**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(11), 229-245
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411391

# 三维可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn系统滑移边界问题稳态弱解的存在性

冯昕奕，陈冬冬，彭 亿*

北京化工大学，数理学院，北京

收稿日期：2024年9月20日；录用日期：2024年10月22日；发布日期：2024年11月29日

## 摘 要

**本文主要考虑了在三维空间中，带有滑移边界条件的Navier-Stokes/Allen-Cahn (NSAC)系统稳态弱解的存在性问题。通过运用Helmholtz速度分解定理、弱收敛极限和有效粘性通量的方法，证明了该系统在滑移边界条件下稳态弱解的存在性。**

## 关键词

**Navier-Stokes/Allen-Cahn系统，滑移边界条件，稳态弱解存在性**

# The Existence of Steady-State Weak Solutions for the Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System with Slip Boundary Conditions

**Xinyi Feng, Dongdong Chen, Yi Peng***

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: Sep. 20th, 2024; accepted: Oct. 22nd, 2024; published: Nov. 29th, 2024

## Abstract

**In this paper, the existence of a steady-state weak solution for a Navier-Stokes/Allen-Cahn (NSAC) system with slip boundary conditions in 3D space is discussed. In this paper, the methods of Helmholtz's velocity decomposition theorem, weak convergence limit and effective viscous flux are used**

*通讯作者。

文章引用: 冯昕奕, 陈冬冬, 彭亿. 三维可压缩 Navier-Stokes/Allen-Cahn 系统滑移边界问题稳态弱解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 229-245. DOI: 10.12677/pm.2024.1411391

**to prove the existence of a steady-state weak solution under slip boundary conditions.**

## Keywords

**Navier-Stokes/Allen-Cahn System, Slip Boundary Conditions, Steady-State Weak Solution**

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

## 1. 引言

Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组[1] (简称为 NSAC 方程组)是描述非混相两相流运动的一类重要的扩散界面模型，该方程组由描述流体运动的 Navier-Stokes 方程组与描述界面运动的 Allen-Cahn 方程耦合而成。在物理和工程领域，NSAC 方程组的应用范围广泛。例如，能源工程中，该方程组能够精确刻画流体与相变材料之间的相互作用，为设计更高效、更可靠的热交换器和储能系统提供了理论基础。同时，在材料研究领域，该方程组能够深入描述流体中相变的动态过程，有助于新材料的开发和性能优化。

滑移边界条件是指流体在固体边界上不是完全附着，而是存在一定的相对运动速度。这与传统的固定边界条件有所不同，后者是假设流体在边界上完全静止。而在微纳尺度流动等实际应用场景中，滑移边界条件可能更符合某些物理现象的真实情况，因此值得进一步探讨。

关于该方程组非定常适定性问题，Feireisl 等[2]对三维无滑移边界条件，给出了有限能量弱解的存在性；Ding 等[3]运用能量估计的方法，证明了一维初边值问题强解的全局存在唯一性；在 $n(n\geq 1)$ 维有界区域中，Kotschote [4]运用压缩映射原理得到了该问题局部强解的存在唯一性；在广义 Navier 边界条件下，Chen 等[5]运用基本能量方法和极大值原理，给出了该问题局部强解的存在唯一性。关于该方程组稳态解的适定性问题，目前的研究工作相对较少。在无滑移边界条件下，Chen 等[6]利用弱收敛极限的方法，得到该方程组稳态弱解的存在性；在滑移边界条件下，Axman [7]给出了势能密度函数为对数形式时，方程组稳态弱解的存在性。

鉴于滑移边界条件在揭示流体与相变材料相互作用机制方面的潜在作用，以及 NSAC 方程组在描述非混相两相流运动中的独特优势，本文研究了在滑移边界条件下，当势能密度函数为 $f(\rho,\chi)=\frac{\chi^4}{4}-\frac{\chi^2}{2}$ 形式时，NSAC 方程组稳态弱解的存在性。在 Chen 等[6]工作基础之上，通过运用 Helmholtz 速度分解定理等方法，克服滑移边界条件对密度强收敛带来的困难，进而证明 NSAC 方程组稳态弱解的存在性。

## 2. 主要定理

本文考虑势能密度函数为 $f(\rho,\chi)=\frac{\chi^4}{4}-\frac{\chi^2}{2}$ 形式时，三维可压缩 NSAC 方程组弱解的存在性问题，该问题的方程如下：

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0,\\ \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla\rho^{\gamma}-\nu\Delta\mathbf{u}-(\nu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}+\operatorname{div}\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\frac{|\nabla\chi|^2}{2}\mathbb{I}\right)=\rho\mathbf{F},\\ \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\chi)=-\mu,\\ \rho\mu=-\Delta\chi+\rho\frac{\partial f(\rho,\chi)}{\partial\chi}.\end{cases}\tag{1}$$

边界条件

$$\begin{cases}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\nu\left(\nabla\mathbf{u}+\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right)\cdot\tau_n+\kappa\mathbf{u}\cdot\tau_n|_{\partial\Omega}=0,\\ \nabla\chi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{2}$$

其中$\rho$，$\mathbf{u}$，$\chi$分别表示流体的总密度、流体的平均速度和相场。$\gamma>1$是绝热常数，$\mathbb{I}$为$3\times3$单位矩阵，$\mu$表示化学势，粘性系数$\nu,\lambda$为常数，满足$\nu>0, 2\nu+3\lambda\ge0$。$\mathbf{n}$表示$\partial\Omega$上的单位外法向量，$\boldsymbol{\tau}_n, n=1,2$表示$\partial\Omega$上的两个线性独立切向量，滑移系数$\kappa$满足$\kappa>0$。$\mathbf{F}\in L^\infty(\Omega)$为流体所受的外用；流体的总密度满足如下约束条件，即

$$\int_\Omega\rho\mathrm{d}x=m,\tag{3}$$

其中$m>0$为常数。接下来，我们给出方程组(1)~(3)有限能量弱解定义。

**定义1** 给定常数$m>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^3$。我们称满足如下条件的$(\rho,\mathbf{u},\chi)$是问题(1)~(3)的有限能量弱解：

(i) $\rho\in L^\gamma(\Omega)$，$\mathbf{u}\in W^{1,2}(\Omega)$，$\chi\in W^{1,2}(\Omega)$，$\mu\in L^2(\Omega)$且对几乎处处的$x\in\Omega$，有$-1\le\chi(x)\le1$；

(ii) 对任意的函数$\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$，$\varphi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$成立

$$\int_\Omega\left(-\rho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}):\nabla\varphi+\left(\nu\Delta\mathbf{u}+(\nu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}-\mathrm{div}\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\frac{|\nabla\chi|^2}{2}\mathbb{I}\right)-\nabla\rho^\gamma\right):\nabla\varphi\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\partial\Omega}\kappa(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\varphi\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}S=\int_\Omega\rho\mathbf{F}\cdot\varphi\mathrm{d}x.$$

(iii) 对任意函数$\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$，成立

$$\int_\Omega\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\chi\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega-\mu\varphi\mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega\rho\mu\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\rho\left(\chi^3-\chi\right)\varphi+\nabla\chi\cdot\nabla\varphi\right)\mathrm{d}x.$$

(iv) 重整化(连续)方程$(1)_1$在$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$意义下满足

$$\mathrm{div}(b(\rho)\mathbf{u})+\left[b'(\rho)\rho-b(\rho)\right]\mathrm{div}\mathbf{u}=0,\tag{4}$$

其中$(\rho,\mathbf{u})$需要在$\Omega$外进行零延拓，函数$b$满足

$$\begin{cases}b\in C^0[0,\infty)\cap C^1(0,\infty),\\ \sup\limits_{t\in(0,1)}\left|t^{k_1}b'(t)\right|<\infty,\quad k_1\in(0,1),\\ \sup\limits_{t\in(1,\infty)}\left|t^{k_2}b'(t)\right|<\infty,\quad k_2\le\dfrac{\gamma}{2}-1.\end{cases}\tag{5}$$

