Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 259-267
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411393

基于应用案例的线性代数教学探索与实践

张　萍*

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年10月22日；录用日期：2024年11月18日；发布日期：2024年11月29日

摘　要

本文探索线性代数课程教学内容与应用案例的契合点，结合课程教学案例，探究如何在具体教学环节凸显思政性、高阶性和创新性，全面提升学生分析和解决实际问题的能力，增强学生学以致用的综合素养。

关键词

线性代数，应用案例，教学评价

Exploration and Practice of Linear Algebra Teaching Based on Application Cases

Ping Zhang*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Oct. 22nd, 2024; accepted: Nov. 18th, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

This paper explores the conjunction of teaching contents and application cases of Linear Algebra Course. Combining with course teaching cases, it explores how to highlight Ideology and Politics, high-level, and innovation in specific teaching stages. The main purpose is to comprehensively enhance students' ability to analyze and solve practical problems, and enhance their comprehensive literacy of applying what they have learned.

Keywords

Linear Algebra, Application Cases, Teaching Evaluation

*通讯作者。

文章引用: 张萍. 基于应用案例的线性代数教学探索与实践[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 259-267.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411393

1. 引言

2017 年 2 月以来，教育部积极推进新工科建设，在建设途径层面重点强调继承与创新、交叉与融合、协调与共享的教育教学新理念。2018 年 9 月，教育部在《关于加快建设高水平本科教育全面提高人才培养能力的意见》中明确提出要把思想政治教育贯穿高水平本科教育全过程，实现全员育人、全程育人、全方位育人的教学新目标。如何深入有效地开展课程思政建设，深挖案例教学新模式，在实际教学环节中实现三全育人总目标，这引起越来越多专家学者的重视。高校作为培养应用型复合型人才的主基地，不仅需要在专业知识领域更需要在精神内涵层面给学生积极的引领和指导，以培养社会发展、文化传承、体制运行等所需要的各类人才。为了更好地体现知识、能力、育人目标的统一，高校对所有课程施行“课程思政”，将思政案例与专业知识技能有效融合就成了当前形势下普通高等院校教学改革的一项重要举措。

上海理工大学是一所典型的多学科应用型本科院校，秉承“依托行业、产学研相结合”办学传统，坚持“对接行业、改造专业、引导就业”的教育教学理念，本科教育一直以来都强调“厚基础、宽口径、强实践”的课程定位。其中，作为高校理工、经管类各专业的重要数学基础课程之一的线性代数在我校案例示范教学中具有明显的典型性和示范性。众所周知，线性代数在自然科学和社会科学的众多领域都有广泛应用。随着信息技术的高速发展，线性代数的理论和方法在大型数据分析和计算中都得到飞速拓展，如计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数作为其理论和算法基础的重要组成部分，如 3D 模型的渲染、光照等问题就可以借助线性代数工具来实现。互联网的强大搜索引擎功能很多都建立在对网页优秀的排序策略上，这个策略与线性代数中的求解大型矩阵方程密切相关。通常现实世界所采集的数据规模非常大，因此在处理过程中除了计算机算力的强化，也要依赖线性代数对算法本身进行优化。在集成电路的设计和分析中，电流电压等物理量之间的关系可以借助线性方程组或者矩阵方程表示。在机器学习领域，无论是监督学习还是强化学习，都需要用到线性代数的工具，如通过最小化误差的平方和找到数据的最佳线性拟合的线性回归方法、通过数据的主成分来降低数据维度的主成分分析方法、通过找到最优超平面来对数据进行分类的线性支持向量机分类算法以及深度学习中的神经网络模型等都涉及到大量的线性变换和矩阵运算。可以说，线性代数在现代科学和工程技术邻域具有非常鲜明的重要应用。

