Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 268-279
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411394

贝努利数和富比尼多项式及其算法

刘伟明[1]，**于 快**[2]，**程晓亮**[2]

[1]北京石油化工学院数理系，北京
[2]吉林师范大学数学与计算机学院，吉林 四平

收稿日期：2024年9月20日；录用日期：2024年10月22日；发布日期：2024年11月29日

摘 要

文章提出一种新的算法，选用适当的初始值，则相应地得到贝努利数、多贝努利数以及富比尼多项式等著名数和多项式。研究了该算法的原理，给出并证明了算法生成的无穷阶矩阵的第0列的显式计算公式，以及第0列到第0行的逆变换公式以及生成函数的表示，它们可用于建立恒等式及封闭计算公式。作为应用，得到有关这些著名数和多项式的一些封闭的计算公式以及恒等式。

关键词

贝努利数，富比尼多项式，算法，恒等式

Bernoulli Numbers and Fubini Polynomials and an Algorithm for Them

Weiming Liu[1], **Kuai Yu**[2], **Xiaoliang Cheng**[2]

[1]Department of Mathematics and Physics, Beijing Institute of Petrochemical Technology, Beijing
[2]College of Mathematics and Computer, Jilin Normal University, Siping Jilin

Received: Sep. 20th, 2024; accepted: Oct. 22nd, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

A new algorithm for Bernoulli numbers, Poly-Bernoulli numbers and Fubini polynomials is given by using appropriate initial values in this paper. The principle of the algorithm is discussed, and the explicit formula for the 0-th column of the matrix generated by the algorithm, the inverse transform and their expression by generating funtions from the 0-th column to the 0-th row are given, which can be used to establish identities and closed formulae. As applications some identities and closed formulae for these famous numbers and polynomials are given.

文章引用: 刘伟明, 于快, 程晓亮. 贝努利数和富比尼多项式及其算法[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 268-279.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411394

Keywords

Bernoulli Numbers, Fubini Polynomials, Algorithm, Identities

1. 引言

贝努利数在数学，特别是组合数学、数论中有很多重要的应用，如在幂和及zeta函数值的计算中。至今一直有文章讨论它们的性质、各种推广及其各种应用[1]-[7]。富比尼多项式由于在组合数计算及无穷和计算中有很多重要的应用，近年来得到很多人的研究[8]-[13]。

在研究多zeta函数在非－正整数点处的值时，Akiyama和Tanigawa [6]，发现了一个可以用来计算贝努利数的有趣算法，它类似于二项系数计算的帕斯卡三角方法，现被称为Akiyama-Tanigawa算法。算法如下：

给定初始行即第0行：

$$a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \cdots, a_{0,k}, \cdots = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{k+1}, \cdots,$$

然后通过下列递推公式定义无穷阶矩阵的其它各行：

$$a_{n+1,m} = (m+1)(a_{n,m} - a_{n,m+1}) \quad (n \geq 0, m \geq 0) \tag{1}$$

则无穷阶矩阵的第0列为贝努利数列，即

$$a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, \cdots, a_{n,0}, \cdots = B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots,$$

