Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(11), 314-324
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1411398

Hans汉斯

一类Conformable分数阶发展包含解集的非空性和紧性

常元元

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年10月22日；录用日期：2024年11月22日；发布日期：2024年11月29日

摘　要

本文利用不动点定理和算子半群理论讨论了Banach空间 $\alpha\in(0,1]$ 阶Conformable型分数阶发展包含

$$\begin{cases} T_\alpha x(t)\in Ax(t)+B(t,x(t))u(t)+F(t,x(t)), t\in J:=(0,b], \\ x(0)=x_0, \end{cases}$$

mild解的存在性以及解集的紧性。

关键词

Conformable分数阶导数，分数阶发展包含，不动点定理

A Class of Conformable Fractional Order Evolution Inclusions the Non-Emptiness and Compactness of the Solution Set

Yuanyuan Chang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 22nd, 2024; accepted: Oct. 22nd, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

This paper utilizes the fixed point theorem and operator semigroup theory to discuss the existence and compactness of the set of mild solutions for the $\alpha\in(0,1]$-order conformable fractional order evolution inclusion

文章引用: 常元元. 一类 Conformable 分数阶发展包含解集的非空性和紧性[J]. 理论数学, 2024, 14(11): 314-324.
DOI: 10.12677/pm.2024.1411398

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) \in Ax(t) + B(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), t \in J = [0, b], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Keywords

Conformable Fractional Derivative, Fractional Order Evolution Inclusions, Fixed Point Theorem

1. 引言

微分包含系统作为一种动态系统，描述具不确定演化方程规则的系统模型，该类系统于二十世纪六十年代提出。作为非线性分析理论的重要分支之一，微分包含与许多数学分支有着紧密的联系，由于它在机器人工程、流体力学和数学金融等领域的应用而引起人们广泛关注。因此，微分包含具有丰富的研究内容和广泛的应用价值，见文献[1]-[3]。分数阶微分包含是整数阶微分包含与分数阶微分方程的推广，随着分数阶微分理论发展的日益完善，许多系统的行为可以通过分数阶模型来描述，分数阶微分逐渐成为人们研究分形几何和分数阶动力系统的有力工具，在粘黏性力学、神经系统、热传导、信号预处理、人工智能、气候研究等很多领域都应用广泛。

分数微积分理论是专门研究任意阶(分数阶，甚至是复数阶)微分和积分性质及其应用的领域，它始于 1695 年的 L'Hospital，最流行的分数阶导数是由积分形式定义的，紧随其后的是 Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶导数，参见[4]-[6]。但这些定义有一些缺点：

1) 任何函数的 Riemann-Liouville 分数阶导数在时间 $t=0$ 处是具有某种奇性的，例如对于 $\alpha \in (n-1, n)$，$T_{0^+}^\alpha(\lambda) = 0$ 在 Riemann-Liouville 意义上是无效的，其中 λ 是常数。

2) 对于 Caputo 导数或 Riemann-Liouville 导数，以下公式是不满足的：对于 $g, h:[0,+\infty) \to R$，

(i) $T_{0^+}^\alpha(gh) = gT_{0^+}^\alpha(h) + hT_{0^+}^\alpha(g)$。

(ii) $T_{0^+}^\alpha\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{hT_{0^+}^\alpha(g) - gT_{0^+}^\alpha(h)}{h^2}$。

(iii) $T_{0^+}^\alpha(h \circ g) = T_{0^+}^\alpha h(g(t)) T_{0^+}^\alpha(g)$。

然而，我们从文章中推断出[4] [7] [8]，由 Khalil 等人提出的“Conformable 分数阶导数”满足上述性质，设 $\alpha \in (0,1]$。对于 $h:[0,+\infty) \to R$，Conformable 分数阶导数定义为

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad t > 0,$$

其中 T_α 表示 α 阶 Conformable 分数阶导数算子。高阶 Conformable 分数阶导数也在[4]中建立。2015 年，Abdeljawad [7]进一步研究了分数阶导数和积分，得到了许多性质的证明，包括链式法则和拉普拉斯变换等。更多结论，我们参考[8]-[10]。

