Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 246-258
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411392

二维ω-反左对称代数的分类

王秋艳

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年10月29日；录用日期：2024年11月20日；发布日期：2024年11月29日

摘 要

本文探讨了二维ω-反左对称代数的基本性质及其低维分类。首先，引入ω-反左对称代数的定义，研究其与ω-李代数的代数结构和表示之间的关系。然后通过ω-反左对称代数与ω-李代数的关系，研究二维ω-反左对称代数的代数运算，给出在二维的情况下实数域和复数域上ω-反左对称代数的完全分类。

关键词

ω-反左对称代数，ω-李代数，同构

The Classification of 2-Dimensional ω-Anti-Left Symmetric Algebras

Qiuyan Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 29th, 2024; accepted: Nov. 20th, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

This paper explores the fundamental properties and classification of two-dimensional ω-anti-pre algebras. First, we introduce the definition of ω-anti-pre algebras and study the relationship between ω-anti-pre algebras and ω-Lie algebras in the algebraic structure and representation. Then through the relationship between ω-anti-pre algebras and ω-Lie algebras, we study the algebraic operations of two-dimensional ω-anti-pre algebras and provide a complete classification of ω-anti-pre algebras over the real and complex fields in the two-dimensional case.

Keywords

ω-Anti-Left Symmetric Algebra, ω-Lie Algebra, Isomorphism

文章引用: 王秋艳. 二维 ω-反左对称代数的分类[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 246-258. DOI: 10.12677/pm.2024.1411392

1. 引言

ω-李代数的概念是 Nurowski 在[1]中引入的，它与黎曼几何(见[2] [3])中的等参超曲面的研究有关，关于 ω-李代数有很多研究，如[4] [5]中研究了低维 ω-李代数的分类。反左对称李代数的概念是 Guilai Liu 和 Chengming Bai 在[6]中给出的，在这篇文章中研究了其与反 O-算子、李代数上的交换 2-cocycles、Novikov 代数等相关结构的关系。类似于李代数与反左对称李代数的关系[6]，本文从 ω-李代数入手引入 ω-反左对称代数。本文的结构如下，在第二部分给出几个与 ω-李代数和反左对称代数相关的概念；第三部分引入 ω-反左对称代数的定义，并且给出 ω-反左对称代数与 ω-李代数的关系；第四部分给出二维 ω-反左对称代数的代数运算，并且在第五部分考虑二维 ω-反左对称代数的分类。

2. 预备知识

定义 2.1 [1] 设 A 是数域 F 上的向量空间，若双线性映射 $[\cdot,\cdot]: A\times A\to A$ 和 A 上的反对称双线性型 $\omega: A\times A\to F$ 满足对于任意 $x,y,z\in A$ 有

$$[x,y]=-[y,x], \tag{2.1}$$

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\omega(x,y)z+\omega(y,z))+\omega(z,x)y, \tag{2.2}$$

则称 (A,ω) 为 ω-李代数。

显然李代数是 ω-李代数中 $\omega=0$ 的特殊情况。由文献[1]可知，设 (A,ω) 是二维 ω-李代数，若 $\omega\neq 0$，则存在 A 的一组基 $\{e_1,e_2\}$ 满足

$(L1)$ $[e_1,e_2]=0$， $\omega(e_1,e_2)=a$， $a\neq 0$，或者

$(L2)$ $[e_1,e_2]=e_2$， $\omega(e_1,e_2)=a$， $a\neq 0$。

定义 2.2 [7] 设 (A,ω) 是 ω-李代数，M 是一个向量空间。若线性映射 $\varphi: A\to \mathrm{End}(M)$ 满足

$$\varphi([x,y])m=\varphi(x)\varphi(y)m-\varphi(y)\varphi(x)m+\omega(x,y)m,\forall x,y\in A,m\in M, \tag{2.3}$$

则称 (φ,M) 或 φ 为 (A,ω) 的表示。

类似于李代数和左对称代数的关系，在[6]中引入了反左对称代数的概念。

定义 2.3 [6] 设 A 是向量空间，具有双线性运算 $\circ: A\times A\to A$。若对于所有 $x,y,z\in A$ 有以下等式成立

$$x\circ(y\circ z)-y\circ(x\circ z)=[y,x]\circ z,$$

$$[x,y]\circ z+[y,z]\circ x+[z,x]\circ y=0,$$

其中 $[x,y]=x\circ y-y\circ x$，则称 $(A,\circ)$ 为反左对称代数。

对于反左对称代数 A，在这个代数上定义双线性映射 $[\cdot,\cdot]: A\times A\to A$，$[x,y]=x\circ y-y\circ x$ 可以得到李代数，并且定义左乘运算 $L: A\to \mathrm{End}(A)$，$L(x)y=xy$，$-L$ 是对应的李代数的表示。由于反左对称代数 A 对应一个李代数。所以在二维李代数的分类基础上，反左对称代数的基元满足定义 2.3 中的条件，即可得到二维反左对称代数的代数运算，如下：

定理 2.1 [6] 设 $(A,\circ)$ 是数域 C 上的二维非交换反左对称代数，$\{e_1,e_2\}$ 是其一组基。则 $(A,\circ)$ 同构于以下相互非同构的情况之一：

$(G1)$ $e_1\circ e_1=-e_2, e_1\circ e_2=0, e_2\circ e_1=-e_1, e_2\circ e_2=0$；

$(G2)_\lambda$ $(\lambda\in C)e_1\circ e_1=0, e_1\circ e_2=0, e_2\circ e_1=-e_1, e_2\circ e_2=\lambda e_2$；

$(G3)$ $e_1\circ e_1=0, e_1\circ e_2=0, e_2\circ e_1=-e_1, e_2\circ e_2=e_1-e_2$；

$(G4)_\lambda$ $(\lambda\neq -1)e_1\circ e_1=0, e_1\circ e_2=(\lambda+1)e_1, e_2\circ e_1=\lambda e_1, e_2\circ e_2=(\lambda-1)e_2$；

$(G5)$ $e_1\circ e_1=0, e_1\circ e_2=-e_1, e_2\circ e_1=-2e_1, e_2\circ e_2=e_1-3e_2$。