## 3. 主要定理的证明

下面给出本文的主要定理：

**定理1** 设$\gamma>6$，$m>0$，$\mathbf{F}\in L^\infty(\Omega)$，$\Omega$为$\mathbb{R}^3$中的光滑有界区域，则问题(1)~(3)至少存在一个非平凡有限能量弱解$(\rho,\mathbf{u},\chi)$，且满足

$$\rho\in L^\infty(\Omega),\ \mathbf{u}\in W^{1,p}(\Omega),\ \chi\in W^{2,p}(\Omega),\ 3<p<\infty.\tag{6}$$

**定理2** 设$\gamma>6$，$m>0$，$\mathbf{F}\in L^\infty(\Omega)$，$\Omega$为$\mathbb{R}^3$中的光滑有界区域，则问题(1)~(3)至少存在一个非平

凡有限能量弱解$(\rho,\mathbf{u},\chi)$，且满足

$$\rho\in L^{3\gamma-6}(\Omega),\ \mathbf{u}\in W^{1,2}(\Omega),\ \chi\in W^{1,\frac{6\gamma-12}{\gamma}}(\Omega). \tag{7}$$

定理 1 和定理 2 的证明步骤如下：首先，我们构造问题(1)~(3)的近似系统，利用 Schauder 不动点定理得到该近似系统解的存在性；其次，通过能量估计方法，得到该近似系统解的弱收敛极限；最后，证明该极限函数为问题的有限能量弱解。为方便起见，我们给出如下几个引理，这些引理的证明可以通过 Axman [7]中的方法得到，这里不再详述。

**引理 1** 若问题(1)~(3)中的有限能量弱解满足$\mu\in L^q(\Omega)$，$\rho\in L^p(\Omega)$，且$p>3$，$2\le q<\dfrac{3p}{p-3}$，则

$$\left\|\rho\left(\chi^3-\chi\right)\right\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\Omega)}+\|\rho\mu\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\Omega)}+\|\Delta\chi\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\Omega)}+\|\nabla\chi\|_{L^{\frac{3pq}{3p+3q-pq}}(\Omega)}\le C\|\rho\|_{L^p(\Omega)}\left(\|\mu\|_{L^q(\Omega)}+1\right). \tag{8}$$

**引理 2** 若$\gamma>6$，问题(1)~(3)的有限能量弱解满足$\rho\in L^{2\gamma}(\Omega)$，$\mathbf{u}\in W^{1,2}(\Omega)$，以及$\mu\in L^2(\Omega)$，则对于$1<p<+\infty$，成立

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}+\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\chi\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\Delta\chi\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)}\le C. \tag{9}$$

### 3.1. 逼近系统的构造及其解的存在性

对任意给定的$\alpha>0$，$\varepsilon>0$，$\delta>0$，我们对问题(1)~(3)构造如下近似系统：

$$\begin{cases}\alpha(\rho-h)+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=\epsilon\Delta\rho,\\ \alpha(\rho+h)\mathbf{u}+\dfrac{1}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\dfrac{1}{2}\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\nabla\rho^\gamma+\delta\nabla\rho^\beta\\ =\nu\Delta\mathbf{u}+(\nu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u-\operatorname{div}\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\dfrac{|\nabla\chi|^2}{2}\mathbb{I}\right)+\rho\mathbf{F},\\ \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\chi=-\mu,\\ \rho\mu=-\Delta\chi+\rho\left(\chi^3-\chi\right),\end{cases} \tag{10}$$

边界条件

$$\begin{cases}\nabla\rho\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\nu\left(\nabla\mathbf{u}+\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right)\cdot\tau_n+\kappa\mathbf{u}\cdot\tau_n|_{\partial\Omega}=0,\\ \nabla\chi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{11}$$

其中$\beta>\max\{6,\gamma\}$，$h=\dfrac{M}{|\Omega|}$。

接下来，我们运用 Schauder 不动点定理证明近似系统(10)、(11)弱解的存在性。定义解空间如下：

$$\mathbf{M}_p=\left\{\mathbf{w}\in\left(W^{2,p}(\Omega),\mathbb{R}^3\right),\text{在边界 }\partial\Omega\text{ 上 }\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{0}\right\},$$

$$M_p=\left\{m\in W^{2,p}(\Omega),\text{在边界 }\partial\Omega\text{ 上 }\nabla m\cdot\mathbf{n}=0\right\},$$

$$N_p=\left\{z\in\left(W^{3,p}(\Omega),\mathbb{R}^3\right),\text{在边界 }\partial\Omega\text{ 上 }\nabla z\cdot\mathbf{n}=0\right\},$$

其中$1\le p<\infty$。

利用椭圆方程正则性理论和 Schauder 不动点定理，可得到如下结果。

**引理 3** 设 $\alpha>0$，$\varepsilon>0$，$\Omega$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中有界光滑区域，则对给定的 $\mathbf{u}\in\mathbf{M}_p$，以下问题

$$\begin{cases}\alpha(\rho-h)+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=\epsilon\Delta\rho,\\ \nabla\rho\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{12}$$

存在映射 $\mathcal{S}_1:\mathbf{M}_p\to M_p$，$3<p<\infty$，满足

(i) $\rho=\mathcal{S}_1(\mathbf{u})$ 为问题(12)弱解，且 $\int_\Omega\rho=\int_\Omega h$。

(ii) $\rho\ge0$，a.e.于 $\Omega$。

(iii) $\epsilon\|\nabla\rho\|_{L^2(\Omega)}^2\le C\|\rho^2\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$。 (13)

若 $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le\mathbf{K}$，则有 $\|\rho\|_{W^{2,p}}\le C(1+\mathbf{K})$。 (14)

**引理 4** 设 $\Omega$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中有界光滑区域，则对给定的 $\mathbf{u}\in\mathbf{M}_p$，$\rho=\mathcal{S}_1(\mathbf{u})$，以下问题

$$\begin{cases}\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\chi=-\mu,\\ \rho\mu=-\Delta\chi+\rho(\chi^3-\chi),\\ \nabla\chi\cdot n|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{15}$$

存在映射 $\mathcal{S}_2:\mathbf{M}_p\to N_p$，$3<p<\infty$，满足

(i) $\mathcal{S}_2(\mathbf{u})=\chi$。

(ii) $|\chi|\le1$，且

$$\|\chi\|_{W^{2,\frac{2q}{2+q}}(\Omega)}+\|\nabla\chi\|_{L^{\frac{6q}{6+q}}(\Omega)}\le C\left(\|\mu\|_{L^2(\Omega)}\|\rho\|_{L^q(\Omega)}+1\right).\tag{16}$$

定义映射 $\mathcal{T}:\mathbf{M}_p\to\mathbf{M}_p$，$\mathcal{T}(\mathbf{u})=\mathbf{w}$ 是以下问题的解

$$\begin{cases}-\nu\Delta\mathbf{w}-(\nu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}=-\alpha(\rho+h)\mathbf{u}-\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})-\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\\ \qquad-\nabla\rho^\gamma-\delta\nabla\rho^\beta-\operatorname{div}\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\frac{|\nabla\chi|^2}{2}\mathbb{I}\right)=\rho\mathbf{F},\\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\nu(\nabla\mathbf{w}+\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{w})\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}+k\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_n|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{17}$$

其中 $\rho=\mathcal{S}_1(\mathbf{u})$，$\chi=\mathcal{S}_2(\mathbf{u})$。由于方程的右端项属于 $L^p(\Omega)$，可得 $\mathcal{T}:\mathbf{M}_p\to\mathbf{M}_p$ 是连续紧算子。