算子半群理论是研究发展方程的一个有利工具，运用算子半群性质，可以把抽象发展方程对应的定解问题转化为与之等价的积分方程，进而利用非线性泛函分析的方法和抽象空间的常微分方程理论来研究发展方程。关于算子半群理论的更多应用，可以参考文献[11]-[13]。

2019 年，何家维等[14]运用 cosine 族理论以及凝聚不动点定理研究 $\alpha \in (1,2)$ 阶发展包含

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} x(t) \in Ax(t) + F(t, \overline{x}(t)), t \in J, \\ x(t) + g(t) = x_0, x'(0) = x_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

mild 解的存在性以及解集的紧性，其中 g 是全连续的非局部函数。

2020 年，项乔敏等[15]在非紧半群下，利用 Hausdorff 非紧性测度与等度连续模定义的新的非紧性测度证明了时滞发展包含

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), x_t) + Bu(t), t \in J := [0,b], q \in (0,1) \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{1.2}$$

mild 解的存在性及近似可控性，并将结果推广到了非局部的情形，其中 ${}^{C}D_t^q$ 是 Caputo 型分数阶导数，$A: D(A) \subset X \to X$ 是稠定闭线性算子且生成了非紧半群 $\{S(t), t \ge 0\}$。

受上述文献的启发，本文研究 Banach 空间 X 中分数阶发展包含

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) \in Ax(t) + B(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), t \in J := (0,b], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

的 mild 解的存在性和解集的紧性。其中 T_α 表示 $\alpha \in (0,1]$ 阶 Conformable 型分数阶导数。$x(t)$ 取值于自反的 Banach 空间 X，控制函数 $u(t)$ 在另一个可分的自反 Banach 空间 Y 中取值。$A: D(A) \subset X \to X$ 生成 X 中的强连续半群 $\{S(t)\}_{t \ge 0}$，$B: J \times X \to L(Y, X)$ 且 $F: J \times X \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$ 是非空有界闭凸值的多值映射。

以往证明发展方程解的存在性，选用的是著名的 Banach 不动点定理，Brouwer 不动点定理等，本文选用凝聚映射的不动点定理，这也是本文选择分数阶微分包含解的证明方法的新颖性，通过定义一个集值映射，将分数阶发展包含 mild 解的存在性与集值映射的不动点结合起来，即主要通过证明集值映射的凸性和紧性，是闭的且 χ_C-凝聚的，证明了分数阶微分包含(1.3)解的存在性，在此基础上，只需要证明解集的有界性，就可以得到分数阶微分包含(1.3)解集的紧性。在证明过程中，还引进了 Hausdorff 非紧性测度，此不动点定理为我们证明分数阶微分包含解的存在性与解集的紧性提供了很好的思路。另外，Banach 不动点定理也是此类问题常用的不动点定理，也是最重要、最基础的不动点定理，它不仅给出了不动点的存在性，保证了不动点的唯一性，而且还提供了逼近不动点的步骤，这使得很多求解问题变得简单。但是 Banach 不动点定理的应用需要满足一定的条件，即映射必须是压缩映射，这意味这不是所有的映射都可以应用这个定理，这限制了它的适用范围。Brouwer 不动点定理也是研究方程解的存在性与唯一性理论的重要工具之一。该定理在无穷维的情况下不成立，这是因为在无穷维的情况下，即使是连续映射也可能没有不动点。Brouwer 不动点定理在有限维的情况下断言：从有限维欧氏空间中的紧凸集到自身的任意连续映射具有不动点。然而，在无穷维的情况下，由于空间的性质发生了变化，这个定理不再适用。

2. 预备知识

在本文中，用 $P(X)\left[P_{cl}(X), P_b(X), P_{cv}(X), P_{(w)cp}(X)\right]$ 表示 X 的所有非空[分别非空闭的，非空有界的，非空凸的，非空(弱)紧的]子集构成的集合。$O_X(x,r)$ 表示中心为 $x \in X$ 和半径 $r > 0$ 的开球。

设 X 是自反的 Banach 空间。$C(J, X)$ 是定义于 J 的 X 值连续函数之集按范数 $\|x\|_C = \sup_{t \in J} \|x(t)\|$ 构成的