3. ω-反左对称代数

定义 3.1 如果 A 是数域 F 上的向量空间，A 上有双线性映射 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 和双线性型 $\omega: A\times A\to F$，如果任意 $x,y,z\in A$ 满足

$$[x,y]\cdot z+[y,z]\cdot x+[z,x]\cdot y=0, \tag{3.1}$$

$$(x\cdot y)\cdot z+x\cdot(y\cdot z)-(y\cdot x)\cdot z-y\cdot(x\cdot z)=-\omega(x,y)z, \tag{3.2}$$

其中 $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x, \forall x,y\in A$，则称 $(A,\cdot,\omega)$ 为 ω-反左对称代数。

对于 ω-反左对称代数 $(A,\cdot,\omega)$，由(3.2)可见 ω 是反对称的，且当 $\omega=0$ 时，A 是反左对称代数。

定理 3.1 设 $(A,\cdot,\omega)$ 是 ω-反左对称代数，若在 A 上定义

$$[x,y]=x\cdot y-y\cdot x, \forall x,y\in A,$$

则 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 是 ω-李代数。定义线性映射 $L: A\to \mathrm{End}(A)$，其中 $L(x)y=x\cdot y$，则 $(-L,A)$ 是 ω-李代数的 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 表示。

证 (1) 由于 $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x$，自然满足式(2.1)，即 $[x,y]=-[y,x]$。下验证新定义的运算满足式(2.2)。根据式(3.2)有 $\forall x,y\in A$，

$$(x\cdot y)\cdot z+x\cdot(y\cdot z)-(y\cdot x)\cdot z-y\cdot(x\cdot z)=-\omega(x,y)z,$$

合并第一项与第三项可得

$$[x,y]\cdot z+x\cdot(y\cdot z)-y\cdot(x\cdot z)=-\omega(x,y)z, \tag{3.3}$$

同理可得

$$[y,z]\cdot x+y\cdot(z\cdot x)-z\cdot(y\cdot x)=-\omega(y,z)x, \tag{3.4}$$

$$[z,x]\cdot y+z\cdot(x\cdot y)-x\cdot(z\cdot y)=-\omega(z,x)y. \tag{3.5}$$

根据式(3.1)，将(3.3)，(3.4)和(3.5)相加得

$$x\cdot(y\cdot z)-y\cdot(x\cdot z)+y\cdot(z\cdot x)-z\cdot(y\cdot x)+z\cdot(x\cdot y)-x\cdot(z\cdot y)=-(\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y),$$

整理可得

$$x\cdot[y,z]+y\cdot[z,x]+z\cdot[x,y]=-(\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y),$$

根据式(3.1)可得

$$[x,y]\cdot z+[y,z]\cdot x+[z,x]\cdot y-x\cdot[y,z]-y\cdot[z,x]-z\cdot[x,y]=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y,$$

整理可得

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\omega(x,y)z+\omega(y,z)x+\omega(z,x)y,$$

得证。

(2) 要证 $(-L,A)$ 是 ω-李代数 $(A,[\cdot,\cdot],\omega)$ 的表示，只需验证 $-L$ 满足式(2.3)，即只需证

$$-L([x,y])z=(-L)(x)(-L)(y)z-(-L)(y)(-L)(x)z+\omega(x,y)z,\forall x,y,z\in A.$$

根据式(3.2)有

$$[x,y]\cdot z+x\cdot(y\cdot z)-y\cdot(x\cdot z)=-\omega(x,y)z,$$

因此

$$-[x,y]\cdot z=x\cdot(y\cdot z)-y\cdot(x\cdot z)+\omega(x,y)z,$$

得证。

4. 二维 ω-反左对称代数的代数运算

对于 ω-反左对称代数 A，由定理 3.1 可知，A 对应一个 ω-李代数。所以在二维 ω-李代数的分类基础上，ω-反左对称代数的基元满足定义 3.1 中的条件式(3.1)、(3.2)，即可得到二维 ω-反左对称代数的代数运算。

定理 4.1 设 A 是二维 ω-反左对称代数，$\omega\neq 0$，$\{e_1,e_2\}$ 是其一组基，则代数运算 $\cdot: A\times A\to A$ 有以下几种情况：

(1) $e_1\cdot e_1=me_1$，$e_1\cdot e_2=e_1+e_2$，$e_2\cdot e_1=e_1$，$e_2\cdot e_2=e_2$，$\omega(e_1,e_2)=-1$。

(2) $e_1\cdot e_1=0$，$e_1\cdot e_2=e_1+e_2$，$e_2\cdot e_1=e_1$，$e_2\cdot e_2=me_1+e_2$，$\omega(e_1,e_2)=-1$，其中 $m\neq 0$。

(3) $e_1\cdot e_1=me_1+ne_2$，$e_1\cdot e_2=e_1+e_2$，$e_2\cdot e_1=e_1$，$e_2\cdot e_2=e_2$，$\omega(e_1,e_2)=-1$，其中 $n\neq 0$。

(4) $e_1\cdot e_1=\dfrac{(m-1)n}{m+1}e_1-\dfrac{(n+m+1)n}{(m+1)^2}e_2$，$e_2\cdot e_2=-\dfrac{(m+1)^2}{n}e_1-(2m+1)e_2$，$e_1\cdot e_2=e_1+(1+n)e_2$，$e_2\cdot e_1=e_1+ne_2$，$\omega(e_1,e_2)=m\neq 0,-1$，其中 $n\neq 0$。

(5) $e_1\cdot e_1=-mne_1+ne_2$，$e_1\cdot e_2=(1-mn)e_2$，$e_2\cdot e_1=-mne_2$，$e_2\cdot e_2=\dfrac{m}{n}e_1-2me_2$，$\omega(e_1,e_2)=m\neq 0$，其中 $n\neq 0$。