文献[1]-[3]探讨了线性代数与应用案例相结合的必要性，从线性代数课程属性及教学设计等方面阐述了研究型教学以及教学案例的可行性；文献[4]-[6]主要挖掘了线性代数课程的应用案例，包括人口迁移、递推关系、图像加密、密码破译、网络交通流、电路设计、物资分配等，让学生充分体会线性代数在实际生产生活中的重要应用体现。文献[7] [8]从线性代数课程的趣味性和案例教学设计方面对激发学生的求知欲和学习效能等方面进行了分析。文献[9]-[12]从特征值、特征向量在大数据技术应用、药物配置、捕食系统问题等为案例，对线性代数的实用案例及教学效果进行了全面的探讨。文献[13] [14]从课程发展史入手结合课程思政元素挖掘和案例插入，激励学生学以致用，充分探讨了线性代数课程思政的实施途径和效果等。以上研究大多数都是结合课程案例来探讨线性代数课程的教学模式改革，设计的案例大多数是行列式计算、线性方程组、向量组的相关性、特征值与特征向量的应用等，这些案例涉及更多的是计算层面，较少涉及如何从实例中抽取数学模型，同时也较少涉及课程体系的整体性和知识之间的层次

性分析。

本文侧重的教学理念是将应用案例、思政案例与课程体系融合起来，引导学生主动思考，激发学生热爱学习和服务社会的情怀，让学生产生内在的学习驱动力，延拓课程学习广度和深度。本文所涉及的案例充分考虑一流本科课程建设的总体目标和基本原则，特别是围绕学生高阶思维锻炼、认知模式的形成与突破等方面展开，引导学生“想一想、跳一跳、够一够”。线性代数课程的起源和发展离不开现代科学和工程实践的需求，课堂教学中将知识点和相关案例有机融合对课程教学效果的进一步提升和学生应用知识能力的培养有重要的意义。

本文挖掘了矩阵乘法、初等变换、特征值与特征向量相关的教学案例，融合了更有深度的知识点，增加了高阶性和挑战度，进一步提高学生认识问题、分析解决复杂问题的综合能力。本文最后结合教学实际，简要分析了应用案例、思政案例等融于教学环节的具体策略和成效。

2. 教学设计举例

本节我们将围绕在具体教学过程中多次实践的矩阵乘法、特征值与特征向量相关的教学案例展开。

2.1. 矩阵乘法

2.1.1. 追本溯源，寻求知识背景

矩阵是线性代数最重要的研究对象，在诸多工程技术领域有着非常直接而广泛的应用。矩阵是一个有序数表，具有比数更宽泛的意义和背景。矩阵的运算有着丰富的实际意义，它部分保留了数的运算律又略有不同。矩阵乘法就是矩阵运算的一个典型。

矩阵乘法的具体定义如下。

定义 1：设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{s\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$，则 $s\times m$ 矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)_{s\times m}$ 称为 A 与 B 的积，记为 $C=AB$。其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,m$。

从矩阵乘法定义可以看出，矩阵乘法是非常“巧妙”和“让人感到困惑”的。“巧妙”之处在于，矩阵乘法的结果是一个矩阵，其行数、列数分别继承自前两个矩阵，并且其元素由前两个矩阵的对应行和列元素作数量积而确定，整个定义体现了高度的对称性和形式美。“让人感到困惑”的地方在于，为什么要这样复杂的定义？如对同型矩阵采用如下类似于加法且更简单的定义行不行？

$$A*B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}*\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}b_{ij}\right)_{m\times n}$$

产生这样的疑问是非常自然的。事实上，确实存在如上的类似矩阵加法定义的矩阵乘法(称为 Hadamard 乘积)，该乘积在算法中经常用到。还有一种如下的乘积(通常称为 Kronecker 乘积、直积或张量积)：

$$A\otimes B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

以上三种矩阵乘法的定义在不同的情景有着重要的应用体现，其中第一种定义的应用最为广泛。追本溯源，第一种矩阵乘法(以下简称为矩阵乘法)是英国数学家凯莱在研究线性变换的复合时提出来的，他将不同的线性变换对应的矩阵之间的关系通过定义 1 中的形式定义出来，这个定义更加本质地反映了复合线性变换的本质属性。

2.1.2. 利用实例，总结运算规律

线性变换概念是广义的，具有几何直观属性的“旋转”、“投影”等也属于线性变换的范畴。如考虑二维平面上的一个单位向量 $a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ (见下图 1、图 2 中的蓝色向量)，对其分别进行如下两个操作。