最后，我们证明 $\{u\in\mathbf{M_p}\,|\,\mathbf{u}=t\mathcal{T}(\mathbf{u}),0\le t\le1\}$ 为有界集。为此，将 $\mathcal{T}(\mathbf{u})=\mathbf{w}$ 代入方程$(17)_1$，在其两边同乘以 $\mathbf{u}$，并在 $\Omega$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}&t\int_\Omega\mathbf{u}\cdot\nabla\rho^\gamma+t\delta\int_\Omega\mathbf{u}\cdot\nabla\rho^\beta+\int_\Omega\nu|\nabla\mathbf{u}|^2+(\nu+\lambda)|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2+\int_{\partial\Omega}k\left(|\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_1|^2+|\mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_2|^2\right)\\&\le t\int_\Omega\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}+t\int_\Omega\rho\mu\nabla\chi\cdot\mathbf{u}-t\int_\Omega\rho(\chi^3-\chi)\nabla\chi\cdot\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{18}$$

对方程$(10)_3$两边乘以 $t\mu$，方程$(10)_1$两边乘以 $t\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}+\frac{1}{4}\chi^4-\frac{1}{2}\chi^2\right)$，在 $\Omega$ 上积分，结合式(18)，可得

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + t\|\mu\|_{L^2(\Omega)} + t\delta\int_\Omega \nabla\rho^\beta\cdot\mathbf{u} + t\alpha\int_\Omega \rho\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}+\frac{1}{4}\chi^4-\frac{1}{2}\chi^2\right) \\ \le t\int_\Omega \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} + t\int_\Omega(\epsilon\Delta\rho+\alpha h)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}+\frac{1}{4}\chi^4-\frac{1}{2}\chi^2\right). \tag{19}$$

设 $U=\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2+t\|\mu\|_{L^2(\Omega)}^2$，对(19)右端项利用分部积分和散度定理，有

$$U\le C\left(1+\|\rho\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}^2+\sqrt{\epsilon}\left\|\rho^2\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}U^{\frac{3}{4}}\right). \tag{20}$$

若 $p>\frac{6}{5}$，有

$$U\le C\left(1+\|\rho\|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}\right)^2\le C\left(1+\|\rho\|_{L^p(\Omega)}\right)^2, \tag{21}$$

即

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}\le C\left(1+\|\rho\|_{L^p(\Omega)}\right),\ \|\mu\|_{L^2(\Omega)}\le C\left(1+\|\rho\|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{22}$$

下一步我们进行 Bgovskii 估计，对动量方程两边同乘函数

$$\mathbf{\Phi}=\mathcal{B}\left[\rho^\beta-\left\{\rho^\beta\right\}_\Omega\right],$$

其中 $\left\{\rho^\beta\right\}_\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\rho^\beta\mathrm{d}x$，$\mathcal{B}\sim\mathrm{div}^{-1}$ 是 Bgovskii 算子，满足

$$\|\nabla\mathbf{\Phi}\|_{L^p(\Omega)}\le C\left\|\rho^\beta\right\|_{L^p(\Omega)},\quad \mathbf{\Phi}|_{\partial\Omega}=0.$$

可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\rho^{\gamma+\beta}+\delta\int_\Omega\rho^{2\beta}&\le\int_\Omega\rho^\gamma\left\{\rho^\beta\right\}_\Omega+\delta\int_\Omega\rho^\beta\left\{\rho^\beta\right\}_\Omega+\int_\Omega\alpha(\rho+h)\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Phi}+\frac{1}{2}\int_\Omega\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}:\mathbf{\Phi}\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{\Phi}+\int_{\partial\Omega}k(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{\Phi}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}S+\int_\Omega\nu\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{\Phi}\\&+\int_\Omega(\nu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{\Phi}+\int_\Omega|\nabla\chi|^2|\nabla\mathbf{\Phi}|+\int_\Omega\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{\Phi}\\&=\sum_{i=1}^{10}|I_i|.\end{aligned} \tag{23}$$

利用算子 $\mathcal{B}$ 的性质和 Hölder 不等式，有

$$\sum_{i=1}^{10}|I_i|\le C\left(\|\rho\|_{L^{2\beta}(\Omega)}^{\beta+4}+\|\rho\|_{L^{2\beta}(\Omega)}^{\beta+\gamma}+1\right).$$

其中 $\beta>\max\{6,\gamma\}$。上式结合式(23)，易得

$$\|\rho\|_{L^{2\beta}(\Omega)}\le C. \tag{24}$$

令式(22)中 $p=2\beta$，有

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}\le C,\quad \|\mu\|_{L^2(\Omega)}\le C. \tag{25}$$

根据引理 2，得到 $\mathbf{u}\in W^{1,p}(\Omega)$，$\rho\in L^\infty(\Omega)$。进一步，对方程组$(17)_2$两边乘以 $\nabla\mathbf{u}$，重复上述步骤，可以得到 $\mathbf{u}\in W^{2,p}(\Omega)$。

至此，我们证明了$\left\{u\in\mathbf{M}_p\,|\,\mathbf{u}=t\mathcal{T}(\mathbf{u}),0\le t\le 1\right\}$为有界集。应用 Schauder 不动点定理，可以得到如下结果。

**命题 1** 设$\alpha>0$，$\varepsilon>0$，$\beta>\max\{6,\gamma\}$，则近似系统(10)、(11)至少存在一个弱解$(\rho_\varepsilon,\mathbf{u}_\varepsilon,\chi_\varepsilon)$，满足

$$\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}+\epsilon\|\nabla\rho_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\chi_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\le C, \tag{26}$$

$$\|\rho_\epsilon\|_{L^{2\beta}(\Omega)}+\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|\mu_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\chi_\epsilon\|_{L^{\frac{6\beta}{3+\beta}}(\Omega)}+\|\Delta\chi_\epsilon\|_{L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(\Omega)}\le C, \tag{27}$$

其中$1<p<+\infty$。

### 3.2. 极限过程$\alpha\to 0^+$，$\varepsilon\to 0^+$

本节利用弱收敛极限方法来处理近似系统(10)、(11)的非线性项和边界条件，从而推导出稳态弱解的存在性。弱收敛极限方法主要用于研究函数序列或函数空间的极限行为，其优势在于它能够处理一些传统方法难以处理的非线性问题。首先，对近似系统(10)、(11)关于$\alpha\to 0^+$，$\varepsilon\to 0^+$取极限。由命题 1，可得

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_\epsilon\rightharpoonup\mathbf{u}_\delta \text{ 于 } W^{1,q}(\Omega),\quad q>3\\
\mathbf{u}_\epsilon\to\mathbf{u}_\delta \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
\rho_\epsilon\rightharpoonup^*\rho_\delta \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
\rho_\epsilon^\gamma\rightharpoonup^*\overline{\rho_\delta^\gamma} \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
\chi_\epsilon\rightharpoonup\chi_\delta \text{ 于 } W^{2,2}(\Omega),\\
\nabla\chi_\epsilon\to\nabla\chi_\delta \text{ 于 } L^6(\Omega),\\
\mu_\epsilon\rightharpoonup\mu_\delta \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\rightharpoonup\rho_\delta\mathbf{u}_\delta \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\otimes\mathbf{u}_\epsilon\rightharpoonup^*\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
\rho_\epsilon\left(\chi_\epsilon^3-\chi\right)_\epsilon\rightharpoonup\rho_\delta\left(\chi_\delta^3-\chi_\delta\right) \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\chi_\epsilon\rightharpoonup\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\chi_\delta \text{ 于 } L^6(\Omega),\\
\rho_\epsilon\chi_\epsilon\rightharpoonup\rho_\delta\chi_\delta \text{ 于 } L^6(\Omega),\\
\rho_\epsilon\mu_\epsilon\rightharpoonup\overline{\rho_\delta\mu_\delta} \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
\nabla\chi_\epsilon\otimes\nabla\chi_\epsilon\rightharpoonup\nabla\chi_\delta\otimes\nabla\chi_\delta \text{ 于 } L^3(\Omega),\\
|\nabla\chi_\epsilon|^2\rightharpoonup|\nabla\chi_\delta|^2 \text{ 于 } L^3(\Omega).
\end{gathered} \tag{28}$$