Banach 空间。$L^p(J,X)$ $(p\ge1)$ 为 J 上的 X 值 p 方 Bochner 可积函数按范数 $\left(\int_0^b\|f(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$ 构成的 Banach 空间。不失一般性，我们总假设存在常数 $M>0$ 使得 $\sup\limits_{t\in J}\|S(t)\|\le M$ 。设 Y 为可分的自反的 Banach 空间，其范数定义为 $\|\cdot\|$，控制函数 $u(t)$ 在 Y 中取值，$L(Y,X)$ 为 Y 到 X 的有界线性算子全体构成的 Banach 空间。

定义 2.1 [4] [7] [8]设 $\alpha\in(n,n+1]$，$f:[0,\infty)\to R$ 。f 的 Conformable 分数阶导数可定义为

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f^{([n]-1)}\left(t+\varepsilon t^{[n]-\alpha}\right)-f^{([n]-1)}(t)}{\varepsilon},\quad t>0,$$

其中 $[n]$ 表示大于等于 α 的最小整数。特别地，当 $\alpha\in(0,1]$ 时，有

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon},\quad t>0.$$

关于 Conformable 分数阶导数，我们有如下的引理。

引理 2.1 [4] [7] [8]假设 $\alpha\in(0,1]$ 或者 $\alpha\in(n,n+1]$，$n\in N$ 和 f,g 在 $t>0$ 处可微。则

(1) $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$，$\forall a,b\in R$；

(2) $T_\alpha(t^p)=pt^{p-\alpha}$，$\forall p\in R$；

(3) $T_\alpha(\lambda)=0$，$\forall\lambda\in R$；

(4) $T_\alpha(fg)=fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)$；

(5) $T_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$；

(6) $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$。

定义 2.2 [7]设 $\alpha\in(n,n+1]$，函数 f 的 α 阶分数阶积分定义为

$$I^\alpha f(t)=\frac{1}{n!}\int_0^t(t-s)^n s^{\alpha-n-1}f(s)\mathrm{d}s.$$

定义 2.3 [11] [12] 设 X 是 Banach 空间。$L(X)$ 表示 X 中线性有界算子全体构成的 Banach 空间。若 $T:[0,+\infty)\to L(X)$ 为算子函数，满足：

(i) $T(0)=I$ (I 表示 X 上的恒等算子);

(ii) 半群性质，*i.e.*，对 $\forall t,s\in[0,+\infty)$，$T(t+s)=T(t)T(s)$；

(iii) 强连续性，*i.e.*，对每一个 $x\in X$ 都有 $\lim\limits_{t\to0^+}T(t)x=x$；

则称 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ 为 X 上的一个强连续半群，也称 C_0-半群。

定义 2.4 [11] [12] 设 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ 是 Banach 空间 X 上的一个 C_0-半群，则线性算子

$$Ax=\lim_{t\to0^+}\frac{T(t)x-x}{t},\quad D(A)=\left\{x\in X:\lim_{t\to0^+}\frac{T(t)x-x}{t}\text{存在}\right\},$$

称为 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ 的无穷小生成元，简称为生成元。

定义 2.5 [11] [12] 设 $\{T(t)\}_{t\ge0}$ 是 Banach 空间 X 上的一个 C_0-半群。若 $t>t_0>0$ 时，$T(t)$ 为紧算子，$T(t)$ 为紧算子，则称 $T(t)$ 是 $t>t_0$ 的紧半群。若 $T(t)$ 是 $t>0$ 的紧半群，则称 $T(t)$ 是紧半群。

定义 2.6 [16] 设 X 是 Banach 空间。映射 $\beta:P_b(X)\to R^+$ 称为空间 X 中的非紧性测度(MNC，简写)，

如果对每个$\Omega \in P_b(X)$，$\beta(\overline{co}\Omega)=\beta(\Omega)$。

特别地，一个非紧性测度β称为：

(i) 单调的，如果$\Omega_1,\Omega_2 \in P_b(X)$，$\Omega_1 \subseteq \Omega_2$得到$\beta(\Omega_1) \le \beta(\Omega_2)$；

(ii) 非奇异的，如果对每个$a \in X$，$\Omega \in P_b(X)$，$\beta(\{a\} \cup \Omega)=\beta(\Omega)$；