这里 B_n 是第n个贝努利数。部分计算结果原文显示如下图1：

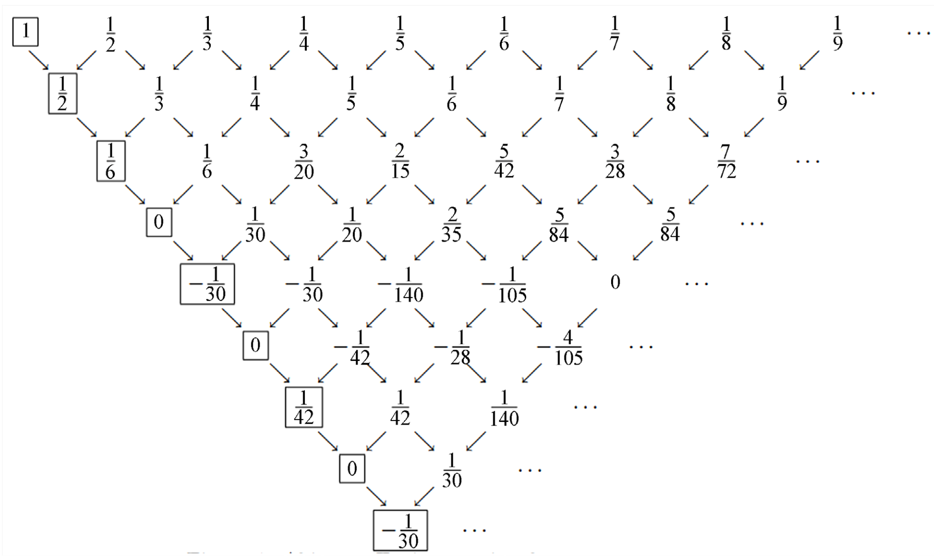

Figure 1. Akiyama-Tanigawa triangle
图 1. Akiyama-Tanigawa 三角

Kaneko [7]研究了Akiyama-Tanigawa算法的原理，给出了无穷阶Akiyama-Tanigawa矩阵的第0列的显式计算公式，并证明选用适当的初始值，利用Akiyama-Tanigawa算法则可以在无穷阶矩阵的第0列得到贝努利数。另外Kaneko新定义了一种多贝努利数，并证明选用另外适当的初始值，利用同一算法，则可以在无穷阶矩阵的第0列得到多贝努利数。

Inaba [14]和Cereceda [15]分别讨论了Akiyama-Tanigawa算法及广义Akiyama-Tanigawa算法在整数幂的超和研究中的应用。

本文提出一种新的算法，它在初始行即第0行恒取1这种非常简单的情形下，则可以在算法生成的无穷阶矩阵的第0列得到贝努利数。算法如下：

给定初始行即第0行 $a_{0,k} \equiv 1\left(k=0,1,2,\cdots\right)$，然后通过下列递推公式定义无穷阶矩阵的其它各行：

$$a_{n+1,m} = \left(m+1\right)a_{n,m} - \frac{\left(m+1\right)^2}{m+2} \cdot y \cdot a_{n,m+1} \quad \left(n \ge 0, m \ge 0\right) \tag{2}$$

若其中参数选择为 $y=1$，则算法生成的无穷阶矩阵的第0列为

$$a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, \cdots, a_{n,0}, \cdots = B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots,$$

