可视化角度提高抽象思维能力

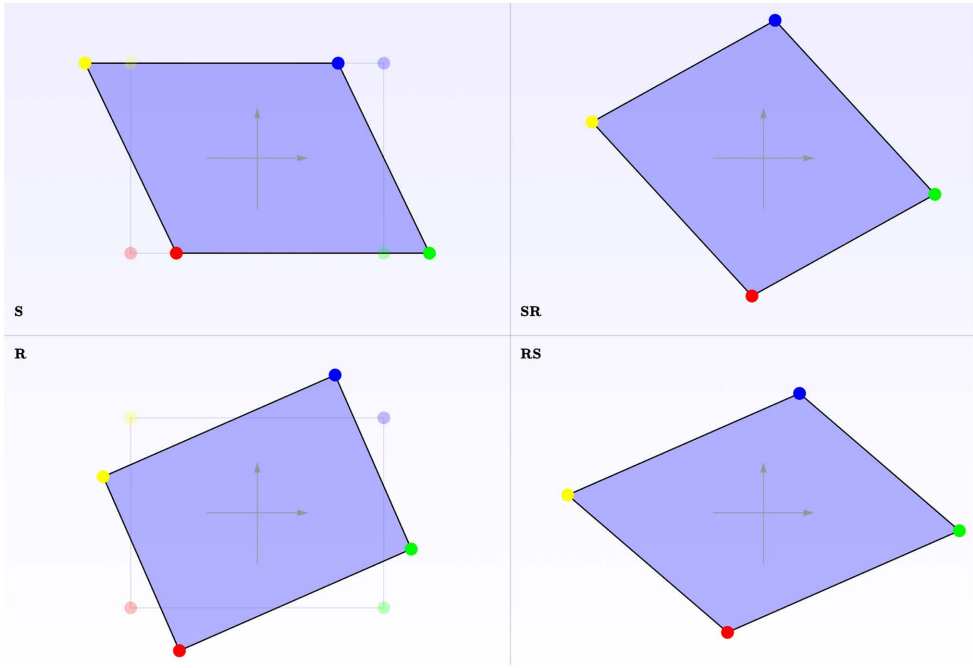


Figure 3. An example of the non-commutativity of matrix multiplication
图 3. 矩阵乘法交换律不成立的示例

可视化是理解抽象概念的重要工具，通过图形和可视化工具表达抽象概念，可以帮助学生在直观理解与抽象思维之间建立联系。在 AI 时代，教育正朝着智能化转型。借助 AI 驱动的思维导图工具，如

GitMind AI 工具, 可以迅速将简短的文字输入转化为思维导图, 帮助学生理解和记忆复杂概念, 同时构建知识框架, 关联不同知识点, 并进行整合与总结。Immersive Math 网站(<https://immersivemath.com>)提供了一个创新的数学学习平台, 专注于通过互动和可视化的方式增强学生对线性代数概念的理解。该网站提供各种互动工具和软件, 帮助学生在实践中掌握数学概念, 特别是在代数和几何等领域。通过图形、动画和互动模拟, 复杂的数学概念得以直观地呈现, 使学生更容易理解和吸收。以二阶方阵为例, 图 3 展示了矩阵乘法的交换律不成立的现象, 其中 R, S 分别表示两个 2 阶方阵[6]。

这种可视化方式为抽象的代数结构提供了直观的支持, 使学生能够在思考的过程中将抽象的符号与具体的几何图形相结合, 从而加深他们的理解。在这种学习过程中, 学生不仅能够看到数学操作的直观效果, 还能更深刻地领会到各种数学概念之间的内在联系。

3.5. 从解决问题中提高抽象思维能力

解决问题的过程本身就是对抽象思维的锻炼。高等代数中的许多问题并不是单纯的计算, 而是需要学生运用抽象思维去解决的复杂问题。通过解决这些问题, 学生可以在实践中锻炼自己的抽象思维能力。举例如下:

设有 n 个人以及 m 首歌曲, $n > m$, 假定每人至少听了一首歌。请说明: 这 n 人中必存在甲乙两组人, 甲组人听过的音乐种类与乙组人听过的音乐种类相同。

先将这个问题数学化。将这 m 首歌曲依次编号为 $1, 2, \dots, m$, 记 $a_{ij} = 1$ 表示第 i 人听过第 j 首歌, $a_{ij} = 0$ 表示第 i 人没听过第 j 首歌, 则和 $\sum_{j=1}^m a_{ij} \geq 1$ 。记 i 个人听过歌曲的情况为 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{R}^m$, 由于 $n > m$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0 \quad (3)$$