在近似系统(10)、(11)中，令$\varepsilon\to 0^+$，$\alpha\to 0^+$，并利用上式，可得

$$\begin{cases}
\operatorname{div}(\rho_\delta\mathbf{u}_\delta)=0,\quad \text{于 } \mathcal{D}'(\Omega),\\
\operatorname{div}(\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta)+\nabla\overline{P}_\delta=\nu\Delta\mathbf{u}_\delta+(\nu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u-\operatorname{div}\left(\nabla\chi_\delta\otimes\nabla\chi_\delta-\dfrac{|\nabla\chi_\delta|^2}{2}\mathbb{I}\right)+\rho_\delta\mathbf{F},\quad \text{于 } \mathcal{D}'(\Omega),\\
\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\chi_\delta=-\mu_\delta,\quad \text{于 } \mathcal{D}'(\Omega),\\
\overline{\rho_\delta\mu_\delta}=-\Delta\chi_\delta+\rho_\delta\left(\chi_\delta^3-\chi\right),\quad \text{于 } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{cases} \tag{29}$$

其中 $\bar{P}=\overline{\rho_\delta^\gamma+\delta\rho_\delta^\beta}$ 。

下一步需证明 $\overline{\rho_\delta\mu_\delta}=\rho_\delta\mu_\delta$ ， $\bar{P}_\delta=P_\delta$ 。利用 Helmholtz 速度分解定理[8]对速度 $\mathbf{u}_\delta$ 进行分解，该定理指出流体中任意一点的速度可以分解为旋转部分和平移部分之和，即： $\mathbf{u}_\delta=\nabla\phi_\delta+\mathrm{curl}\mathbf{A}_\delta$ ， $\omega_\delta=\mathrm{curl}\mathbf{u}_\delta$ ，其中 $\phi_\delta,\mathbf{A}_\delta,\omega_\delta$ 满足

$$
\begin{gathered}
\mathrm{curlcurl}\mathbf{A}_\delta=\mathrm{curl}\mathbf{u}_\delta=\omega_\delta,\quad \text{于 } \Omega,\\
\mathrm{divcurl}\mathbf{A}_\delta=0,\quad \text{于 } \Omega,\\
\mathrm{curl}\mathbf{A}_\delta\cdot\mathbf{n}=0,\quad \text{于 } \partial\Omega,\\
\Delta\phi_\delta=\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta,\quad \text{于 } \Omega,\\
\nabla\phi_\delta\cdot\mathbf{n}=0,\quad \text{于 } \partial\Omega,\\
\int_\Omega\phi_\delta\mathrm{d}x=0.
\end{gathered}
$$

以及

$$
\begin{gathered}
\left\|\nabla\mathrm{curl}\mathbf{A}_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le\left\|\omega_\delta\right\|_{L^q(\Omega)},\\
\left\|\nabla^2\mathrm{curl}\mathbf{A}_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le\left\|\omega_\delta\right\|_{W^{1,q}(\Omega)},\ 1<q<\infty.
\end{gathered}
$$

对方程$(29)_2$两边作用旋度，有

$$
-\nu\Delta\omega_\delta=-\mathrm{curl}\left(\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta\right)+\mathrm{curl}\left(\rho_\delta\mathbf{F}-\mathrm{curl}\left(\nabla\chi_\delta\Delta\chi_\delta\right)\right).
$$

由于

$$
\begin{gathered}
\left\|\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le\left\|\rho_\delta\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\mathbf{u}_\delta\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\nabla\mathbf{u}_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le C,\\
\left\|\rho_\delta\mathbf{F}\right\|_{L^q(\Omega)}\le\left\|\mathbf{F}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\rho_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le C,\\
\left\|\nabla\chi_\delta\Delta\chi_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le\left\|\nabla\chi_\delta\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\Delta\chi_\delta\right\|_{L^q(\Omega)}\le C,
\end{gathered}
$$

其中 $q\le6\beta/(\beta+6)$ 。结合椭圆正则性理论，可得 $\left\|\omega_\delta\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le C$ 。

其次，对 $\mathbf{u}_\varepsilon$ 进行 Helmholtz 分解： $\mathbf{u}_\varepsilon=\nabla\phi_\varepsilon+\mathrm{curl}\mathbf{A}_\varepsilon$ ，并对近似系统$(29)_2$两边作用旋度，可得

$$
-\nu\omega_\epsilon=\underbrace{\mathrm{curl}\left(-\frac{1}{2}\alpha\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon-\frac{3}{2}\alpha h\mathbf{u}_\epsilon-\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\cdot\nabla\mathbf{u}_\epsilon+\rho_\epsilon\mathbf{F}-\nabla\chi_\epsilon\Delta\chi_\epsilon\right)}_{=:\mathbf{H}_1}\underbrace{-\mathrm{curl}\left(\frac{1}{2}\epsilon\Delta\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\right)}_{=:\mathbf{H}_2}=:\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2,
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_1&=-\left(2c_2-\frac{k}{\nu}\right)\mathbf{u}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_2,&&\text{于 } \partial\Omega \text{ 上},\\
\omega_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_2&=\left(2c_2-\frac{k}{\nu}\right)\mathbf{u}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_1,&&\text{于 } \partial\Omega \text{ 上},\\
\mathrm{div}\omega_\epsilon&=0,&&\text{于 } \partial\Omega \text{ 上}.
\end{aligned}
$$

令 $\omega_\epsilon=\omega_\epsilon^0+\omega_\epsilon^1+\omega_\epsilon^2$ ，其中 $\omega_\epsilon^0,\omega_\epsilon^1,\omega_\epsilon^2$ 满足

$$
\begin{array}{llll}
\nu\Delta\omega_\epsilon^0=0, & \nu\Delta\omega_\epsilon^1=\mathbf{H}_1, & \nu\Delta\omega_\epsilon^2=\mathbf{H}_2, & \text{于 } \Omega \text{ 内},\\
\omega_\epsilon^0\cdot\boldsymbol{\tau}_1=-\left(2c_2-\dfrac{k}{\nu}\right)\mathbf{u}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_2, & \omega_\epsilon^1\cdot\boldsymbol{\tau}_1=0, & \omega_\epsilon^2\cdot\boldsymbol{\tau}_1=0, & \text{于 } \partial\Omega \text{ 上},\\
\omega_\epsilon^0\cdot\boldsymbol{\tau}_2=\left(2c_2-\dfrac{k}{\nu}\right)\mathbf{u}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\tau}_1, & \omega_\epsilon^1\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0, & \omega_\epsilon^2\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0, & \text{于 } \partial\Omega \text{ 上},\\
\mathrm{div}\omega_\epsilon^0=0, & \mathrm{div}\omega_\epsilon^1=0, & \mathrm{div}\omega_\epsilon^2=0, & \text{于 } \partial\Omega \text{ 上}.
\end{array}
$$

结合命题 1，利用内插不等式，可得到如下结论。

**引理 5** 若 $\omega_\epsilon=\omega_\epsilon^0+\omega_\epsilon^1+\omega_\epsilon^2$ 满足上述条件，则有

$$\left\|\omega_\epsilon^2\right\|_{L^p(\Omega)}\le C(m)\epsilon^{\frac{1}{2}},\qquad p\in[1,2],$$

$$\left\|\omega_\epsilon^0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}+\left\|\omega_\epsilon^1\right\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le C\left(m^{1+\gamma\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{q}\right)}\right),\quad q\in\left[2,\frac{6\beta}{6+\beta}\right].$$