即为贝努利数列。部分计算结果显示如下图2：

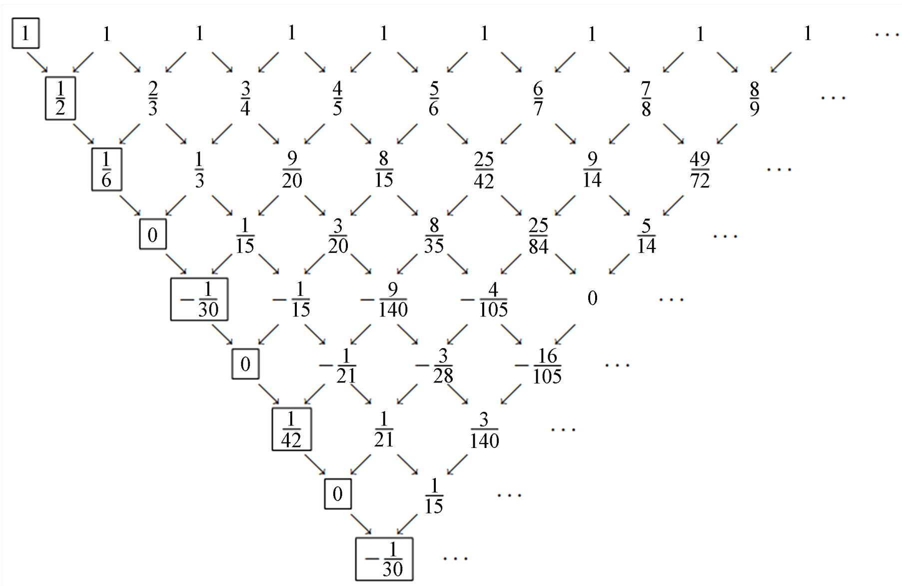

Figure 2. Some calculation results using the new algorithm

图 2. 新算法部分计算结果展示

同样，通过选取合适的初始行即第0行，该算法也可以生成多贝努利数和富比尼多项式。

本文研究了该算法的原理，并证明分别选用适当的初始值，该算法可以相应地生成贝努利数，多贝努利数以及富比尼多项式等著名数和多项式。给出并证明了算法生成的无穷阶矩阵的第0列的显式计算公式，以及第0列到第0行的逆变换公式及其生成函数的表示，而它们可用于建立恒等式及封闭计算公式。作为理论的应用，得到有关这些贝努利数、多贝努利数、调和数以及富比尼多项式等著名数和多项式的一些恒等式及封闭的计算公式。由于富比尼多项式可用于偏好排列总数组合数计算及无穷和的计算，故本文的结果也可用于它们的计算及相关恒等式的建立。通过算法理论及应用实例将可看出本文的算法是对已有算法的一种补充。

2. 算法理论及主要结果

定理1　给定参数y的值，给定第0行 $a_{0,k}\,(k=0,1,2,\cdots)$，由递推公式

$$a_{n+1,m}=(m+1)a_{n,m}-\frac{(m+1)^2}{m+2}\cdot y\cdot a_{n,m+1}\quad (n\ge 0,m\ge 0)$$

逐行定义无穷阶矩阵的其它各行 $a_{n,m}$，则

$$a_{n,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+k) \tag{3}$$

其中

$$c(n)=:\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^k\cdot a_{0,k}$$

证　对n进行归纳，当 $n=0$ 时，

$$\begin{aligned}
右边&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(k)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{l=0}^{m}s(m+1,l+1)\cdot y^{-m}\cdot\sum_{k=0}^{l}\begin{Bmatrix}l+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^k\cdot a_{0,k}\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=k}^{m}s(m+1,l+1)\cdot\begin{Bmatrix}l+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{-m+k}\cdot a_{0,k}\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\delta_{m,k}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{-m+k}\cdot a_{0,k}=左边
\end{aligned}$$

，结论正确。

假设结论对 $n-1$ 时成立，而对n时，

$$\begin{aligned}
左边&=a_{n,m}=(m+1)a_{n-1,m}-\frac{(m+1)^2}{m+2}\cdot y\cdot a_{n-1,m+1}\\
&=(m+1)\cdot\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&\quad-\frac{(m+1)^2}{m+2}\cdot y\cdot\frac{m+2}{(m+1)!}\cdot(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}s(m+2,k+1)\cdot y^{-(m+1)}\cdot c(n-1+k)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}(m+1)\cdot s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&\quad+\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m+1}s(m+2,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m+1}(m+1)\cdot s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&\quad+\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m+1}s(m+2,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m+1}\left[(m+1)\cdot s(m+1,k+1)+s(m+2,k+1)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=1}^{m+1}\left[(m+1)\cdot s(m+1,k+1)+s(m+2,k+1)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n-1+k)\\
&\quad+\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\left[(m+1)\cdot s(m+1,1)+s(m+2,1)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n-1)\\
&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\left[(m+1)\cdot s(m+1,k+2)+s(m+2,k+2)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n+k)\\
&\quad+\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\left[(m+1)\cdot s(m+1,1)+s(m+2,1)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n-1)
\end{aligned}$$

由递推公式[16] [17]

$$s(m+1,k)=s(m,k-1)-m\cdot s(m,k)$$

及

$$s(m+1,0)=0\text{，若 }m+1>0$$

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+k)\\&\quad+\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\left[s(m+1,0)\right]\cdot y^{-m}\cdot c(n-1)\\&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+)k+0\\&=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+k)=\text{右边}\end{aligned}$$

，结论正确。故命题得证。

定理2 给定参数y的值，给定第0行$a_{0,k}\ (k=0,1,2,\cdots)$，设

$$a_{n+1,m}=(m+1)a_{n,m}-\frac{(m+1)^2}{m+2}\cdot y\cdot a_{n,m+1}\quad(n\geq 0,m\geq 0),$$

则第0列的显式公式为

$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^k\cdot a_{0,k}\tag{4}$$

证 由定理1，$$a_{n,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+k)$$

其中 $$c(n)=:\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^k\cdot a_{0,k}$$

令$m=0$，则

$$a_{n,0}=s(1,1)\cdot c(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^k\cdot a_{0,k}$$