证 设 $e_i\cdot e_j=C_{ij}^1e_1+C_{ij}^2e_2$，其中 $C_{ij}^1,C_{ij}^2\in F,i,j\in\{1,2\}$。当且仅当(4.1)、(4.2)式成立时，运算满足(3.1)、(3.2)，

$$(e_1\cdot e_2)\cdot e_1+e_1\cdot(e_2\cdot e_1)-(e_2\cdot e_1)\cdot e_1-e_2\cdot(e_1\cdot e_1)=-\omega(e_1,e_2)\cdot e_1,\tag{4.1}$$

$$(e_1\cdot e_2)\cdot e_2+e_1\cdot(e_2\cdot e_2)-(e_2\cdot e_1)\cdot e_2-e_2\cdot(e_1\cdot e_2)=-\omega(e_1,e_2)\cdot e_2.\tag{4.2}$$

设 $(A,[\cdot,\cdot])$ 为 $(A,\cdot)$ 对应的 ω-李代数，如果 $(A,[\cdot,\cdot])$ 为 ω-李代数($L1$)，即 $[e_1,e_2]=0$，$\omega(e_1,e_2)=a\neq 0$，我们有

$$e_1\cdot e_2-e_2\cdot e_1=0,$$

即 $C_{12}^1e_1+C_{12}^2e_2-(C_{21}^1e_1+C_{21}^2e_2)=0$，亦即 $C_{12}^1=C_{21}^1$，$C_{12}^2=C_{21}^2$。

(1) 若 $C_{12}^1=C_{21}^1\neq 0$，$C_{12}^2=C_{21}^2\neq 0$，令 $e_2=\dfrac{1}{C_{12}^1}e_2$，则可以假设 $C_{12}^1=C_{21}^1=1$。则根据等式(4.1)、(4.2)，有

$$C_{21}^2-C_{11}^2C_{22}^1=-a,\quad C_{11}^2+C_{21}^2C_{21}^2-C_{11}^1C_{21}^2-C_{11}^2C_{22}^2=0,$$

$$C_{22}^1C_{11}^1+C_{22}^2-1-C_{21}^2C_{22}^1=0,\quad C_{22}^1C_{11}^2-C_{21}^2=-a,$$

根据第一个式子和第四个式子则可以得到 $a=0$，与我们的条件矛盾，故没有 ω-反左对称代数 A 满足此种情形。

(2) 若 $C_{12}^1=C_{21}^1=0$，$C_{12}^2=C_{21}^2\neq 0$，令 $e_1=\dfrac{1}{C_{12}^1}e_1$，则可以假设 $C_{12}^2=C_{21}^2=1$。则根据等式(4.1)、(4.2)，

有

$$1-C_{11}^1-C_{11}^2C_{22}^2=0，\ C_{11}^2C_{22}^1=a，\ C_{22}^1-C_{22}^1C_{11}^1=0，\ C_{22}^1C_{11}^2=-a，$$

根据第二个式子和第四个式子则可以得到 $a=0$，与我们的条件矛盾。同理，若 $C_{12}^1=C_{21}^1\neq 0$，$C_{12}^2=C_{21}^2=0$ 也有此矛盾，故没有 ω-反左对称代数 A 满足此种情形。

3) 若 $C_{12}^1=C_{21}^1=0$，$C_{12}^2=C_{21}^2=0$，则根据等式(4.1)、(4.2)，有

$$C_{11}^2C_{22}^1=a，\ C_{11}^2C_{22}^2=0，\ C_{22}^1C_{11}^1=0，\ C_{22}^1C_{11}^2=-a，$$

根据第一个式子和第四个式子则可以得到 $a=0$，与我们的条件矛盾，故没有 ω-反左对称代数 A 满足此种情形。

如果 $(A,[\cdot,\cdot])$ 为 ω-李代数($L2$)，即 $[e_1,e_2]=e_2$，$\omega(e_1,e_2)=a\neq 0$，我们有

$$e_1\cdot e_2-e_2\cdot e_1=e_2,$$

即 $C_{12}^1e_1+C_{12}^2e_2-\left(C_{21}^1e_1+C_{21}^2e_2\right)=e_2$，亦即 $C_{12}^1=C_{21}^1$，$C_{12}^2=C_{21}^2+1$。

(1) 若 $C_{12}^1=C_{21}^1\neq 0$，令 $e_2=\frac{1}{C_{12}^1}e_2$，则可以假设 $C_{12}^1=C_{21}^1=1$。则根据等式(4.1)、(4.2)，有

$$1+C_{21}^2-C_{11}^2C_{22}^1=-a，\ C_{11}^2+2C_{21}^2+C_{21}^2C_{21}^2-C_{11}^1C_{21}^2-C_{11}^2C_{22}^2=0，$$

$$C_{22}^1C_{11}^1+C_{22}^2-C_{21}^2C_{22}^1-1=0，\ C_{22}^1C_{11}^2-C_{21}^2+C_{22}^2=-a，$$

解如上方程组可得，当 $C_{21}^2\neq 0$ 时，

$$C_{11}^1=\frac{C_{21}^2(a-1)}{a+1}，\ C_{11}^2=-\frac{C_{21}^2\left(C_{21}^2+a+1\right)}{(a+1)^2}，\ C_{12}^2=C_{21}^2+1，\ C_{22}^1=-\frac{(a+1)^2}{C_{21}^2}，\ C_{22}^2=-2a-1。$$

当 $C_{21}^2=0$ 时，$\omega(e_1,e_2)=-1$，以及

$$e_1\cdot e_1=me_1，\ e_1\cdot e_2=e_1+e_2，\ e_2\cdot e_1=e_1，\ e_2\cdot e_2=e_2，$$

或

$$e_1\cdot e_1=0，\ e_1\cdot e_2=e_1+e_2，\ e_2\cdot e_1=e_1，\ e_2\cdot e_2=me_1+e_2，\ m\neq 0，$$

或

$$e_1\cdot e_1=me_1+ne_2，\ e_1\cdot e_2=e_1+e_2，\ e_2\cdot e_1=e_1，\ e_2\cdot e_2=e_2，\ n\neq 0。$$