将其改写成

$$k_{j_1} \alpha_{j_1} + k_{j_2} \alpha_{j_2} + \dots + k_{j_r} \alpha_{j_r} = k_{i_1} \alpha_{i_1} + k_{i_2} \alpha_{i_2} + \dots + k_{i_s} \alpha_{i_s} \quad (4)$$

其中 $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_r}$ 为 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 中的正数, $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_s}$ 为 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 中的负数, 这样, 只需取甲组为第 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 人, 乙组为第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 人, 甲乙两组所听曲目种类相同。

上例中, 我们展示了如何通过将复杂的实际问题转化为数学模型, 并利用向量组的线性相关性进行推导, 得出了所需的结论。这一过程不仅突显了问题解决的逻辑结构, 也说明了抽象思维在实际应用中的重要性。

3.6. 从探索和创新中提高抽象思维能力

高等代数的学习不仅仅是对已有知识的掌握, 更是探索和创新的过程。鼓励学生在主动探索, 比如尝试自己构建新的代数结构或推导新的定理, 可以极大地激发学生的创造力和抽象思维能力。比如, 已知实数域, 在普通的加法和乘法下, 全体正实数 $\mathbb{R}^+$ 是不构成线性空间的, 学生可以尝试探索在什么情况下 $\mathbb{R}^+$ 也能构成线性空间; 或者探索多项式的带余除法怎么用计算机编程实现; 再如思考矩阵的特征值、特征向量中“特征”这个词的含义。其次鼓励学生提出自己的猜想和证明, 即使这些猜想可能是错误的, 也能够激发他们的思考和探索。在这些探索过程中, 学生不仅要运用已有的知识, 还要不断思考如何将这些知识应用于新的情境中, 从而培养出独立思考和创新能力。

4. 教学案例

本节将以高等教育出版社的《高等代数》(第五版)[7]中线性空间 V 的定义设计教学案例, 展示在高等代数教学中传授知识的同时培养学生的抽象思维能力。由于篇幅原因, 我们只给出框架(图 4)。

在这个教学框架中,通过观察向量、矩阵和多项式的加法、乘法以及数乘运算及其运算规律,引导学生抓住研究对象的共性,从而抽象出线性空间的定义;通过对常见线性空间、特例与反例的演绎,加深学生对线性空间定义的理解;同时,利用类比方法探索不同线性空间之间的关系,通过因果推理推导出基本运算性质来加强学生的逻辑训练。此外,鼓励学生思考八大运算律的必要性,以培养他们的创新思维,并通过具体证明和课堂练习来增强学生的逻辑推理能力。