证毕。

定理3 给定参数y的值，给定第0行$a_{0,k}\ (k=0,1,2,\cdots)$，设

$$a_{n+1,m}=(m+1)a_{n,m}-\frac{(m+1)^2}{m+2}\cdot y\cdot a_{n,m+1}\quad(n\geq 0,m\geq 0),$$

则

$$a_{n,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot a_{n+k,0}\tag{5}$$

特别当$n=0$时，

$$a_{0,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot a_{k,0}\tag{6}$$

证 由定理 1 $$a_{n,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot c(n+k)$$

其中
$$c(n)=:\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{k}\cdot a_{0,k}$$

再由定理2给出的第0列的显式公式
$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{k}\cdot a_{0,k}$$

得到
$$c(n)=a_{n,0},$$

故有
$$a_{n,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^{m}\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot a_{n+k,0}$$

特别当 $n=0$ 时，得到第0列到第0行的逆变换公式
$$a_{0,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^{m}\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot y^{-m}\cdot a_{k,0}$$

命题得证。

定理4　第0列确定的指数型生成函数与第0行确定的通常性生成函数之间的关系
$$\mathbb{B}(t)=\left(1-u\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_{0}^{u}\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=y\cdot\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)} \tag{7}$$

其中
$$\mathbb{B}(t)=:\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,0}\frac{t^{n}}{n!},\quad \mathbb{A}(u)=:\sum_{k=0}^{\infty}a_{0,k}u^{k}$$

证
$$\begin{aligned}\mathbb{B}(t)=:\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,0}\frac{t^{n}}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{k}\cdot a_{0,k}\right]\frac{t^{n}}{n!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=k}^{\infty}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}_{1}\frac{t^{n}}{n!}\right]\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{k}\cdot a_{0,k}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{t}-1\right)^{k}}{k!}\cdot\mathrm{e}^{t}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}\cdot y^{k}\cdot a_{0,k}\\
&=\mathrm{e}^{t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot a_{0,k}\cdot y^{k}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)^{k}\\
&=\mathrm{e}^{t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot a_{0,k}\cdot u^{k}\Big|_{u=y\cdot\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)}\\
&=\left(1-u\cdot\frac{1}{y}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot a_{0,k}\cdot u^{k}\Big|_{u=y\cdot\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)}\\
&=\left(1-u\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_{0}^{u}\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=y\cdot\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)}\end{aligned}$$

命题得证。

3. 在贝努利数、富比尼多项式等著名数和多项式研究中的应用

本节将给出前节中算法理论及主要结果的应用：

例1　贝努利数和多贝努利数的生成及相关的恒等式

贝努利数的定义[7]：

$$\frac{x}{e^x-1}\cdot e^x=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$$

贝努利数的显式公式(定理1 [7])

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1} \tag{8}$$

由定理2(4)式，其中参数选择为 $y=1$，则有

$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}a_{0,k}$$

对照贝努利数的显式公式，可知，若令 $a_{0,k}\equiv 1$，可得 $a_{n,0}=B_n$。

说明算法在第0行恒取1这种非常简单的情形下，生成贝努利数列作为无穷阶矩阵的第0列。

再由定理3(6)式，其中 $a_{0,m}\equiv 1$，而 $a_{k,0}=B_k$，故得到有关贝努利数的封闭公式

$$\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot B_k=\frac{m!}{m+1}\cdot(-1)^m \tag{9}$$

多贝努利数 $D_n^{(r)}$ 的定义[7]：

$$\frac{Li_k\left(1-e^{-x}\right)}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(r)}\frac{x^n}{n!}$$

这里 $Li_k(t)=:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^k}$。多贝努利数的显式公式(性质3 [7])

$$D_n^{(r)}=(-1)^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{(k+1)^r} \tag{10}$$

由定理2(4)式，其中参数选择为 $y=1$，并对照多贝努利数的显式公式，

令 $$a_{0,k}=\frac{1}{(k+1)^{r-1}}\quad(r\ge 1),$$

可得 $$a_{n,0}=(-1)^n\cdot D_n^{(r)},$$

说明算法在第0行 $a_{0,k}=\frac{1}{(k+1)^{r-1}}$ 时，生成的无穷阶矩阵的第0列即为 $(-1)^n\cdot D_n^{(r)}$。