令 $C_{21}^2=n\neq 0$，则当 $\omega(e_1,e_2)=m\neq -1$ 时可以得到

$$e_1\cdot e_1=\frac{(m-1)n}{m+1}e_1-\frac{(n+m+1)n}{(m+1)^2}e_2，\ e_1\cdot e_2=e_1+(1+n)e_2，\ e_2\cdot e_1=e_1+ne_2，$$

$$e_2\cdot e_2=-\frac{(m+1)^2}{n}e_1-(2m+1)e_2，\ \omega(e_1,e_2)=m\neq 0。$$

即为定理中的第(1)、(2)、(3)和(4)种情况。

(2) 若 $C_{12}^1=C_{21}^1=0$，则根据等式(4.1)、(4.2)，有

$$2C_{21}^2+C_{21}^2C_{21}^2-C_{11}^1C_{21}^2-C_{11}^2C_{22}^2=0，\ C_{11}^2C_{22}^1=a，\ C_{22}^1C_{11}^1-C_{21}^2C_{22}^1=0，\ C_{22}^1C_{11}^2+C_{22}^2=-a，$$

解方程组得

$$C_{11}^1=-aC_{11}^2，\ C_{12}^2=1-aC_{11}^2，\ C_{21}^2=-aC_{11}^2，\ C_{22}^1=-\frac{a}{C_{11}^2}，\ C_{22}^2=-2a，$$

其中 $C_{11}^2\neq 0$。令 $C_{11}^2=n\neq 0$，$\omega(e_1,e_2)=m\neq 0$，则有

$$e_1\cdot e_1=-mne_1+ne_2，\ e_1\cdot e_2=(1-mn)e_2，\ e_2\cdot e_1=-mne_2，$$

$$e_2 \cdot e_2 = \frac{m}{n} e_1 - 2m e_2，\quad \omega(e_1, e_2) = m \neq 0。$$

即为定理中第(5)种情况。

5. 二维 ω-反左对称代数在 ω-同构意义下的分类

定义 5.1 设 (A,ω) 和 (A,Ω) 分别为数域 F 上的 ω-反左对称代数。若有一个线性同构 $\rho:(A,\omega)\to(A,\Omega)$ 使得

$$\rho(x \cdot y) = \rho(x) \cdot \rho(y), \forall x, y \in A,$$

则称 ρ 为从 (A,ω) 到 (A,Ω) 的同构。进一步，若

$$\omega(x, y) = \Omega(\rho(x), \rho(y)), \forall x, y \in A,$$

则称 ρ 为 ω-同构。

在第四部分我们从 ω-李代数的二维分类中得到了二维 ω-反左对称代数代数运算，其中定理 4.1 中的所有情况都是由($L2$)得到的，那么其中是否有同构的呢？这是我们接下来要考虑的问题。

设 $(A,\cdot_1)$ 是定理 4.1 中第(1)种 ω-反左对称代数，$(A,\cdot_2)$ 是定理 4.1 中第(2)种 ω-反左对称代数，$(A,\cdot_3)$ 是定理 4.1 中第(3)种 ω-反左对称代数，$(A,\cdot_4)$ 是定理 4.1 中第(4)种 ω-反左对称代数，$(A,\cdot_5)$ 是定理 4.1 中第(5)种 ω-反左对称代数。取 $\{e_1^1, e_2^1\}$ 为 $(A,\cdot_1)$ 的一组基，$\{e_1^2, e_2^2\}$ 为 $(A,\cdot_2)$ 的一组基，$\{e_1^3, e_2^3\}$ 为 $(A,\cdot_3)$ 的一组基，$\{e_1^4, e_2^4\}$ 为 $(A,\cdot_4)$ 的一组基，$\{e_1^5, e_2^5\}$ 为 $(A,\cdot_5)$ 的一组基。

(1) 假设存在可逆线性变换 $\phi_1:(A,\cdot_1)\to(A,\cdot_2)$，满足

$$\phi_1\left(e_i^1 \cdot_1 e_j^1\right) = \phi_1\left(e_i^1\right) \cdot_2 \phi_1\left(e_j^1\right), \forall i, j = 1, 2.$$

设

$$\phi_1\left(e_1^1\ e_2^1\right) = \left(e_1^2\ e_2^2\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则 ϕ_1 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_1\left(e_1^1 \cdot_1 e_1^1\right) = m\left(a e_1^2 + c e_2^2\right) = \phi_1\left(e_1^1\right) \cdot_2 \phi_1\left(e_1^1\right) = \left(2ac + c^2 n\right) e_1^2 + \left(ac + c^2\right) e_2^2,$$

$$\phi_1\left(e_1^1 \cdot_1 e_2^1\right) = (a+b) e_1^2 + (c+d) e_2^2 = \phi_1\left(e_1^1\right) \cdot_2 \phi_1\left(e_2^1\right) = (ad + bc + ncd) e_1^2 + (ad + cd) e_2^2,$$

$$\phi_1\left(e_2^1 \cdot_1 e_1^1\right) = a e_1^2 + c e_2^2 = \phi_1\left(e_2^1\right) \cdot_2 \phi_1\left(e_1^1\right) = (bc + ad + ncd) e_1^2 + (bc + cd) e_2^2,$$

$$\phi_1\left(e_2^1 \cdot_1 e_2^1\right) = b e_1^2 + d e_2^2 = \phi_1\left(e_2^1\right) \cdot_2 \phi_1\left(e_2^1\right) = \left(2bd + nd^2\right) e_1^2 + \left(bd + d^2\right) e_2^2,$$

$$\omega_1\left(e_1^1, e_2^1\right) = -1 = \omega_2\left(\phi_1\left(e_1^1\right), \phi_1\left(e_2^1\right)\right) = bc - ad.$$

即 ϕ_1 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases} ma = 2ac + c^2 n, \\ mc = ac + c^2, \\ a + b = ad + bc + ncd, \\ c + d = ad + cd, \\ a = bc + ad + ncd, \\ c = bc + cd, \\ b = 2bd + nd^2, \\ d = bd + d^2, \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将 $b=0$ 带入第七个式子可得 $nd^2=0$，带入第九个式子可得 $ad=1$，从而有 $d\neq 0$，故 $n=0$，矛盾，因此 $(A,\cdot_1)$ 与 $(A,\cdot_2)$ 不 ω-同构。