(iii) 正则性，如果$\beta(\Omega)=0$则等价于Ω是相对紧的。

显然，$C(J,X)$空间中的有界子集Ω的 Hausdorff MNC 可以写成如下形式

$$\chi_C(\Omega)=\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{|t_1-t_2|\le\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|.$$

这一数量关系称为$\Omega \subset C(J,X)$中的等度连续模且它具有定义 2.3 中的所有性质。

定义 2.7 [16] 设$F: X \to P(X)$为集值函数，如果对任意的$x \in X$，存在$\sigma>0$使得集合$\bigcup_{y\in O_X(x,\sigma)} F(y)$关于弱拓扑$w$是相对紧的，则称$F$是局部弱紧的。

引理 2.2 [16] 设Ω是X的闭凸子集，且$F:\Omega \to P_{cp}(\Omega)$是闭的$\beta$-凝聚的。如果对每个不是相对紧的集合$\Omega \subseteq X$有$\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$。

定义 2.8 [16] 若Ω是X的闭凸子集，且$F:\Omega \to P_{cv,cp}(\Omega)$是闭的$\beta$-凝聚多值映射，其中$\beta$是定义在$\Omega$中的非奇异 MNC，则$FixF := \{x \in \Omega : x \in F(x)\} \ne \varnothing$。

引理 2.3 [16]设Ω是 Banach 空间X的闭子集，且$F: D \to P_{cp}(X)$是一个闭值映射，对于集合D中的每个子集，它是β-凝聚的，其中β在X中是 MNC 单调的。若$FixF$是有界的，则它是紧的。

引理 2.4 [17] 设$F: X \to P(X)$是强弱闭凸的(*i.e.*，若$x_n \to x$在X中和$f_n \to f$弱收敛在Y中关于$f_n \in F(x_n)$，则$f \in F(x)$)局部弱紧多值映射。则F从X映射到Y_w中是 u.s.c.的。

引理 2.5 [18] (Arzela-Ascoli 定理)集合$D \subset C(J,X)$相对紧$\Leftrightarrow D$是一致有界且等度连续的，并且对任意的$t \in J$，$D(t)$在X中相对紧。

引理 2.6 [19] (Bellman 不等式)设K为非负常数，$f(t)$和$g(t)$为区间$\alpha \le t \le \beta$上的非负连续函数，且满足不等式

$$f(t) \le K + \int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s,\quad \alpha \le t \le \beta,$$

则有

$$f(t) \le K\exp\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right).$$

定义 2.9 [20]若函数$x \in C(J,X)$满足

(i) $x(0)=x_0$，

(ii) 存在$f \in L^p(J,X)$，$f(t) \in F(t,x(t))$，使得

$$x(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s,\quad t\in J, \tag{2.1}$$

则称x是 Cauchy 问题(1.3)的 mild 解。

3. 主要定理

本节我们引入如下假设条件：

(HA)算子A生成一个紧半群$\{S(t), t \ge 0\}$。

$(HB)_1$ 映射 $B: J\times X\to L(Y,X)$ 使得

(1) 对任意的 $x\in X$，映射 $t\mapsto B(t,x)$ 是可测的；

(2) 对 $a.e.\, t\in J$，映射 $x\mapsto B(t,x)$ 是连续的；

(3) 存在一个函数 $a_1\in L^{\infty}(J,R^+)$ 使得

$$\|B(t,x)\|\le a_1(t),\quad a.e.\, t\in J .$$

$(HF)_1$ 集值映射 $F: J\times X\to P_{cl,cv}(X)$ 使得：

(1) 对任意的 $x\in X$，$t\to F(t,x)$ 是可测的；

(2) 对 $a.e.\, t\in J$，$F(t,\cdot)$ 有一个强－弱闭图；

(3) 存在一个常数 $c_2>0$ 和一个函数 $a_2\in L^p(J,R^+)\left(p>\frac{1}{\alpha}\right)$ 使得

$$\|F(t,x)\|:=\sup\{\|f\|: f\in F(t,x)\}\le a_2(t)+c_2\|x\|,$$
$$a.e.\, t\in J,\quad \forall x\in X .$$