再由定理3(6)式，以及 $a_{0,m}=\frac{1}{(m+1)^{r-1}}$，$a_{k,0}=(-1)^k\cdot D_k^{(r)}$，故得到有关多贝努利数的封闭公式

$$\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot(-1)^k\cdot D_k^{(r)}=\frac{m!}{(m+1)^r}\cdot(-1)^m \tag{11}$$

例2 富比尼多项式的生成及相关的恒等式

富比尼多项式的定义[8] [12]：

$$\frac{1}{1-y\left(e^t-1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(y)\frac{t^n}{n!} \tag{12}$$

富比尼多项式的显式公式

$$F_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\cdot k!\cdot y^k \tag{13}$$

下面将利用前面得到的结果，推导富比尼多项式的另一显式公式

$$F_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k+n}\cdot k!\cdot(y+1)^k \tag{14}$$

证明：由第0行到第0列的变换公式

$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}a_{0,k}\cdot y^k$$

利用定理4，其相应的生成函数表示形式为

$$\mathbb{B}(t)=\left(1-u\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=y\cdot(1-\mathrm{e}^t)}$$

令初始行为 $a_{0,k}=k+1$，参数y写为 $y+1$，可求得 $\mathbb{B}(t)$，从而可得 $a_{n,0}$ 的显式表达式：

$$\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{u}\int_0^u\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)u^k\mathrm{d}u=\frac{1}{1-u}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(t)&=\left(1-u\cdot\frac{1}{y+1}\right)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=(y+1)\cdot(1-\mathrm{e}^t)}\\&=\left(1-u\cdot\frac{1}{y+1}\right)\cdot\frac{1}{1-u}\Bigg|_{u=(y+1)\cdot(1-\mathrm{e}^t)}=\mathrm{e}^t\cdot\frac{1}{1-(y+1)\cdot(1-\mathrm{e}^t)}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{-t}-(y+1)\cdot(\mathrm{e}^{-t}-1)}=\frac{1}{1+(\mathrm{e}^{-t}-1)-(y+1)\cdot(\mathrm{e}^{-t}-1)}\\&=\frac{1}{1-y\cdot(\mathrm{e}^{v}-1)\big|_{v=-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(y)\frac{(-t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(y)\cdot(-1)^n\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

比较两边 $\frac{t^n}{n!}$ 的系数可得：

$$\begin{aligned}a_{n,0}=F_n(y)\cdot(-1)^n&=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}a_{0,k}\cdot(y+1)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k}\cdot k!\cdot(y+1)^k\end{aligned}$$

证毕。

说明算法在初始行即第0行为 $a_{0,k}=k+1$，参数y为 $y+1$ 这种情形下，生成无穷阶矩阵的第0列为富比尼多项式列乘上 $(-1)^n$。从而得到富比尼多项式的另一显式公式

$$F_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^{k+n}\cdot k!\cdot(y+1)^k$$

再由定理3(6)式，

$$a_{0,m}=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot a_{k,0},$$

其中 $a_{0,m}=m+1$，而 $a_{k,0}=F_k(y)\cdot(-1)^k$，故得到有关富比尼多项式的封闭公式

$$m+1=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^m\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot F_k(y)\cdot(-1)^k$$

即

$$(-1)^m m! = \sum_{k=0}^{m} s(m+1,k+1)\cdot F_k(y)\cdot(-1)^k \tag{15}$$

评注：组合数学中有一种被称为“偏好排列总数”的组合数其显式计算公式为

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot k!$$

显然有：$T_n = F_n(1) = F_n(y)\big|_{y=1}$。

由上面例2中讨论的关于富比尼多项式生成的的计算过程可得到偏好排列总数 T_n 的值，此时只要令初始行即第0行为 $a_{0,k} = k+1$，其中的参数y用 $y+1=1+1=2$ 替代，通过本文的算法计算得到第0列 $a_{n,0}$，最后将它们再乘上 $(-1)^n$，即可得到偏好排列总数 T_n 的值。

例3 在无限和求解中的应用

解析数论中常研究各种无限和，例如，求解无限和：

$$G(y,n) =: \sum_{k=0}^{\infty} k^n y^k$$

for $|y|<1, n\in N$。有一个著名的结果是

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n y^k = \frac{1}{1-y} F_n\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