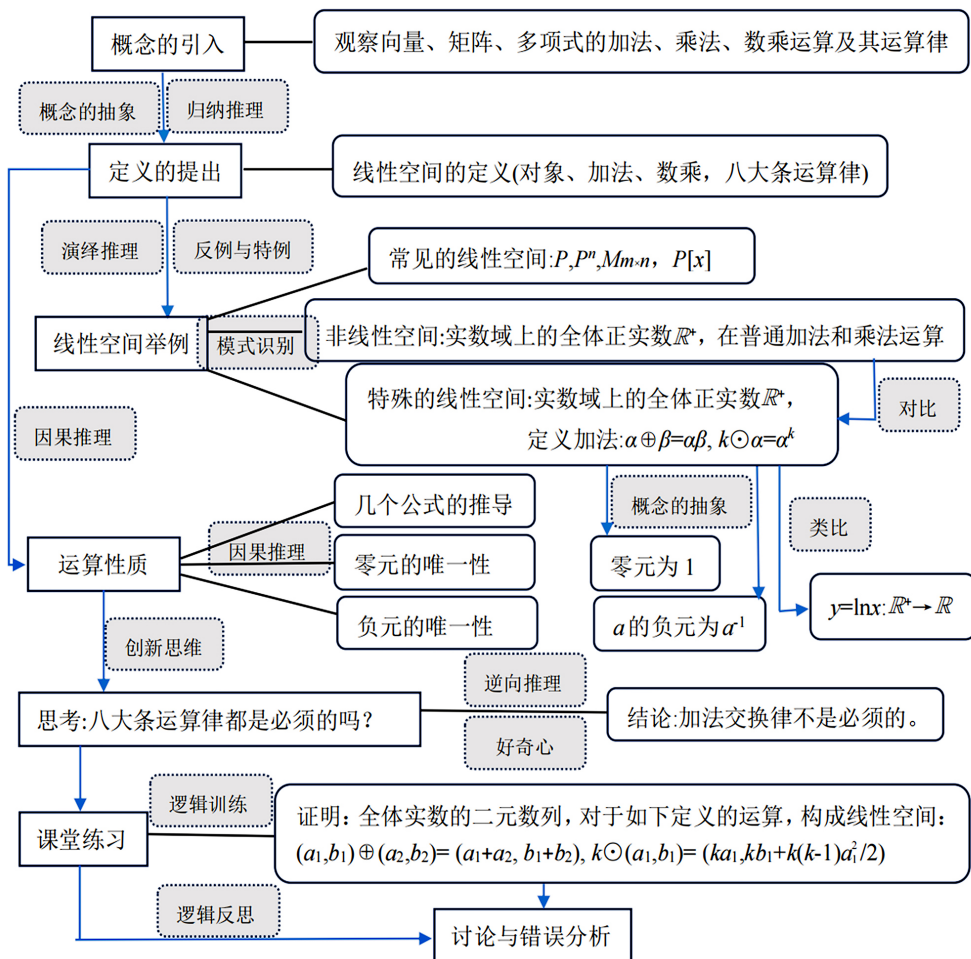


Figure 4. Teaching design framework for the definition of linear space V

图 4. 以线性空间 V 的定义为例的教学设计框架

通过本次教学,学生不仅掌握了线性空间的基本概念和运算性质,还充分锻炼了抽象思维能力。大部分学生表示,通过观察具体的数学对象和运算,他们对线性空间有了初步的直观理解,为抽象出线性空间的定义奠定了基础,并将抽象概念与已有知识联系起来。在寻找反例和特例的过程中,尽管学生面临挑战,但这一过程帮助他们更深入地理解了线性空间的定义。学生普遍认为,利用类比和因果推理推导运算性质是一种有效的学习方法,能更好地理解线性空间的运算特性。在教学中,学生对开放性问题表现出极大的兴趣,并认为这有助于培养他们的创新思维。在进行课堂练习时,学生普遍对抽象问题感到困难,但通过解决这些问题,他们的逻辑推理能力得到了提升。大多数学生认为错误分析是学习过程中不可或缺的一部分,有助于他们从错误中吸取教训,并加深对概念的理解。根据学生的反馈,这样的教学设计不仅符合他们的学习特征,而且有效。

5. 总结

抽象思维的培养对于学习高等代数至关重要，这不仅有助于学生深入理解高等代数的概念和理论，还能提升他们解决复杂数学问题的能力。在人工智能时代，抽象思维技能变得愈发重要，因为这些技能与算法设计、数据分析和机器学习等领域的核心能力息息相关。通过对抽象概念的理解、逻辑推理的训练、推广与类比、图形与可视化的应用、问题解决的实践以及鼓励探索与创新，学生的抽象思维能力能够得到全面发展。这不仅有助于他们在数学领域的深入学习，也为他们在其他学科及生活中的思考奠定了坚实基础。

在未来的教学中，我们将继续探索更多培养学生抽象思维能力的方法，并将其融入高等代数的教学中。同时，鼓励学生在解决实际问题时应用这些能力，以增强他们的数学素养和解决问题的能力。此外，我们将根据学生的反馈和体验，持续调整和优化教学策略，以更好地适应不同层次学生的需求，并探索如何在不同学科中整合抽象思维能力的培养，以促进学生在多个领域的思维发展。

基金项目

本文由上海理工大学教师发展研究项目(CFTD2024YB22)资助。

参考文献

- [1] 张顺燕. 数学的美与理[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2013: 2-32.
- [2] 李锐. 在高等代数教学中提高学生抽象思维能力的思考与实践[J]. 河南大学学报(教育科学版), 2001, 17(2): 60-61.
- [3] (2019) Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities for Sustainable Development. The United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
- [4] 李国重, 马朝忠, 韩松辉. 化解高等代数抽象性的教学方法探索[J]. 高等数学研究, 2023, 26(4): 34-37.
- [5] 杨胜. 高等代数的教学设计与实践——以维数公式为例[J]. 大学数学, 2024, 40(4): 86-90.
- [6] https://immersivemath.com/ila/ch06_matrices/ch06.html
- [7] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 1-290.