注 1 集值映射 $F: J\times X\to P(X)$ 使得，对 $a.e.\, t\in J$，$F(t,\cdot): X\to P(X)$ 有一个强－弱闭图且满足假设条件(HF)(3)，关于第二变量从 X 到 X_w 是上半连续的。事实上，由假设条件(HF) (3)和 Banach 空间 X 的自反性知，对于 $a.e.\, t\in J$，集值映射 $F(t,\cdot)$ 是局部弱紧的，从而由引理 2.2 知，集值映射 $F(t,\cdot)$ 关于第二个变量从 X 到 X_w 是上半连续的。

由假设条件(HF) (1)~(3)和注 1，合成集值算子：

$$N_F^p: C(J,X)\to P\left(L^p(J,X)\right),$$
$$N_F^p(x)=\left\{f\in L^p(J,X): f(t)\in F\left(t,x(t)\right)\ a.e.\, t\in J\right\}$$

是有定义的(见文献[21])。

问题(1.3)所有 mild 解组成的集合定义为

$$\Psi(x)=\left\{x\in C(J,X): x(t)=S\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(x)\right)u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s\right\}.$$

定理 3.1 给定一个控制函数 $u\in L^p(J,Y)\left(p>\frac{1}{\alpha}\right)$，如果假设条件(HA)，(HB)，(HF)成立，则问题(1.3)的 mild 解集 $\Psi(x)$ 是非空的且在空间 $C(J,X)$ 上是紧的。

证明： 根据问题(1.3)mild 解的基本定义(见定义 2.9)，定义集值映射 $Q: C(J,X)\to P\left(C(J,X)\right)$ 如下：

$$Q(x)=\left\{y\in C(J,X): y(t)=S\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(x)\right)u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s\right\} \tag{3.1}$$

其中 $f\in N_F^p(x)$。根据算子 Q 的定义，建立 mild 解集 $\Psi(x)$ 的非空性和紧性等价于不动点集合 Q 的非空性和紧性。为此，考虑算子 Q 在 Banach 空间 $C(J,X)$ 上赋予加权函数 $\|x\|_C^*=\sup\limits_{t\in J}\mathrm{e}^{\lambda t}\|x\|$ 的情况，其中 λ 足够大使得

$$\lambda>\frac{(Mc_2)^p\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{p-1}b^{\alpha p-1}}{p}, \tag{3.2}$$

且将证明的主要步骤分成以下五步：

第一步：对于每一个 $x\in C(J,X)$，有 $Q(x)\in P_{cv,cp}(C(J,X))$。

显然，对任意的 $x\in C(J,X)$，由 N_F^p 的凸性知 $Q(x)$ 是凸的。接下来需要验证 $Q(x)$ 的紧性。首先，对于任意的 $x\in C(J,X)$，可以找到 $f\in N_F^p$ 使得

$$y(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s,t\in J.$$

由条件(HB) (3)，(HF) (3)及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\|y(t)\|&\le\left\|S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\int_0^t s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\|B(s,x(s))u(s)\|+\|f(s)\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+M\int_0^t s^{\alpha-1}\left(a_1(s)\|u(s)\|+a_2(s)+c_2\|x\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+M\int_0^t s^{\alpha-1}\left(a_1(s)\|u(s)\|+a_2(s)+c_2\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{e}^{\lambda s}\|x(s)\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+Mb^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+\frac{Mc_2b^\alpha\|x\|_C^*}{\alpha}.\end{aligned}$$

这意味着 $Q(x)$ 对于每一个 $x\in C(J,X)$ 在 $C(J,X)$ 上是有界的。同时，下证 $Q(x)$ 对任意的 $x\in C(J,X)$ 是一族等度连续函数。为此，讨论下面两种情形。

情形(I)：若 $t_1=0$ 且 $0<t_2\le\varepsilon_0$， $\varepsilon_0>0$ 足够小，则由 Hölder 不等式和 $S(t)$ 的紧性可得

$$\begin{aligned}&\|y(t_2)-y(t_1)\|\\&\le\left\|\left(S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)-I\right)x_0\right\|+\int_0^{t_2}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\|B(s,x(s))u(s)\|+\|f(s)\|\right)\mathrm{d}s\\&\le\left\|\left(S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)-I\right)x_0\right\|+Mt_2^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+\frac{Mc_2\|x\|_C^*t_2^\alpha}{\alpha},\end{aligned}$$