即无限和可用富比尼多项式表示出来。故由上面例2中讨论的关于富比尼多项式生成的计算过程，可得到无限和 $G(y,n)$ 的值。此时只要令初始行即第0行为 $a_{0,k} = k+1$，其中的参数y用 $\frac{y}{1-y}+1=\frac{1}{1-y}$ 替代，通过本文的算法计算得到第0列 $a_{n,0}$，最后将它们再乘上 $(-1)^n \cdot \frac{1}{1-y}$，即可得到无限和 $G(y,n)$ 的值。

例4 贝努利数与调和数相关的恒等式

调和数列的定义：

$$H_0 = 0，\ H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad n>0$$

调和数列的通常型生成函数为：

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cdot x^n$$

下面将证明调和数和贝努利数相关的恒等式

$$-\frac{n}{2} B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \cdot (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{k+1} H_k \tag{16}$$

以及

$$H_m = \frac{m+1}{m!} \cdot (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{m} s(m+1,k+1) \cdot \frac{k}{2} B_{k-1} \tag{17}$$

证明：在算法(2)中，取参数 $y=1$，由第0行到第0列的变换公式

$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}a_{0,k}$$

利用定理4，其相应的生成函数表示形式为

$$\mathbb{B}(t)=(1-u)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=1-\mathrm{e}^t}$$

现取初始行 $a_{0,k}=H_k$，

故
$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}H_k$$

可证明
$$a_{n,0}=-\frac{n}{2}B_{n-1}.$$

过程如下
$$\mathbb{A}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{0,k}\cdot u^k=\sum_{k=0}^{\infty}H_k\cdot u^k=\frac{-\ln(1-u)}{1-u}$$

$$\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{u}\int_0^u\frac{-\ln(1-u)}{1-u}\mathrm{d}u=\frac{\ln^2(1-u)}{2u}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(t)&=(1-u)\cdot\left[\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{A}(u)\mathrm{d}u\right]\Bigg|_{u=1-\mathrm{e}^t}\\&=\left[(1-u)\cdot\frac{\ln^2(1-u)}{2u}\right]\Bigg|_{u=1-\mathrm{e}^t}\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\cdot\frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1}=-\frac{1}{2}t\cdot\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cdot\mathrm{e}^t\\&=-\frac{1}{2}t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}nB_{n-1}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,0}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

比较两边 $\frac{t^n}{n!}$ 的系数可得：

$$-\frac{n}{2}B_{n-1}=a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}H_k$$

证毕。

说明算法在第0行取调和数列即 $a_{0,k}=H_k$ 时，生成 $a_{n,0}=-\frac{n}{2}B_{n-1}$ 列作为无穷阶矩阵的第0列。从而建立起调和数和贝努利数之间的联系，得到恒等式

$$-\frac{n}{2}B_{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n+1\\k+1\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{k+1}H_k$$

再由定理3(6)式，可得

$$H_m=\frac{m+1}{m!}\cdot(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m}s(m+1,k+1)\cdot\frac{k}{2}B_{k-1}$$

评注：如果这里将算法换成Akiyama-Tanigawa算法，而初始行仍然选取调和数列，即 $a_{0,k}=H_k$，则可证 $a_{n,0}=\delta_{n,1}$，故只能得到恒等式

$$a_{n,0}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}\cdot(-1)^k\cdot k!\cdot H_k=\delta_{n,1}$$

这里 $\delta_{n,1}$ 是Kronecker符号。从而无法建立起调和数和贝努利数之间的联系，故仅从这点也可看出本文的算法是对已有算法的一种补充。

4. 总结与展望

本文提出了一种新算法，通过选取适当的初始值生成贝努利数、多贝努利数及富比尼多项式等著名数和多项式，探讨了该算法的原理，并给出了无穷阶矩阵的第 0 列的显式计算公式、逆变换公式以及生成函数的表示，它们可以作为建立恒等式及封闭计算公式的一种方法，同时提供了建立这些著名数和多项式相关的封闭计算公式和恒等式的应用实例。通过算法理论及应用实例可看出本文的算法是对已有算法的一种补充。