操作 A：将向量先绕原点逆时针旋转 60° (绿色标识)，再投影到 x 轴(红色标识)；

操作 B：将向量先投影到 x 轴(绿色标识)，再绕原点逆时针旋转 60° (红色标识)。

容易发现，操作 A 和操作 B 都是对向量 a 做了两个相同的变换，但是变换的顺序不同。

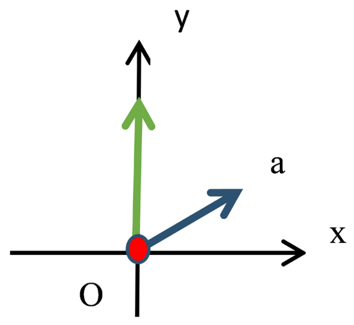

Figure 1. Operation A
图 1. 操作 A

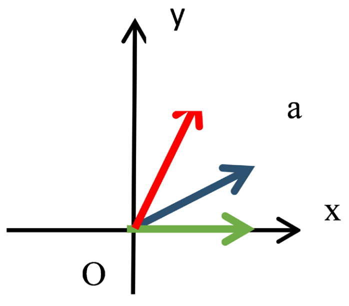

Figure 2. Operation B
图 2. 操作 B

由上图可以看出，经过操作 A 后的向量坍缩为一个点(与点 O 重合)；而操作 B 后的向量位于第一象限。两者变换次序不同，得到结果也不同。事实上，我们可以将以上两种变形用如下两个矩阵表示：

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix},$$

其中矩阵 X 对应投影到 x 轴，矩阵 Y 对应绕原点逆时针旋转 60°。

这样，操作 A 就可以表示成

$$XYa=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};$$

相应地，操作 B 就可以表示成

DOI: 10.12677/pm.2024.1411393

$$YXa = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

由此，也可以得出矩阵乘法不满足交换律，其根源在于线性变换不满足交换律。

2.1.3. 知识拓展，矩阵乘法快速算法

矩阵乘法大约于 1855 年由 Cayley 提出，随着信息技术的发展获得了更加强大的生命力。如研究多层神经网络方法的深度学习性能瓶颈之一是其中的卷积运算复杂性，而卷积运算可以通过转换变成矩阵乘法。在 1968 年之前，矩阵乘法几乎都是按照传统的方法计算。简单来说，如果两个矩阵都是 n 阶，那么其运算复杂度为 n^3 (具体地，需要 n^3 次乘法和 $n^3 + n^2$ 次加法)。

1968 年，Winograd 提供了一个减少乘法次数的矩阵乘法算法。该算法将规模较大的矩阵乘法的运算减少了许多，代价是相应的加法增加了。1969 年，Strassen 提出了第一个时间复杂度低于 n^3 (约 $n^{2.807}$)的矩阵乘法快速算法。后续学者不断更新更快的算法。目前基于 Winograd 方法的扩展，得到的矩阵乘法算法复杂度为 $n^{2.375}$。

2.1.4. 思政融入，学以致用

矩阵乘法是线性代数中一个非常重要的概念，不仅形式优美而且应用广泛。矩阵运算又与密码学密切相关。我国著名密码学专家王小云，曾于 2004 年成功破解 MD5 加密算法，随后又建立了我国的哈希函数标准，为我国信息安全做出了卓越贡献。

对于矩阵乘法相关的教学内容，通过带领学生重新经历矩阵乘法的背景，结合直观实例展示，从本质阐述矩阵乘法的运算属性，再将知识进行适度拓展，并结合科学家故事讲解的教学流程能够有效地激发学生的学习兴趣和动力。在矩阵乘法的学习中让学生深刻体会概念的创造是用来解决实际问题的，而且围绕矩阵乘法快速算法的研究已经深入到人工智能的多个领域，成为当前算法研究的一个热点问题。可以说，成熟经典的数学知识也富有极大的生命力。课堂教学不仅仅是学生掌握数学知识的过程，更是学生发展想象力、创造力，培养科学精神，塑造家国情怀的过程。

2.2. 特征值与特征向量

2.2.1. 层层问题引入，凸显几何直观

向量空间是线性代数研究的重要内容之一。从线性变换角度看，将一个矩阵 A 作用于一个向量 α，即 $A\alpha$，就是将该向量在空间上作旋转或伸缩操作(见图 1、图 2)。那么对于给定的矩阵 A，向量空间中的哪些向量在 A 的作用下仅仅是作了伸缩(包括反向伸缩)？如果存在这样的向量(非零向量)，这样的向量有多少个，关系如何，伸缩的倍数是多少？