这表明当 $0<t_2\le\varepsilon_0\to0$ 时， $\|y(t_2)-y(t_1)\|$ 时一致地趋向于零。

情形(II)：若 $\frac{\varepsilon_0}{2}<t_1<t_2\le b$，其中 $\varepsilon_0>0$ 足够小，则

$$\begin{aligned}&\|y(t_2)-y(t_1)\|\\&\le\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0-S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\left\|\int_0^{t_2}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s\right\|\\&-\left\|\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\right\|\\&\le\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0-S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\left\|\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}\left[S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right]-\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]ds\right\|\\&+\left\|\int_{t_1}^{t_2}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\right\|\\&:=\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3\end{aligned}$$

$$\Lambda_2 \le \int_0^{t_1-\delta} s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right) - S\left(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\left\|B\left(s,x(s)\right)u(s)\right\| + \left\|f(s)\right\|\right)\mathrm{d}s$$

$$+\int_{t_1-\delta}^{t_1} s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right) - S\left(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\left\|B\left(s,x(s)\right)u(s)\right\| + \left\|f(s)\right\|\right)\mathrm{d}s$$

$$\le \sup_{s\in[0,t_1-\delta]}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right) - S\left(\frac{t_1^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left[\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p} + \|a_2\|_{L^p}\right)\times(t_1-\delta)^{\alpha-\frac{1}{p}} + \frac{c_2\|x\|_C^*}{\alpha}(t_1-\delta)^\alpha\right]$$

$$+2M\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p} + \|a_2\|_{L^p}\right)\left(t_1^{\alpha-\frac{1}{p}} - (t_1-\delta)^{\alpha-\frac{1}{p}}\right) + \frac{2Mc_2\|x\|_C^*}{\alpha}\left(t_1^\alpha - (t_1-\delta)^\alpha\right)$$

$$\Lambda_3 \le M\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p} + \|a_2\|_{L^p}\right)\left(t_2^{\alpha-\frac{1}{p}} - t_1^{\alpha-\frac{1}{p}}\right) + \frac{Mc_2\|x\|_C^*}{\alpha}\left(t_2^\alpha - t_1^\alpha\right).$$

由于 $S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ 是强连续的，所以

$$\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0 - S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\| \to 0,\left(t_2 - t_1 \to 0\right).$$

所以 $\Lambda_1 \to 0$。再结合估计式 Λ_2，Λ_3，可见当 $t_2 \to t_1$ 及 $\delta \to 0$ 时，$\left\|y(t_2) - y(t_1)\right\|$ 一致地趋于零。因此，可以得出集合 $Q(x)$ 在 $C(J,X)$ 上是等度连续的。另外，需要证明 $E(t) := \left\{y(t): y\in Q(x), x\in C(J,X)\right\}$ 在 X 上是相对紧的。若 $t=0$，有 $E(0) := \left\{y(0): y\in Q(x), x\in C(J,X)\right\} = \{x_0\}$ 相对紧。固定 $0<t\le b$，对任意的 $\delta\in(0,t)$ 和 $\varepsilon>0$，定义

$$Q_{\delta,\varepsilon}(x) = \left\{y_{\delta,\varepsilon}\in C(J,X): y_{\delta,\varepsilon}(t) = S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0 + \int_0^{t-\varepsilon} s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(s)\right)u(s) + f(s)\right]\mathrm{d}s\right\}$$

其中 $f\in N_F^p(x)$。

则对任意的 $y_{\delta,\varepsilon}\in Q_{\delta,\varepsilon}(x)$，有

$$\begin{aligned} y_{\delta,\varepsilon}(t) &= S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0 + \int_0^{t-\varepsilon} s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(s)\right)u(s) + f(s)\right]\mathrm{d}s \\ &= S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0 + S\left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)\int_0^{t-\varepsilon} s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha} - \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(s)\right)u(s) + f(s)\right]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