(2) 假设存在可逆线性变换 $\phi_2:(A,\cdot_1)\to(A,\cdot_3)$，满足

$$\phi_2\left(e_i^1\cdot_1 e_j^1\right)=\phi_2\left(e_i^1\right)\cdot_3\phi_2\left(e_j^1\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_2\begin{pmatrix}e_1^1 & e_2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1^3 & e_2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则 ϕ_2 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_2\left(e_1^1\cdot_1 e_1^1\right)=m\left(ae_1^3+ce_2^3\right)=\phi_2\left(e_1^1\right)\cdot_3\phi_2\left(e_1^1\right)=\left(a^2p+2ac\right)e_1^3+\left(a^2q+ac+c^2\right)e_2^3,$$

$$\phi_2\left(e_1^1\cdot_1 e_2^1\right)=(a+b)e_1^3+(c+d)e_2^3=\phi_2\left(e_1^1\right)\cdot_3\phi_2\left(e_2^1\right)=(abp+ad+bc)e_1^3+(abq+ad+cd)e_2^3,$$

$$\phi_2\left(e_2^1\cdot_1 e_1^1\right)=ae_1^3+ce_2^3=\phi_2\left(e_2^1\right)\cdot_3\phi_2\left(e_1^1\right)=(abp+ad+bc)e_1^3+(abq+bc+cd)e_2^3,$$

$$\phi_2\left(e_2^1\cdot_1 e_2^1\right)=be_1^3+de_2^3=\phi_2\left(e_2^1\right)\cdot_3\phi_2\left(e_2^1\right)=\left(b^2p+2bd\right)e_1^3+\left(b^2q+bd+d^2\right)e_2^3$$

$$\omega_1\left(e_1^1,e_2^1\right)=-1=\omega_3\left(\phi_2\left(e_1^1\right),\phi_2\left(e_2^1\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_2 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}ma=a^2p+2ac,\\ mc=a^2q+ac+c^2,\\ a+b=abp+ad+bc,\\ c+d=abq+ad+cd,\\ a=bap+bc+ad,\\ c=baq+bc+cd,\\ b=b^2p+2bd,\\ d=b^2q+bd+d^2,\\ ad-bc=1.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将 $b=0$ 带入第八个式子可得 $d=d^2$ 即 $d(d-1)=0$，带入第九个式子可得 $ad=1$，从而有 $d\neq 0$，故 $d=1$，从而 $a=1$，将 $a=1$，$b=0$，$d=1$ 带入上述方程组变为

$$\begin{cases}m=p+2c,\\ mc=q+c+c^2,\end{cases}$$

将第一个式子带入第二个式子中可得 $c^2+(p-1)c-q=0$，当二维 ω-反左对称代数定义在实数域 R 上时，当 p 和 q 满足 $(p-1)^2+4q\geq 0,q\neq 0$ 时，c 有解，即 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，即 $(A,\cdot_1)$ 与 $(A,\cdot_2)$ 在实数域上是 ω-同构的。当二维 ω-反左对称代数定义在复数域 C 上时，该方程总有解，则 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，即 $(A,\cdot_1)$ 与 $(A,\cdot_3)$ 在复数域 C 上 ω-同构。

(3) 假设存在可逆线性变换 $\phi_3:(A,\cdot_2)\to(A,\cdot_3)$，满足

$$\phi_3\left(e_i^2\cdot_2 e_j^2\right)=\phi_3\left(e_i^2\right)\cdot_3\phi_3\left(e_j^2\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_3\begin{pmatrix} e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^3 & e_2^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则 ϕ_3 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_3\left(e_1^2 \cdot_2 e_1^2\right) = 0 = \phi_3\left(e_1^2\right)\cdot_3 \phi_3\left(e_1^2\right) = \left(a^2 p + 2ac\right)e_1^3 + \left(a^2 q + ac + c^2\right)e_2^3,$$

$$\phi_3\left(e_1^2 \cdot_2 e_2^2\right) = (a+b)e_1^3 + (c+d)e_2^3 = \phi_3\left(e_1^2\right)\cdot_3 \phi_3\left(e_2^2\right) = (abp + ad + bc)e_1^3 + (abq + ad + cd)e_2^3,$$

$$\phi_3\left(e_2^2 \cdot_2 e_1^2\right) = ae_1^3 + ce_2^3 = \phi_3\left(e_2^2\right)\cdot_3 \phi_3\left(e_1^2\right) = (abp + ad + bc)e_1^3 + (abq + bc + cd)e_2^3,$$

$$\phi_3\left(e_2^2 \cdot_2 e_2^2\right) = (na+b)e_1^3 + (nc+d)de_2^3 = \phi_3\left(e_2^2\right)\cdot_3 \phi_3\left(e_2^2\right) = \left(b^2 p + 2bd\right)e_1^3 + \left(b^2 q + bd + d^2\right)e_2^3,$$

$$\omega_2\left(e_1^2, e_2^2\right) = -1 = \omega_3\left(\phi_3\left(e_1^2\right), \phi_3\left(e_2^2\right)\right) = bc - ad.$$

即 ϕ_3 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases} a^2 p + 2ac = 0, \\ a^2 q + ac + c^2 = 0, \\ a + b = abp + ad + bc, \\ c + d = abq + ad + cd, \\ a = abp + bc + ad, \\ c = abq + bc + cd, \\ na + b = b^2 p + 2bd, \\ nc + d = b^2 q + bd + d^2, \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b = 0$，将 $b = 0$ 带入第七个式子可得 $na = 0$，带入第九个式子可得 $ad = 1$，从而有 $a \neq 0$， 故 $n = 0$， 矛盾，因此 $(A, \cdot_2)$ 与 $(A, \cdot_3)$ 不 ω-同构。

(4) 假设存在可逆线性变换 $\phi_4 : (A, \cdot_4) \to (A, \cdot_1)$，满足

$$\phi_4\left(e_i^4 \cdot_4 e_j^4\right) = \phi_4\left(e_i^4\right)\cdot_1 \phi_4\left(e_j^4\right), \forall i, j = 1, 2.$$