通过层层设问自然地把这样的几何问题转化为如下定义：

定义 2: 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，如果对于数域 P 中一数 λ_0，存在一个非零向量 ξ，使得

$$A\xi = \lambda_0 \xi$$

那么 λ_0 称为 A 的一个特征值，而 ξ 叫做 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。

当把线性变换 A 的所有特征向量求出后，属于同一个特征值的特征向量就构成了线性空间 V 的一个线性子空间。那么这些子空间的直和是否构成了整个线性空间 V？如果不构成意味着什么？此外，线性变换 A 在这些子空间上的线性变换有什么特殊性？

在以上问题的索引下，特征值和特征向量就与线性空间的分解、坍缩等建立了直观的联系，也为矩阵的相似对角化奠定了基础。接下来我们通过一个案例具体展示相似对角化在实际生活问题中的应用。

2.2.2. 应用拓展，人口或资源流动模型

特征值与特征向量在工程技术、信息智能、社会科学等领域的很多问题中都有广泛应用，如系统稳定性问题、机器学习的特征提取、图像压缩问题等。如多维数据处理中常用的主成分分析法就与特征值和特征向量密切相关。此外，当我们在搜索引擎中输入某个关键词后，会在极短的时间内收到一系列网页，而且往往是排序越靠前的网页重要程度越高，此处的重要程度指的是受关注程度或者与搜索问题的关联程度等等。搜索引擎的快速搜索也用到了特征值与特征向量相关算法。这里我们以我国人口流动问题展开分析。

2021 年第七次全国人口普查结果表明，我国居住地与户口登记地所在的乡镇街道不一致且离开户口登记地半年以上的人口(简称人户分离的人口)为 4.93 亿人，其中，居住地和户口登记地不在同一乡镇街道的人口为 1.17 亿人，流动人口达 3.76 亿人[15]。我国城镇化正处于高速发展阶段，新型城镇化背景下人口流动对城市区域布局、空间结构、城市功能等方面都有重要影响。通过恰当模型来预测人口流动趋势和行为规律，对国家和地方整体发展战略下优化资源配置有重要的指导意义。

例(人口流动问题)设南方某城市圈共有三个核心城市构成，共计 1200 万人口，其中 A 市人口 600 万，B 市人口 450 万，C 市人口 150 万，假定人口总数不变且仅限于三个城市之间流动。人口流动状态的统计规律是每个五年期，A 市有三分之一市区人口流向 B 市，三分之一的市区人口流向 B 市；B 市有九分之二的市区人口流向 A 市，九分之四的人口流向 C 市；C 市有九分之四的市区人口流向 A 市，三分之一的市区人口流向 B 市。现欲预测十年、五十年后三个城市人口数及其发展趋势。

解：利用 3 维向量 $x^{(i)}$来表示第 i 个五年后 A、B、C 三个城市的人口数，则该模型的初始状态为 $x^{(0)}=(600,450,150)^T$。令 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}$按照统计规律，五年后三个城市人口数为：

$$x^{(1)}=Ax^{(0)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\450\\150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1100}{3}\\400\\\frac{1300}{3}\end{pmatrix}.$$

十年后人口数为：

$$x^{(2)}=Ax^{(1)}=A^2x^{(0)}=\begin{pmatrix}\frac{10900}{27}\\400\\\frac{10700}{27}\end{pmatrix}.$$

m 个五年后人口数为：

$$x^{(m)}=A^m x^{(0)}.$$

为了计算矩阵的高次幂，一种方法是直接矩阵乘法，另一种方法是将可对角化的矩阵对角化从而减少计算量。利用特征值和特征向量的求法，可以得到：

$$P=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

从而 $A=P\Lambda P^{-1}$。

因此，可得出一般性的人口流动模型：

$$A^m = P\Lambda^m P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{9}\right)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)^m & \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)^m \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)^m & \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)^m \end{pmatrix}.$$

据此可得五十年后三个城市人口数为

$$x^{(10)} = A^{10} x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)^{10} & \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)^{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)^{10} & \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 450 \\ 150 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