存在的不足以及未来的改进和研究方向：已有的Akiyama-Tanigawa算法的研究，以及本文提出的算法研究，它们的侧重点在于：选定什么初始行，算法生成的无穷阶矩阵其第0列是要研究的各种著名数列或多项式列；给出第0列的显式计算公式，以及第0列到第0行的逆变换公式及其生成函数的表示。目的在于建立著名数和多项式之间的各种关系、恒等式及封闭计算公式，这是从组合数学研究的角度。然而，对该类型算法进行可行性分析、计算复杂度和适用范围的研究，即从数值分析和计算的角度的研究，目前还基本属于空白，但是这是很有意义、值得未来进一步研究的课题。另外，算法生成的无穷阶矩阵虽然给出了通项公式，但是任意列的生成函数的表达式并未给出；算法生成的无穷阶矩阵有哪些好的性质，还需进一步深入讨论；以及探讨算法的更多的应用等。

基金项目

国家自然科学基金项目(12026420)；

吉林省科技发展计划项目(YDZJ202201ZYTS627)。

参考文献

[1] Mező, I. (2010) A New Formula for the Bernoulli Polynomials. *Results in Mathematics*, **58**, 329-335. https://doi.org/10.1007/s00025-010-0039-z

[2] Kaneko, M. (1997) Poly-Bernoulli Numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **9**, 221-228. https://doi.org/10.5802/jtnb.197

[3] Arakawa, T. and Kaneko, M. (1999) Multiple Zeta Values, Poly-Bernoulli Numbers, and Related Zeta Functions. *Nagoya Mathematical Journal*, **153**, 189-209. https://doi.org/10.1017/s0027763000006954

[4] Ohno, Y. and Sasaki, Y. (2020) Recursion Formulas for Poly-Bernoulli Numbers and Their Applications. *International Journal of Number Theory*, **17**, 175-189. https://doi.org/10.1142/s1793042121500081

[5] Kargin, L., Cenkci, M., Dil, A. and Can, M. (2022) Generalized Harmonic Numbers via Poly-Bernoulli Polynomials. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **100**, 365-386. https://doi.org/10.5486/pmd.2022.9074

[6] Akiyama, S. and Tanigawa, Y. (2001) Multiple Zeta Values at Non-Positive Integers. *The Ramanujan Journal*, **5**, 327-351. https://doi.org/10.1023/a:1013981102941

[7] Kaneko, M. (2000) The Akiyama-Tanigawa Algorithm for Bernoulli Numbers. *Journal of Integer Sequences*, **3**, 1-6.

[8] Boyadzhiev, K.N. and Dil, A. (2016) Geometric Polynomials: Properties and Applications to Series with Zeta Values. *Analysis Mathematica*, **42**, 203-224. https://doi.org/10.1007/s10476-016-0302-y

[9] Kargın, L. (2017) Some Formulae for Products of Geometric Polynomials with Applications. *Journal of Integer Sequences*, **20**, Article 17.4.4.

[10] Kargın, L. and Cekim, B. (2018) Higher Order Generalized Geometric Polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 887-903.

[11] Mihoubi, M. and Taharbouchet, S. (2019) Identities and Congruences Involving the Geometric Polynomials. *Miskolc*

Mathematical Notes, **20**, 395-408. https://doi.org/10.18514/mmn.2019.2498

[12] Kim, D.S., Kim, T., Kwon, H.-I. and Park, J.-W. (2018) Two Variable Higher-Order Fubini Polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **55**, 975-986.

[13] Kargın, L. and Cenkci, M. (2022) Recurrences and Congruences for Higher-Order Geometric Polynomials and Related Numbers. *Ukrainian Mathematical Journal*, **73**, 1873-1894. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02035-z

[14] Inaba, Y. (2005) Hyper-Sums of Powers of Integers and the Akiyama-Tanigawa Matrix. *Journal of Integer Sequences*, **8**, Article 0527.

[15] Cereceda, J. (2013) Generalized Akiyama-Tanigawa Algorithm for Hypersums of Powers of Integers. *Journal of Integer Sequences*, **16**, Article 1332.

[16] Graham, R.L., Knuth, D.E. and Patashnik, O. (1994) Concrete Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company.

[17] Broder, A.Z. (1984) The R-Stirling Numbers. *Discrete Mathematics*, **49**, 241-259. https://doi.org/10.1016/0012-365x(84)90161-4