设

$$\phi_4\begin{pmatrix} e_1^4 & e_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则 ϕ_4 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_4\left(e_1^4 \cdot_4 e_1^4\right) = \left(\frac{(x-1)ka}{x+1} - \frac{k(k+x+1)b}{(x+1)^2}\right)e_1^1 + \left(\frac{(x-1)kc}{x+1} - \frac{k(k+x+1)d}{(x+1)^2}\right)e_2^1$$

$$= \phi_4\left(e_1^4\right)\cdot_1 \phi_4\left(e_1^4\right) = \left(a^2 m + 2ac\right)e_1^1 + \left(ac + c^2\right)e_2^1,$$

$$\phi_4\left(e_1^4 \cdot_4 e_2^4\right) = (a + b + kb)e_1^1 + (c + d + kd)e_2^1 = \phi_4\left(e_1^4\right)\cdot_1 \phi_4\left(e_2^4\right) = (abm + ad + bc)e_1^1 + (ad + cd)e_2^1,$$

$$\phi_4\left(e_2^4 \cdot_4 e_1^4\right) = (a + kb)e_1^1 + (c + kd)e_2^1 = \phi_4\left(e_2^4\right)\cdot_1 \phi_4\left(e_1^4\right) = (abm + bc + ad)e_1^1 + (bc + cd)e_2^1,$$

$$\phi_4\left(e_2^4 \cdot_4 e_2^4\right) = -\left(\frac{(x+1)^2 a}{k} + (2x+1)b\right)e_1^1 - \left(\frac{(x+1)^2 c}{k} + (2x+1)d\right)e_2^1$$

$$= \phi_4\left(e_2^4\right)\cdot_1 \phi_4\left(e_2^4\right) = \left(b^2 m + 2bd\right)e_1^1 + \left(bd + d^2\right)e_2^1,$$

$$\omega_4\left(e_1^4,e_2^4\right)=x=\omega_1\left(\phi_4\left(e_1^4\right),\phi_4\left(e_2^4\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_4 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)ka}{x+1}-\dfrac{k(k+x+1)b}{(x+1)^2}=a^2m+2ac,\\ \dfrac{(x-1)kc}{x+1}-\dfrac{k(k+x+1)d}{(x+1)^2}=ac+c^2,\\ a+b+kb=abm+ad+bc,\\ c+d+kd=ad+cd,\\ a+kb=abm+bc+ad,\\ c+kd=bc+cd,\\ \dfrac{(x+1)^2a}{k}+(2x+1)b=-\left(b^2m+2bd\right),\\ \dfrac{(x+1)^2c}{k}+(2x+1)d=-\left(bd+d^2\right),\\ ad-bc=-x.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将 $b=0$ 带入第七个式子可得 $\dfrac{(x+1)^2a}{k}=0$，带入第九个式子可得 $ad=-x\neq 0$，从而有 $a\neq 0$，故 $x=-1$，矛盾，因此 $(A,\cdot_1)$ 与 $(A,\cdot_4)$ 不 ω-同构。

(5) 假设存在可逆线性变换 $\phi_5:(A,\cdot_4)\to(A,\cdot_2)$，满足

$$\phi_5\left(e_i^4\cdot_4 e_j^4\right)=\phi_5\left(e_i^4\right)\cdot_2\phi_5\left(e_j^4\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_5\begin{pmatrix}e_1^4 & e_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1^2 & e_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则 ϕ_5 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\begin{aligned}\phi_5\left(e_1^4\cdot_4 e_1^4\right)&=\left(\frac{(x-1)ka}{x+1}-\frac{k(k+x+1)b}{(x+1)^2}\right)e_1^2+\left(\frac{(x-1)kc}{x+1}-\frac{k(k+x+1)d}{(x+1)^2}\right)e_2^2\\ &=\phi_5\left(e_1^4\right)\cdot_2\phi_4\left(e_1^4\right)=\left(2ac+c^2n\right)e_1^2+\left(ac+c^2\right)e_2^2,\end{aligned}$$

$$\phi_5\left(e_1^4\cdot_4 e_2^4\right)=(a+b+kb)e_1^2+(c+d+kd)e_2^2=\phi_5\left(e_1^4\right)\cdot_2\phi_5\left(e_2^4\right)=(ad+bc+cdn)e_1^2+(ad+cd)e_2^2,$$

$$\phi_5\left(e_2^4\cdot_4 e_1^4\right)=(a+kb)e_1^2+(c+kd)e_2^2=\phi_5\left(e_2^4\right)\cdot_2\phi_5\left(e_1^4\right)=(bc+ad+cdn)e_1^2+(bc+cd)e_2^2,$$

$$\begin{aligned}\phi_5\left(e_2^4\cdot_4 e_2^4\right)&=-\left(\frac{(x+1)^2a}{k}+(2x+1)b\right)e_1^2-\left(\frac{(x+1)^2c}{k}+(2x+1)d\right)e_2^2\\ &=\phi_5\left(e_2^4\right)\cdot_2\phi_5\left(e_2^4\right)=\left(2bd+d^2n\right)e_1^2+\left(bd+d^2\right)e_2^2,\end{aligned}$$

$$\omega_4\left(e_1^4,e_2^4\right)=x=\omega_2\left(\phi_5\left(e_1^4\right),\phi_5\left(e_2^4\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_5 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)ka}{x+1}-\dfrac{k(k+x+1)b}{(x+1)^2}=2ac+c^2n,\\ \dfrac{(x-1)kc}{x+1}-\dfrac{k(k+x+1)d}{(x+1)^2}=ac+c^2,\\ a+b+kb=ad+bc+cdn,\\ c+d+kd=ad+cd,\\ a+kb=bc+ad+cdn,\\ c+kd=bc+cd,\\ \dfrac{(x+1)^2a}{k}+(2x+1)b=-(2bd+d^2n),\\ \dfrac{(x+1)^2c}{k}+(2x+1)d=-(bd+d^2),\\ ad-bc=-x.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将方程组的第四个式子减去第六个式子，再带入 $b=0$ 可得 $d=ad$，将 $b=0$ 带入第九个式子可得 $ad=-x\neq 0$，从而有 $d=-x$，进一步有 $a=1$，将 $a=1$，$b=0$ 和 $d=-x$ 带入上述方程组可得

$$\begin{cases}n=-\dfrac{(x+1)^2}{x^2k},\\ c=\dfrac{kx}{1+x}=-\dfrac{x+1}{xn},\end{cases}$$