为了使密度 $\rho_\varepsilon$ 弱收敛成为强收敛，我们需要排除密度 $\rho_\varepsilon$ 在弱收敛过程中奇异性的振荡和集中，因此引入“有效粘性通量”的定义。将速度 $\mathbf{u}_\varepsilon$ 的 Helmholtz 分解：$\mathbf{u}_\varepsilon=\nabla\phi_\varepsilon+\text{curl}\mathbf{A}_\varepsilon$，代入近似动量方程，得到

$$\nabla\left(-(2\nu+\lambda)\Delta\phi_\epsilon+p_\epsilon\right)=\nu\Delta\text{curl}\mathbf{A}_\epsilon+\rho_\epsilon\mathbf{F}-\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon\cdot\nabla\mathbf{u}_\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon\Delta\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon$$
$$-\frac{3}{2}\alpha h\mathbf{u}_\epsilon-\frac{1}{2}\alpha\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon-\text{div}\left(\nabla\chi_\epsilon\otimes\nabla\chi_\epsilon-\frac{\left|\nabla\chi_\epsilon\right|^2}{2}\mathbb{I}\right).$$

其中， $p_\epsilon=\nabla\rho_\epsilon^\gamma+\delta\nabla\rho_\epsilon^\beta$，定义：

$$G_\epsilon=-(2\nu+\lambda)\Delta\phi_\epsilon+p_\epsilon=-(2\nu+\lambda)\text{div}\mathbf{u}_\epsilon+p_\epsilon.$$

同样的，我们将 $\mathbf{u}_\delta=\nabla\phi_\delta+\text{curl}\mathbf{A}_\delta$ 代入方程(29)$_2$，有

$$\nabla\left(-(2\nu+\lambda)\Delta\phi_\delta+\overline{p}_\delta\right)=\nu\Delta\text{curl}\mathbf{A}_\delta+\rho_\delta\mathbf{F}-\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta-\text{div}\left(\nabla\chi_\delta\otimes\nabla\chi_\delta-\frac{\left|\nabla\chi_\delta\right|^2}{2}\mathbb{I}\right).$$

接下来，定义“有效粘性通量”，如下

$$G_\delta=-(2\nu+\lambda)\Delta\phi_\delta+\overline{p}_\delta=-(2\nu+\lambda)\text{div}\mathbf{u}_\delta+\overline{p}_\delta.\tag{30}$$

其中 $\overline{p}_\delta=\nabla\overline{\rho_\delta^\gamma}+\delta\nabla\overline{\rho_\delta^\beta}$。注意到

$$\int_\Omega G_\epsilon=\int_\Omega p_\epsilon,\ \int_\Omega G_\delta=\int_\Omega\overline{p}_\delta.$$

这是由于

$$\int_\Omega G_\epsilon=\int_\Omega-(2\nabla+\lambda)\text{div}\mathbf{u}_\epsilon+\int_\Omega p_\epsilon=\int_{\partial\Omega}-(2\nabla+\lambda)\mathbf{u}_\epsilon\cdot\mathbf{n}+\int_\Omega p_\epsilon=\int_\Omega p_\epsilon,$$
$$\int_\Omega G_\delta=\int_\Omega-(2\nabla+\lambda)\text{div}\mathbf{u}_\delta+\int_\Omega\overline{p}_\delta=\int_{\partial\Omega}-(2\nabla+\lambda)\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{n}+\int_\Omega\overline{p}_\delta=\int_\Omega\overline{p}_\delta.$$

令 $G_\epsilon=G_\epsilon^1+G_\epsilon^2$，定义 $\nabla G_\epsilon^2=-\frac{1}{2}\epsilon\Delta\rho_\epsilon\mathbf{u}_\epsilon-\nu\text{curl}\omega_\epsilon^2$，则 $\int_\Omega G_\epsilon^2\text{d}x=0$。结合引理 5，得到如下结论。

**引理 6**

$$G_\epsilon\to G_\delta,\quad 于\ L^2(\Omega),$$
$$\left\|G_\delta\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le C(\xi)\left(1+m^{1+\frac{2\beta}{3}+\xi}\right),\quad \xi\in\left(0,\frac{\beta-6}{3}\right].$$

定义非增光滑函数 $N:[0,\infty)\to[0,1]$,满足

$$N(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,m-3],\\ \in[0,1], & t\in(m-3,m-2),\\ 0, & t\in[m-2,\infty).\end{cases}$$

对方程$(29)_1$两边乘以$N^l(\rho_\epsilon)$，在$\Omega$上积分，其中$l\in N$，利用有效粘性通量及引理 6，可得如下引理。

**引理 7** 存在$m_0$，对任意$m>m_0$，成立

$$\frac{m-3}{m}(m-3)^\gamma-\|G_\delta\|_{L^\infty(\Omega)}\ge 1,$$

且有$\lim\limits_{\epsilon\to0}\left|\{\rho_\epsilon>m-3\}\right|=0$。

最后我们证明密度的强收敛性。取$\eta>0$,并对方程$(29)_1$两边乘以$\ln(m)-\ln(\rho_\delta+\eta)$，在$\Omega$上积分，利用引理 7 及 Fatuo 引理，当$\eta\to0^+$，$\alpha\to0^+$时，可以得到如下结论。

**引理 8** $\int_\Omega\overline{p_\delta\rho_\delta}\le\int_\Omega G_\delta\rho_\delta$。

设$\mathbf{u}_\delta\in W^{1,q}(\Omega)$，$\rho_\delta\in L^p(\Omega)$，其中$1<q<\infty$，$1<p<\infty$，有$\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_\delta\in L^s(\Omega)$，其中$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$。

则存在$\rho_n\in C^\infty(\overline{\Omega})$，使得

$$\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_n\to\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho,\qquad 于\ L^s(\Omega),$$
$$\rho_n\to\rho_\delta,\qquad 于\ L^p(\Omega).$$

取满足上述条件的$\rho_n$，有

$$\int_\Omega(\rho_n\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta+\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_n)=\int_\Omega\mathrm{div}(\rho_n\mathbf{u}_\delta)=\int_{\partial\Omega}\rho_n\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=0.$$

令$n\to\infty$，由 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$\int_\Omega(\rho_\delta\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta+\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_\delta)=0.$$

由于$0<\rho_n<m$，取$\eta>0$，对连续性方程两边乘以$-\ln\frac{\eta}{\rho_n+\eta}$，得到

$$0=-\int_\Omega\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\ln\frac{\eta}{\rho_n+\eta}=\int_\Omega\frac{\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_n}{\rho_n+\eta}.$$

令$n\to\infty$，可得

$$0=\int_\Omega\frac{\rho_\delta\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_\delta}{\rho_\delta+\eta}.$$

再令$\eta\to\infty$，得到$\int_\Omega\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\rho_\delta=0$，即$\int_\Omega\rho_\delta\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta=0$。

因此，对$-(2\nu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta+\overline{p}_\delta=G_\delta$两边乘以$\rho_\delta$在$\Omega$上积分，有

$$\int_\Omega\overline{p}_\delta\rho_\delta=\int_\Omega G_\delta\rho_\delta. \tag{31}$$

结合引理 8 及式(31)，得到

$$\int_\Omega\overline{p_\delta\rho_\delta}\le\int_\Omega\overline{p}_\delta\rho_\delta.$$

下面证明$\rho_\varepsilon$在$L^\beta(\Omega)$上强收敛。设$B\subset\Omega$，根据插值不等式，有

$$\frac{1}{|B|}\int_B\rho_\epsilon\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B1\right)^{1-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\rho_\epsilon^\gamma\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon^\beta \le \left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon^{\beta+1}\right)^{1-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