进一步计算可得，在假设的人口流动规律下，随着时间推移，三个城市人口分布趋于均衡，与城市圈互惠共赢，成果共享目标一致。

3. 课程效果反馈

理工科学生学习数学的目标之一是应用数学解决专业学习中的问题或者实际生产生活中的问题。因此，问题驱动的教学方法的恰当使用将有益于整个课程教学环节。在课程教学环节中，需要做到适时跳出教材框架，将问题的研究细化深化、具体化和应用化。让学生在探索过程中保持学习的兴趣，获得深入思考的乐趣和解决问题的成就感。通过案例教学，学生能够更好地参与到课程教学的全过程，学习积极性和主动性明显提高，课堂表现、作业质量和考试成绩也有了很大的改善，这为后面进一步加大案例教学提供了实践支撑。

基于任课教师团队长年的线性代数教学，案例教学模式不断完善，案例库不断丰富，课程得到了学生的广泛认可，评教成绩居于各课程前列。为了了解案例教学的效果，课程结束后，作者对本班级 54 名学生进行了问卷调查。问卷调查以单选和多选题的形式呈现。调研结果表明，大部分同学认为案例教学法对自己帮助很大。下面我们罗列问卷调查中的两个问题和统计数据(见图 3 和图 4)。

问题一：你对本学期线性代数课程案例教学的满意度如何？(单选)

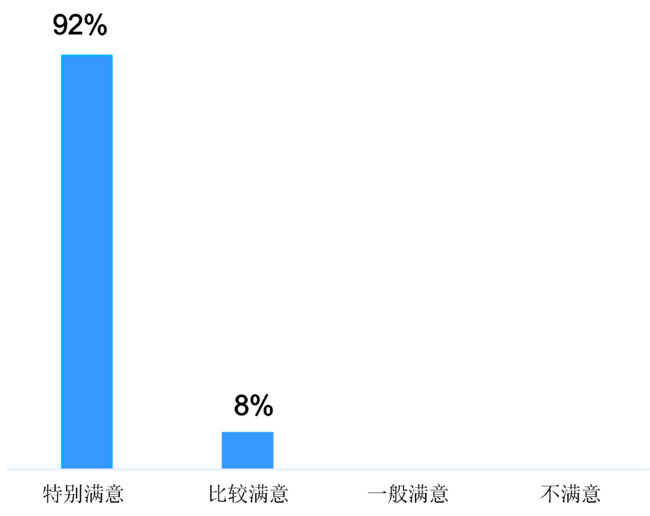

Figure 3. Statistics of question one
图 3. 问题一统计数据

问题二：案例教学对你有哪些帮助？(多选)