当 $x\neq 0,-1,k\neq 0$ 时 $n\neq 0$，且 c 有解，则 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 可逆，从而 $(A,\cdot_2)$ 与 $(A,\cdot_4)$ 是 ω-同构的。

(6) 假设存在可逆线性变换 $\phi_6:(A,\cdot_5)\to(A,\cdot_3)$，满足

$$\phi_6\left(e_i^5\cdot_5 e_j^5\right)=\phi_6\left(e_i^5\right)\cdot_3\phi_9\left(e_j^5\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_6\begin{pmatrix}e_1^5 & e_2^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1^3 & e_2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则 ϕ_6 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_6\left(e_1^5\cdot_5 e_1^5\right)=(-uva+vb)e_1^3+(-uvc+vd)e_2^3=\phi_6\left(e_1^5\right)\cdot_3\phi_6\left(e_1^5\right)=\left(a^2p+2ac\right)e_1^3+\left(a^2q+ac+c^2\right)e_2^3,$$

$$\phi_6\left(e_1^5\cdot_5 e_2^5\right)=(1-uv)be_1^3+(1-uv)de_2^3=\phi_6\left(e_1^5\right)\cdot_3\phi_6\left(e_2^5\right)=(abp+ad+bc)e_1^3+(abq+ad+cd)e_2^3,$$

$$\phi_6\left(e_2^5\cdot_5 e_1^5\right)=-uvbe_1^3-uvde_2^3=\phi_6\left(e_2^5\right)\cdot_3\phi_6\left(e_1^5\right)=(abp+ad+bc)e_1^3+(abq+bc+cd)e_2^3,$$

$$\phi_6\left(e_2^5\cdot_5 e_2^5\right)=\left(\frac{ua}{v}-2ub\right)e_1^3+\left(\frac{uc}{v}-2ud\right)e_2^3=\phi_6\left(e_2^5\right)\cdot_3\phi_6\left(e_2^5\right)=\left(b^2p+2bd\right)e_1^3+\left(b^2q+bd+d^2\right)e_2^3,$$

$$\omega_5\left(e_1^5,e_2^5\right)=u=\omega_3\left(\phi_6\left(e_1^5\right),\phi_6\left(e_2^5\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_6 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}-uva+vb=a^2p+2ac,\\-uvc+vd=a^2q+ac+c^2,\\(1-uv)b=abp+ad+bc,\\(1-uv)d=abq+ad+cd,\\-uvb=abp+bc+ad,\\-uvd=abq+bc+cd,\\\dfrac{ua}{v}-2ub=b^2p+2bd,\\\dfrac{uc}{v}-2ud=b^2q+bd+d^2,\\ad-bc=-u.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将 $b=0$ 带入第七个式子可得 $\dfrac{ua}{v}=0$，带入第九个式子可得 $ad=-u\neq 0$，从而有 $a\neq 0$，故 $u=0$，矛盾，因此 $(A,\cdot_3)$ 与 $(A,\cdot_5)$ 不 ω-同构。

(7) 假设存在可逆线性变换 $\phi_7:(A,\cdot_5)\to(A,\cdot_1)$，满足

$$\phi_7\left(e_i^5\cdot_5 e_j^5\right)=\phi_7\left(e_i^5\right)\cdot_1\phi_7\left(e_j^5\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_7\begin{pmatrix}e_1^5 & e_2^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1^1 & e_2^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则 ϕ_7 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_7\left(e_1^5\cdot_5 e_1^5\right)=(-uva+vb)e_1^1+(-uvc+vd)e_2^1=\phi_7\left(e_1^5\right)\cdot_5\phi_7\left(e_1^5\right)=\left(a^2m+2ac\right)e_1^1+\left(ac+c^2\right)e_2^1,$$

$$\phi_7\left(e_1^5\cdot_5 e_2^5\right)=(1-uv)be_1^1+(1-uv)de_2^1=\phi_7\left(e_1^5\right)\cdot_1\phi_7\left(e_2^5\right)=(abm+ad+bc)e_1^1+(ad+cd)e_2^1,$$

$$\phi_7\left(e_2^5\cdot_5 e_1^5\right)=-uvbe_1^1-uvde_2^1=\phi_7\left(e_2^5\right)\cdot_1\phi_7\left(e_1^5\right)=(abm+bc+ad)e_1^1+(bc+cd)e_2^1,$$

$$\phi_7\left(e_2^5\cdot_5 e_2^5\right)=\left(\frac{ua}{v}-2ub\right)e_1^1+\left(\frac{uc}{v}-2ud\right)e_2^1=\phi_7\left(e_2^5\right)\cdot_1\phi_4\left(e_2^5\right)=\left(b^2m+2bd\right)e_1^1+\left(bd+d^2\right)e_2^1,$$

$$\omega_5\left(e_1^5,e_2^5\right)=u=\omega_1\left(\phi_7\left(e_1^5\right),\phi_7\left(e_2^5\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_7 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}-uva+vb=a^2m+2ac,\\-uvc+vd=ac+c^2,\\(1-uv)b=abm+ad+bc,\\(1-uv)d=ad+cd,\\-uvb=abm+bc+ad,\\-uvd=bc+cd,\\\dfrac{ua}{v}-2ub=b^2m+2bd,\\\dfrac{uc}{v}-2ud=bd+d^2,\\ad-bc=-u.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将 $b=0$ 带入第七个式子可得 $\frac{ua}{v}=0$，带入第九个式子可得 $ad=-u\neq 0$，从而有 $a\neq 0$，故 $u=0$，矛盾，因此 $(A,\cdot_1)$ 与 $(A,\cdot_5)$ 不 ω-同构。

(8) 假设存在可逆线性变换 $\phi_8:(A,\cdot_5)\to(A,\cdot_2)$，满足

$$\phi_8\left(e_i^5\cdot_5 e_j^5\right)=\phi_8\left(e_i^5\right)\cdot_2\phi_8\left(e_j^5\right),\forall i,j=1,2.$$