因此，

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon \frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon^\beta\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \le \left(\frac{1}{|B|}\int_B 1\right)^{1-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho_\epsilon^{\beta+1}\right)^{1-\frac{1}{\beta}}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$， $|B| \to 0$，可得 $\rho_\delta \overline{\rho_\delta^\beta} \le \overline{\rho_\delta^{\beta+1}}$，a.e.于 $\Omega$。

结合式(31)，有

$$\rho_\delta \overline{\rho_\delta^\beta} = \overline{\rho_\delta^{\beta+1}}.$$

类似可得：

$$\overline{\rho_\delta^\beta}^{\frac{\beta+1}{\beta}} \le \overline{\rho_\delta^{\beta+1}}, \rho_\delta \le \overline{\rho_\delta^\beta}^{\frac{1}{\beta}}.$$

因此，

$$\rho_\delta \overline{\rho_\delta^\beta} = \overline{\rho_\delta^{\beta+1}} \ge \overline{\rho_\delta^\beta}^{\frac{\beta+1}{\beta}} \ge \rho_\delta \overline{\rho_\delta^\beta}.$$

由上式可得 $\overline{\rho_\delta^{\beta+1}} = \overline{\rho_\delta^\beta}^{\frac{\beta+1}{\beta}}$，即 $\rho_\delta^\beta = \overline{\rho_\delta^\beta}$。

故 $\rho_\epsilon \to \rho_\delta$ 于 $L^\beta(\Omega)$。

综上，可得到如下命题。

**命题 2** 设 $\beta > \max\{6,\gamma\}$，对于任意的 $\delta > 0$，则以下问题

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta) = 0, \\ \operatorname{div}(\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) + \nabla(\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta) = \nu\Delta\mathbf{u}_\delta + (\nu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \rho_\delta \mathbf{F} - \operatorname{div}\left(\nabla\chi_\delta \otimes \nabla\chi_\delta - \frac{|\nabla\chi_\delta|^2}{2}\mathbb{I}\right), \\ \rho_\delta \mathbf{u}_\delta \cdot \nabla\chi_\delta = -\mu_\delta, \\ \rho_\delta\mu_\delta = -\Delta\chi_\delta + \rho_\delta(\chi_\delta^3 - \chi). \end{cases} \tag{32}$$

边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{n}\cdot\nu(\nabla\mathbf{u}_\delta + \nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_\delta)\cdot\boldsymbol{\tau}_n + k\mathbf{u}_\delta\cdot\boldsymbol{\tau}_n|_{\partial\Omega} = 0, \\ \nabla\chi_\delta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

存在至少一个弱解 $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \chi_\delta)$。

### 3.3. 极限过程 $\delta \to 0^+$

本节将对问题(32)、(33)取极限 $\delta \to 0^+$，从而证明了定常等熵可压缩 NSAC 方程组的弱解存在性。首先我们需要得到函数 $(\rho_\delta, \mathbf{u}_\delta, \chi_\delta)$ 与 $\delta$ 无关的估计，对动量方程$(10)_2$两边乘以

$$\mathbf{\Phi} = \mathcal{B}\left[\rho_\delta - \{\rho_\delta^\theta\}_\Omega\right],$$

其中 $\theta > 0$。从而有

$$\int_\Omega \rho_\delta^{\gamma+\theta}+\delta\int_\Omega \rho_\delta^{\beta+\theta}\le \int_\Omega \rho_\delta^{\gamma}\left\{\rho_\delta^{\theta}\right\}_\Omega+\delta\int_\Omega \rho_\delta^{\beta}\left\{\rho_\delta^{\theta}\right\}_\Omega+\int_\Omega \nu\nabla\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\mathbf{\Phi}+\int_\Omega(\nu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta\cdot\nabla\mathbf{\Phi}$$
$$-\int_\Omega \rho_\delta\mathbf{u}_\delta\otimes\mathbf{u}_\delta:\mathbf{\Phi}+\int_\Omega\rho_\delta\mathbf{F}\cdot\mathbf{\Phi}+\int_\Omega|\nabla\chi|^2|\nabla\mathbf{\Phi}|+\int_{\partial\Omega}k(\mathbf{u}_\delta\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{\Phi}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}S \tag{34}$$
$$=\sum_{i=1}^{8}|J_i|.$$

利用算子$\mathcal{B}$的性质和 Hölder 不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{8}|J_i|\le C\left(\|\rho_\delta\|_{L^{\gamma+\theta}(\Omega)}^{\theta+2+\frac{\gamma+\theta}{6(\gamma+\theta)}}+\|\rho_\delta\|_{L^{\beta+\theta}(\Omega)}^{\frac{(\beta+\theta)(\beta-1)}{\beta+\theta-1}+\theta}+1\right).$$

这里$\theta=\min\{2\gamma-6,2\gamma-3,\gamma\}$，且$\theta>0$，则$\gamma_{\min}=3$。上式结合式(34)，易得

$$\|\rho_\delta\|_{L^{\gamma+\theta}(\Omega)}\le C,\quad \delta\|\rho_\delta\|_{L^{\beta+\theta}(\Omega)}\le C.$$

当$3<\gamma\le 6$时，取$\theta=2\gamma-6$。由引理 4 式，有

$$\|\Delta\chi_\delta\|_{L^{\frac{6(\gamma-2)}{3\gamma-4}}(\Omega)}+\|\nabla\chi_\delta\|_{L^{\frac{6(\gamma-2)}{\gamma}}(\Omega)}\le C. \tag{35}$$

当$\gamma>6$时，取$\theta=\gamma$，结合引理 2 有

$$\|\rho_\delta\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u_\delta\|_{W^{1,p}(\Omega)}+\|\nabla\chi_\delta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta\chi\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)}\le C. \tag{36}$$

综合式(35)和(36)，得到如下命题。

**命题 3** 对于$\gamma>3$，设$(\rho_\delta,\mathbf{u}_\delta,\chi_\delta)$为命题 2 得到的弱解，则有

$$\|\rho_\delta\|_{L^{\gamma+\theta}(\Omega)}\le C,\quad \delta\|\rho_\delta\|_{L^{\beta+\theta}(\Omega)}\le C.$$

进一步，当$3<\gamma\le 6$时，有

$$\|\rho_\delta\|_{L^{3\gamma-6}(\Omega)}+\|u_\delta\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|\mu_\delta\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\chi_\delta\|_{L^{\frac{6\gamma-12}{\gamma}}(\Omega)}+\|\Delta\chi_\delta\|_{L^{\frac{6\gamma-12}{3\gamma-4}}(\Omega)}\le C. \tag{37}$$

当$\gamma>6$时，有

$$\|\rho_\delta\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u_\delta\|_{W^{1,p}(\Omega)}+\|\mu_\delta\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\chi_\delta\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\Delta\chi\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)}\le C. \tag{38}$$

由命题 3，我们有以下结果

1) 当$\gamma>6$时，有$6\gamma/\gamma+6>3$，结合式(38)，可得$W^{2,6\gamma/(\gamma+6)}(\Omega)\hookrightarrow W^{2,2}(\Omega)$，进而$\|\Delta\chi\|_{L^2(\Omega)}\le C$。