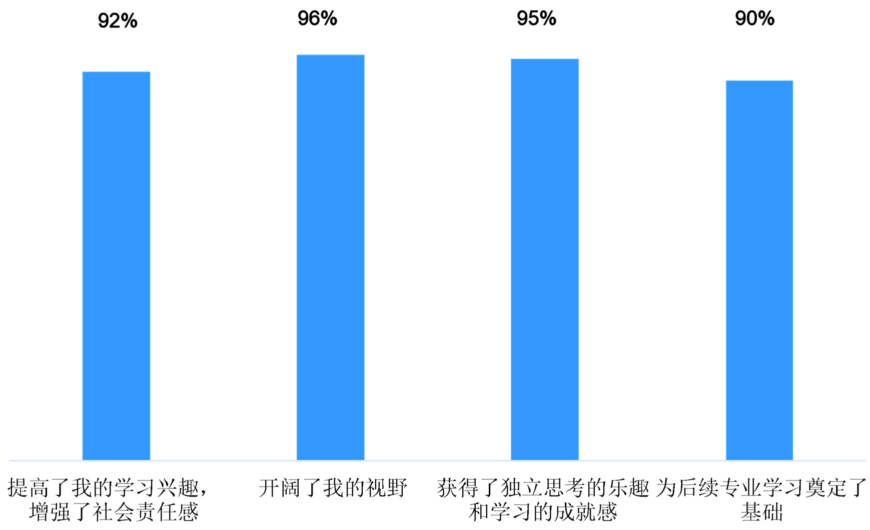

Figure 4. Statistics of question two
图 4. 问题二统计数据

4. 结语

对任课教师而言，应丰富课程教学案例，寓严密性和推理性于教学实践中。一是鼓励学生从生产生活中发现数学问题并尝试建立数学模型来转化问题和解决问题。数学的严密化不是一蹴而就的，学习线性代数的重要概念也要从自然的实例、问题和应用演变开始，最后归结到严格化和抽象化的表现形式。让知识从问题引申而来，到形成更加一般的解决策略为止。二是丰富课堂呈现环节，多提问引导，多师生互动，增强教学亲和力和感染力，增加课程的现实特性和思政元素，激发学生的学习能动性，适时鼓励学生，提高学生学习满意度，促进教学正向反馈形成。三是利用好在线课程教学平台，充分发挥平台教学资源丰富以及师生交流互动方便等特点。知识点的融合一定程度上体现了知识的拓展性，交叉学科的知识融合应用也需要不同特长的学生进行思想碰撞。学生们可以围绕一个共同问题展开充分讨论，在分析解决问题的同时，提升应用数学解决实际问题的能力以及团队协作、积极进取的素养。

在实际教学过程中，如何恰当选取案例、设计案例、优化课程教学是一个需要持续探索、不断摸索实践的过程。在此过程中，学生是主体，教师的引导是关键。在线性代数应用案例的设计和教学中，学生能够从问题本身出发，带着解决问题尤其是将问题一般化后的普遍性策略选择的教学模式对学生的高阶思维和创新能力培养有重要意义。在教学中，如何选择案例的效度、深度和广度需要结合实际进行教学实践反馈调整。同时，如何兼顾课堂教学和案例拓展、如何对案例教学模式进行有效考核都是在教学过程中需要特别注意的环节。

目前，多学科融合交叉已成为解决现实科学和技术问题的必要方法之一。应用所学知识解决实际问题的模式已经成为各高校培养学生创新能力的一种重要方式。通过案例教学可以将学生的视野吸引到解决实际问题上去，进而提高学生的学习积极性和主动性，进一步提升学习效能。

基金项目

上海高校青年教师培养资助计划(ZZ202203102)，上海理工大学研究生课程思政建设项目。

参考文献

[1] 曹宏举, 郭巧丽. “金课”背景下强化线性代数应用数学的实践与探索[J]. 大学数学, 2021, 37(2): 24-29.

[2] 谢加良, 朱荣坤, 宾红华. 新工科理念下线性代数课程教学设计探索[J]. 长春师范大学学报, 2018, 37(2): 131-133, 138.

[3] 杨文霞, 何朗, 刘扬. 新工科背景下工程数学课程群教学改革与实践[J]. 大学教育, 2020(1): 25-27.

[4] 李尚志. 线性代数精彩应用案例(之一) [J]. 大学数学, 2006, 22(3): 1-8.

[5] 栾秀春, 高璞珍, 王晓莺. 案例教学法在工科专业数学课程教学中的应用[J]. 高等工程教育研究, 2021(3): 169-172, 189.

[6] 赵东红, 魏海瑞, 刘宇. "一流本科课程"背景下线性代数案例启发教学的探索[J]. 大学数学, 2022, 38(3): 53-60.

[7] 周永强, 李燕娟. "有趣"的应用型案例教学在《线性代数》中的探索与实践[J]. 教育教学论坛, 2020(9): 268-269.

[8] 王芳. 案例教学在"线性代数"课程中的应用[J]. 无线互联科技, 2019(11): 86-87.

[9] 黄影, 张丽华. 基于"新工科"的线性代数案例式教学模式的研究与实践[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2019, 37(5): 467-470.

[10] 郑玉军, 汤琮. 基于案例与问题驱动的线性代数教学[J]. 湖南科技学院, 2019, 40(5): 5-6.

[11] 刘建丰, 李秀展. 线性代数教学案例设计: 向量组线性相关性[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(13): 129-131.

[12] 王云杰, 吴翠兰. 浅谈案例教学法在线性代数中的应用[J]. 中国新通信, 2021, 23(6): 206-207.

[13] 范莉霞, 陈明. 线性代数课程思政教学的案例探索与实施[J]. 嘉庆学院学报, 2022, 34(6): 125-127.

[14] 何薇, 陈建龙. 线性代数课程思政教学案例的设计与实践[J]. 大学数学, 2021, 37(5): 47-51.

[15] 国家统计局, 国务院第七次全国人口普查领导小组办公室. 第七次全国人口普查公报(第七号)——城乡人口和流动人口情况[J]. 中国统计, 2021, 473(5): 13.