设

$$\phi_8\begin{pmatrix}e_1^5 & e_2^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1^2 & e_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则 ϕ_8 为 ω-同构映射需满足以下 5 个方程

$$\phi_8\left(e_1^5\cdot_5 e_1^5\right)=(-uva+vb)e_1^2+(-uvc+vd)e_2^2=\phi_8\left(e_1^5\right)\cdot_2\phi_8\left(e_1^5\right)=\left(2ac+c^2n\right)e_1^2+\left(ac+c^2\right)e_2^2,$$

$$\phi_8\left(e_1^5\cdot_4 e_2^5\right)=(1-uv)be_1^2+(1-uv)de_2^2=\phi_8\left(e_1^5\right)\cdot_2\phi_8\left(e_2^5\right)=(ad+bc+cdn)e_1^2+(ad+cd)e_2^2,$$

$$\phi_8\left(e_2^5\cdot_5 e_1^5\right)=-uvbe_1^2-uvde_2^2=\phi_8\left(e_2^5\right)\cdot_2\phi_8\left(e_1^5\right)=(bc+ad+cdn)e_1^2+(bc+cd)e_2^2,$$

$$\phi_8\left(e_2^5\cdot_5 e_2^5\right)=\left(\frac{ua}{v}-2ub\right)e_1^2+\left(\frac{uc}{v}-2ud\right)e_2^2=\phi_8\left(e_2^5\right)\cdot_2\phi_8\left(e_2^5\right)=\left(2bd+d^2n\right)e_1^2+\left(bd+d^2\right)e_2^2,$$

$$\omega_5\left(e_1^5,e_2^5\right)=u=\omega_1\left(\phi_8\left(e_1^5\right),\phi_8\left(e_2^5\right)\right)=bc-ad.$$

即 ϕ_8 对应的矩阵中的系数满足

$$\begin{cases}-uva+vb=2ac+c^2n,\\ -uvc+vd=ac+c^2,\\ (1-uv)b=ad+bc+cdn,\\ (1-uv)d=ad+cd,\\ -uvb=bc+ad+cdn,\\ -uvd=bc+cd,\\ \frac{ua}{v}-2ub=2bd+d^2n,\\ \frac{uc}{v}-2ud=bd+d^2,\\ ad-bc=-u.\end{cases}$$

将方程组的第三个式子减去第五个式子可得 $b=0$，将方程组的第四个式子减去第六个式子，再带入 $b=0$ 可得 $d=ad$，将 $b=0$ 带入第九个式子可得 $ad=-u\neq 0$，从而有 $d=-u$，进一步有 $a=1$，将 $a=1$，$b=0$ 和 $d=-u$ 带入上述方程组可得

$$\begin{cases}c=-uv,\\ uvn=1,\end{cases}$$

当 $u,v\neq 0$ 时，$n\neq 0$ 且 c 有解，则 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 可逆，从而 $(A,\cdot_2)$ 与 $(A,\cdot_5)$ 是 ω-同构的。

定理 5.1 设 $(A,\cdot)$ 是在实数域 R 上的二维 ω-反左对称代数，$\omega\neq 0$，其基为 $\{e_1,e_2\}$，则 $(A,\cdot)$ 同构于以下相互非同构的情况之一：

$(A1)$ $e_1\cdot e_1=me_1$，$e_1\cdot e_2=e_1+e_2$，$e_2\cdot e_1=e_1$，$e_2\cdot e_2=e_2$，$\omega_1(e_1,e_2)=-1$。

$(A2)$ $e_1 \cdot e_1 = 0$，$e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$，$e_2 \cdot e_1 = e_1$，$e_2 \cdot e_2 = me_1 + e_2$，$\omega_2(e_1, e_2) = -1$，其中 $m \neq 0$。

$(A3)$ $e_1 \cdot e_1 = me_1 + ne_2$，$e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$，$e_2 \cdot e_1 = e_1$，$e_2 \cdot e_2 = e_2$，$\omega_3(e_1, e_2) = -1$，其中 $(m-1)^2 + 4n < 0, n \neq 0$。

当二维 ω-反左对称代数定义在复数域 C 上时，$(A1)$与$(A3)$同构。

定理 5.2 设 $(A, \cdot)$ 是在复数域 C 上的二维 ω-反左对称代数，$\omega \neq 0$，其基为 $\{e_1, e_2\}$，则 $(A, \cdot)$ 同构于以下相互非同构的情况之一：

$(B1)$ $e_1 \cdot e_1 = me_1$，$e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$，$e_2 \cdot e_1 = e_1$，$e_2 \cdot e_2 = e_2$，$\omega_1(e_1, e_2) = -1$。

$(B2)$ $e_1 \cdot e_1 = 0$，$e_1 \cdot e_2 = e_1 + e_2$，$e_2 \cdot e_1 = e_1$，$e_2 \cdot e_2 = me_1 + e_2$，$\omega_2(e_1, e_2) = -1$，其中 $m \neq 0$。

以上是 $\omega \neq 0$ 时的二维 ω-反左对称代数的分类，当 $\omega = 0$ 时，二维 ω-反左对称代数即为反左对称代数，其二维分类即为定理 2.1 所述。

参考文献

[1] Nurowski, P. (2007) Deforming a Lie Algebra by Means of a 2-form. *Journal of Geometry and Physics*, **57**, 1325-1329. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.10.008

[2] Bobieński, M. and Nurowski, P. (2007) Irreducible SO(3) Geometry in Dimension Five. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **2007**, 51-93. https://doi.org/10.1515/crelle.2007.027

[3] Nurowski, P. (2008) Distinguished Dimensions for Special Riemannian Geometries. *Journal of Geometry and Physics*, **58**, 1148-1170. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.03.012

[4] Chen, Y., Liu, C. and Zhang, R. (2014) Classification of Three-Dimensional Complex ω-Lie Algebras. *Portugaliae Mathematica*, **71**, 97-108. https://doi.org/10.4171/pm/1943

[5] Chen, Y. and Zhang, R. (2015) Simple ω-Lie Algebras and 4-Dimensional ω-Lie Algebras over *C*. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **40**, 1377-1390. https://doi.org/10.1007/s40840-015-0120-6

[6] Liu, G. and Bai, C. (2022) Anti-Pre-Lie Algebras, Novikov Algebras and Commutative 2-Cocycles on Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **609**, 337-379. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.004

[7] Zusmanovich, P. (2010) ω-Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, **60**, 1028-1044. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.03.005