令$\delta\to 0^+$，有

$$\mathbf{u}_\delta\rightharpoonup\mathbf{u}\text{ 于 }W^{1,q}(\Omega),\quad q>3$$
$$\rho_\delta\rightharpoonup^*\rho\text{ 于 }L^\infty(\Omega),$$
$$\mathbf{u}_\delta\to\mathbf{u}\text{ 于 }L^\infty(\Omega),$$
$$\rho_\delta^\gamma\rightharpoonup^*\overline{\rho^\gamma}\text{ 于 }L^\infty(\Omega),$$
$$\delta\rho_\delta^\beta\to 0\text{ 于 }\mathcal{D}'(\Omega),$$
$$\chi_\delta\rightharpoonup\chi\text{ 于 }W^{2,2}(\Omega),$$
$$\nabla\chi_\delta\to\nabla\chi\text{ 于 }L^6(\Omega),$$
$$\mu_\delta\rightharpoonup\mu\text{ 于 }L^2(\Omega),$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u} \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \text{ 于 } L^\infty(\Omega),\\
&\rho_\delta\left(\chi_\delta^3-\chi_\delta\right) \rightharpoonup \rho\left(\chi^3-\chi\right) \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \chi_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u}\chi \text{ 于 } L^6(\Omega),\\
&\rho_\delta \chi_\delta \rightharpoonup \rho\chi \text{ 于 } L^6(\Omega),\\
&\rho_\delta \mu_\delta \rightharpoonup \overline{\rho\mu} \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
&\nabla\chi_\delta\otimes\nabla\chi_\delta \rightharpoonup \nabla\chi\otimes\nabla\chi \text{ 于 } L^3(\Omega),\\
&\left|\nabla\chi_\delta\right|^2 \rightharpoonup \left|\nabla\chi\right|^2 \text{ 于 } L^3(\Omega).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

2) 当$3<\gamma\le 6$时，结合式(35)，令$\delta\to 0^+$，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ 于 } W^{1,2}(\Omega),\\
&\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} \text{ 于 } L^q(\Omega),\quad 1<q<6,\\
&\rho_\delta \rightharpoonup \rho \text{ 于 } L^{3\gamma-6}(\Omega),\\
&\rho_\delta^\gamma \rightharpoonup \overline{\rho^\gamma} \text{ 于 } L^{(3\gamma-6)/\gamma}(\Omega),\\
&\delta\rho_\delta^\beta \to 0 \text{ 于 } L^{(3\gamma-6)/\gamma}(\Omega),\\
&\chi_\delta \rightharpoonup \chi \text{ 于 } W^{2,(6\gamma-12)/(3\gamma-4)}(\Omega),\\
&\nabla\chi_\delta \to \nabla\chi \text{ 于 } L^{2(3\gamma-6)/\gamma}(\Omega),\\
&\mu_\delta \rightharpoonup \nabla\mu \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
&\rho_\delta \mu_\delta \rightharpoonup \overline{\rho\mu} \text{ 于 } L^2(\Omega),\\
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u} \text{ 于 } L^{6(\gamma-2)/\gamma}(\Omega),\\
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \text{ 于 } L^{3(\gamma-2)/\gamma-1}(\Omega),\\
&\rho_\delta\left(\chi_\delta^3-\chi_\delta\right) \rightharpoonup \rho\left(\chi^3-\chi\right) \text{ 于 } L^{3\gamma-6}(\Omega),\\
&\rho_\delta \mathbf{u}_\delta \chi_\delta \rightharpoonup \rho\mathbf{u}\chi \text{ 于 } L^{6(\gamma-2)/\gamma}(\Omega),\\
&\rho_\delta \chi_\delta \rightharpoonup \rho\chi \text{ 于 } L^{3\gamma-6}(\Omega),\\
&\rho_\delta \mu_\delta \rightharpoonup \overline{\rho\mu} \text{ 于 } L^{(6\gamma-12)/(3\gamma-4)}(\Omega),\\
&\nabla\chi_\delta\otimes\nabla\chi_\delta \rightharpoonup \nabla\chi\otimes\nabla\chi \text{ 于 } L^{(3\gamma-6)/\gamma}(\Omega),\\
&\left|\nabla\chi_\delta\right|^2 \rightharpoonup \left|\nabla\chi\right|^2 \text{ 于 } L^{(3\gamma-6)/\gamma}(\Omega).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

令$\delta\to 0^+$，$\left(\rho_\delta,\mathbf{u}_\delta,\chi_\delta\right)$的弱极限函数在分布意义下满足

$$
\begin{cases}
\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0,\\
\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla\overline{\rho^\gamma}=\nu\Delta\mathbf{u}+(\nu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{div}\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\dfrac{|\nabla\chi|^2}{2}\mathbb{I}\right)+\rho\mathbf{F},\\
\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\chi)=-\mu,\\
\overline{\rho\mu}=-\Delta\chi+\rho\left(\chi^3-\chi\right).
\end{cases}
$$

为完成定理 1 的证明，还需要证明 $\overline{\rho^\gamma}=\rho^\gamma$，$\overline{\rho\mu}=\rho\mu$，a.e.于 $\Omega$。

设 $\rho_\delta$，$\mathbf{u}_\delta$ 满足命题 3，则有下式成立

$$\overline{pT_k(\rho)}-(2\nu+\lambda)\overline{\mathrm{div}\mathbf{u}T_k(\rho)}=\overline{p}\overline{T_k(\rho)}-(2\nu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{u}\overline{T_k(\rho)}.$$

从 3.2 章节过程可知，需要 $(\rho,\mathbf{u})$ 是重整化解。如果 $(\rho,\mathbf{u})\in L^2(\Omega)$，则 $(\rho,\mathbf{u})$ 是重整化解。但当 $\gamma$ 与 $\theta$ 充分小时，$(\rho,\mathbf{u})\in L^2(\Omega)$ 并不成立。为了克服 $\rho$ 不属于 $L^2(\Omega)$ 所引起的困难，接下来我们引入截断函数

$$T_k(z)=kT\left(\frac{z}{k}\right),z\in\mathbb{R},k=1,2,3,\cdots,$$

其中凸函数 $T$ 满足

$$T\in C^\infty(\mathbb{R}),T(z)=\begin{cases}z, & z\le 1,\\ 2, & z\ge 3.\end{cases}$$

则 $T_k(z)$ 有如下估计

$$|T_k(t)-T_k(s)|^{\gamma+1}\le(t^\gamma-s^\gamma)(T_k(t)-T_k(s)),$$

其中 $s,t\ge 0$。由于

$$\begin{aligned}\left\|\overline{T_k(\rho)}-\rho\right\|_{L^p(\Omega)}&\le\liminf_{\delta\to 0}\left\|\overline{T_k(\rho_\delta)}-\rho_\delta\right\|_{L^p(\Omega)}\\&\le\limsup_{\delta\to 0}\left\|\overline{T_k(\rho_\delta)}-\rho_\delta\right\|_{L^p(\Omega)}\\&\le 2^p k^{p-(\gamma+\theta)}\|\rho_\delta\|_{L^{3\gamma-6}(\Omega)}\\&\le C2^p k^{p-(\gamma+\theta)},\end{aligned}$$

其中 $1\le p<\gamma_\theta$。以及

$$\begin{aligned}\|T_k(\rho)-\rho\|_{L^p(\Omega)}&\le 2^p k^{p-(3\gamma-6)}\|\rho_\delta\|_{L^{3\gamma-6}(\Omega)}\\&\le C2^p k^{p-(3\gamma-6)},\end{aligned}$$

其中 $1\le p<3\gamma-6$。令 $k\to 0$，可得

$$\overline{T_k(\rho)}\to\rho\ \text{于}\ L^p(\Omega), \tag{41}$$

$$T_k(\rho)\to\rho\ \text{于}\ L^p(\Omega), \tag{42}$$

其中 $p\in[1,3\gamma-6)$。

**引理 9** $\limsup\limits_{\delta\to 0^+}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}\le C.$

证明：注意到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)}-\overline{\rho^\gamma}\,\overline{T_k(\rho)}&=(2\nu+\lambda)\int_\Omega\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}u}-\overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}u\\&=\limsup_{\delta\to 0^+}\int_\Omega(\rho_\delta^\gamma-\rho^\gamma)(T(\rho_\delta)-T_k(\rho))+\int_\Omega\left(\overline{\rho^\gamma}-\rho^\gamma\right)\left(T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\right).\end{aligned}$$

由于 $t\to t^\gamma$ 是凸映射，$T_k(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凹的，因此

$$\int_\Omega\left(\overline{\rho^\gamma}-\rho^\gamma\right)\left(T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\right)\ge 0.$$

结合式(41)，以及

$$\left\|T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\right\|_{L^2(\Omega)} \le \liminf_{\delta\to 0^+}\left\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

可得

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to 0^+}\int_\Omega\left|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right|^{\gamma+1} &\le \limsup_{\delta\to 0^+}\int_\Omega\left(\rho_\delta^\gamma-\rho^\gamma\right)\left(T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right)\\ &\le(2\nu+\lambda)\lim_{\delta\to 0^+}\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{u}_\delta\left(T_k(\rho_\delta)-\overline{T_k(\rho)}\right)\mathrm{d}x\\ &\le(2\nu+\lambda)\lim_{\delta\to 0^+}\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{u}_\delta\left(T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)+T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\right)\mathrm{d}x\\ &\le C\limsup_{\delta\to 0^+}\left\|\mathbf{u}_\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\limsup_{\delta\to 0^+}\left\|\mathbf{u}_\delta\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}\\ &\le C\limsup_{\delta\to 0^+}\left\|T_k(\rho)-T_k(\rho_\delta)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega\left|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right|^{\gamma+1}\le C.$$

■

最后考虑密度的震荡控制，定义密度的震荡控制，如下

$$OSC_{\gamma+1}[\rho_\delta\to\rho](\Omega)=\sup\limsup_{\delta\to 0^+}\int_\Omega\left|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x.$$

设 $L_k(z)\in C^1(\mathbb{R})$，其中

$$L_k(z)=\begin{cases} z\ln z, & 0\le z<k,\\ z\ln(k)+z\int_k^z\frac{T_k(s)}{s^2}\mathrm{d}s, & z\ge k.\end{cases}$$

由于 $L_k(z)$ 满足式(5)，且有 $zL_k'(z)-L_k(z)=T_k(z)$，将 $L_k(z)$ 代入重整化解，得到

$$\mathrm{div}\left(L_k(\rho_\delta)\mathbf{u}_\delta\right)+T_k(\rho_\delta)\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta=0,\quad 于\ \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3\right).$$

令 $\delta\to 0^+$，并在 $\Omega$ 上积分，得到

$$\int_\Omega \mathrm{div}\left(\overline{L_k(\rho_\delta)}\mathbf{u}_\delta\right)+\overline{T_k(\rho_\delta)\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta}\mathrm{d}x=0.$$

由于

$$\int_\Omega \mathrm{div}\left(\overline{L_k(\rho_\delta)}\mathbf{u}_\delta\right)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\overline{L_k(\rho_\delta)}\mathbf{u}_\delta\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=0,$$

因此，有

$$\int_\Omega\overline{T_k(\rho_\delta)\mathrm{div}\mathbf{u}_\delta}\mathrm{d}x=0.$$

类似，有

$$\int_\Omega T_k(\rho)\mathrm{div}\mathbf{u}\mathrm{d}x=0.$$

结合式(41)，(42)及引理 9，得到

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega\left|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\right|^{\gamma+1}=0.$$

考虑

$$\|\rho_\delta-\rho\|_{L^1(\Omega)}\le\|\rho_\delta-T_k(\rho_\delta)\|_{L^1(\Omega)}+\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L^1(\Omega)}+\|T_k(\rho)-\rho\|_{L^1(\Omega)}.$$

结合式(41)以及(42)，得到 $\rho_\delta\to\rho$ 于 $L^1(\Omega)$。进而有 $\overline{\rho^\gamma}=\rho^\gamma$，$\overline{\rho\mu}=\rho\mu$。

至此，定理 1 和定理 2 得证。

## 4. 解的性质

参考 Chen [6]对非负非平凡解的研究，类似的，我们可以通过椭圆方程的强最大值原理证明 NSAC 系统不存在非负非平凡解，即以下类型的解：

$$0\le\chi(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}),\ \ \chi\ne C,\ \ 0<\rho(x)\in L^\infty(\Omega),\ \ \mathbf{u}\in L^\infty(\Omega).$$

研究上述问题只需考虑问题(1)~(3)中的 Allen-Cahn 方程：

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\chi)=-\mu, & x\in\Omega\\ \rho\mu=-\Delta\chi+\rho(\chi^3-\chi), & x\in\Omega\\ \nabla\chi\cdot\mathbf{n}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{43}$$

**定理 3** 设 $0<\rho(x)\in L^\infty(\Omega)$，$\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega)$，$\chi(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 为问题(43)的解，则当 $\chi(x)\ge 0$ 时，必有 $\chi\ne C$ 成立。

证明：根据定义 1，有 $|\chi(x)|\le 1$。应用反证法，假设 $|\chi(x)|\le 1$ 且 $\chi(x)\ge 0$，则将问题$(43)_1$式代入$(43)_2$式中，得到：

$$\begin{cases}-\Delta\chi+\rho^2\mathbf{u}\cdot\nabla\chi=\rho(\chi^3-\chi)\ge 0, & x\in\Omega\\ \nabla\chi\cdot\mathbf{n}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

设点 $x_0\in\bar{\Omega}$ 为 $\chi(x)$ 在区域 $\bar{\Omega}$ 中的最小值点，应用椭圆方程的强最大值原理，可以得到

$$\chi(x)\equiv C\ \text{或者}\ x_0\in\partial\Omega\ \text{且}\ \nabla\chi\cdot\mathbf{n}|_{x_0}<0$$

由于情况 2 中 $\nabla\chi\cdot\mathbf{n}|_{x_0}<0$ 与条件 $\nabla\chi\cdot\mathbf{n}|_{x_0}=0$ 矛盾，故点 $x_0\in\partial\Omega$ 不存在。因此只有情况 1 成立，即 $\chi(x)\equiv C$。

## 5. 结束语

本文研究了三维 NSAC 系统滑移边界问题的稳态弱解的存在性。在绝热常数 $\gamma>3$ 条件下，我们首先通过构造原问题的近似化方程，利用 Schauder 不动点原理给出近似解的存在性，并得到所需的估计。进一步，通过引入有效粘性通量，证明了近似密度的强收敛性。最后分析极限的收敛情况，证明了稳态弱解的存在性。

## 基金项目

国家自然科学青年科学基金项目：可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组解的大时间行为研究(12301266)。

## 参考文献

[1] Blesgen, T. (1999) A Generalization of the Navier-Stokes Equations to Two-Phase Flows. *Journal of Physics D: Applied*

*Physics*, **32**, 1119-1123. https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/10/307

[2] Feireisl, E., Petzeltová, H., Rocca, E. and Schimperna, G. (2010) Analysis of a Phase-Field Model for Two-Phase Compressible Fluids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**, 1129-1160. https://doi.org/10.1142/s0218202510004544

[3] Ding, S., Li, Y. and Luo, W. (2012) Global Solutions for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System in 1d. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **15**, 335-360. https://doi.org/10.1007/s00021-012-0104-3

[4] Kotschote, M. (2012) Strong Solutions of the Navier-Stokes Equations for a Compressible Fluid of Allen-Cahn Type. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **206**, 489-514. https://doi.org/10.1007/s00205-012-0538-z

[5] Chen, Y., He, Q., Huang, B. and Shi, X. (2022) Navier-Stokes/Allen-Cahn System with Generalized Navier Boundary Condition. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **38**, 98-115. https://doi.org/10.1007/s10255-022-1068-7

[6] 陈森明. 可压缩 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组解的存在性研究[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2020.

[7] Axman, Š. (2016) Decently Regular Steady Solutions to the Compressible NSAC System. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **48**, 131-157. https://doi.org/10.12775/tmna.2016.042

[8] 林建忠. 流体力学[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.