由 $S\left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)$ 的紧性可知，集合 $E_{\delta,\varepsilon}(t) := \left\{y_{\delta,\varepsilon}(t): y\in Q_{\delta,\varepsilon}(x)\right\}$ 在 X 上是相对紧的。

进一步，对任意的 $y\in Q(x)$，有

$$\begin{aligned} &\left\|y(t) - y_{\delta,\varepsilon}(t)\right\| \\ &= \left\|\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(s)\right)u(s) + f(s)\right]\mathrm{d}s - \int_0^{t-\varepsilon} s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B\left(s,x(s)\right)u(s) + f(s)\right]\mathrm{d}s\right\| \\ &\le \int_{t-\varepsilon}^t s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\left\|B\left(s,x(s)\right)u(s)\right\| + \left\|f(s)\right\|\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\leq M\int_{t-\varepsilon}^{t} s^{\alpha-1}\left(a_1(s)\|u(s)\|+a_2(s)+c_2\|x\|\right)\mathrm{d}s$$

$$\leq M\left(t^{\alpha-\frac{1}{p}}-(t-\varepsilon)^{\alpha-\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+\frac{Mc_2\|x\|_C^*\left(t^\alpha-(t-\varepsilon)^\alpha\right)}{\alpha}$$

$$\to 0, \varepsilon\to 0.$$

因此，集合 $E(t)$ 在 X 上是相对紧的。于是，由 Ascoli-Arzela 定理可知，$Q(x)$ 对每一个 $x\in C(J,X)$ 是相对紧的。最后，为了完成这一步的证明，还需要验证 $Q(x)$ 是一个闭集。为此，假设序列 $\{y_n\}_{n\geq 1}\subset Q(x)$ 且 $y_n\to y, n\to\infty$。由序列 $\{y_n\}_{n\geq 1}\subset Q(x)$ 知存在一个序列 $\{f_n\}_{n\geq 1}\in N_F^p(x)$ 使得

$$y_n(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f_n(s)\right]\mathrm{d}s,\ t\in J.$$

由假设条件(HF)(3)，序列 $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^p(J,X)$ 是弱相对紧的。从而，可假设在 $L^p(J,X)$ 中，$f_n\xrightarrow{弱} f\in N_F^p(x)$，其中 $f\in N_F^p(x)$ 由 N_F^p 的上半连续性而得。

另一方面，$S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)$ 对于 $t>0$ 的紧性意味着

$$y_n(t)\to S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x(s))u(s)+f(s)\right]\mathrm{d}s.$$

这表明 $y\in Q(x)$，即 $Q(x)$ 是一个闭集。由上面的证明就得到了 $Q(x)\in P_{cv,cp}(C(J,X))$。

第二步：Q 是一个闭集值映射。

设在空间 $C(J,X)$ 上，$x_n\to x_*$ 且 $y_n\to y_*$ 以及 $y_n\in Q(x_n)$。事实上，由 $y_n\in Q(x_n)$ 可知存在 $f_n\in N_F^p(x_n)$ 使得

$$y_n(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x_n(s))u(s)+f_n(s)\right]\mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

由假设条件(HF) (3)，可得 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 在 $L^p(J,X)$ 上是有界的。因此，可以假设

$$在 L^p(J,X) 中，\ f_n\xrightarrow{弱} f_*。 \tag{3.4}$$

由(3.3)式，(3.4)式以及 $S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)$ 的紧性，可得

$$y_n(t)\to S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\left[B(s,x_*(s))u(s)+f_*(s)\right]\mathrm{d}s. \tag{3.5}$$

由于在空间 $C(J,X)$ 上 $y_n\to y_*$ 且 $f_n\in N_F^p(x_n)$，则由假设(HF)(2)和(3.5)式，得到 $f_*\in N_F^p(x_*)$。因此，就证明了 $y_*\in Q(x_*)$，该步的证明完成。

第三步：Q 是 χ_C-凝聚的。

反设 $D\in P_b(C(J,X))$ 不是 $C(J,X)$ 上的相对紧子集，使得 $\chi_C(D)\leq\chi_C(Q(D))$。由于 $D\subset C(J,X)$ 是一个有界集，则由类似于第一步的证明，容易验证 $Q(D)$ 是相对紧的，即 $\chi_C(Q(D))=0$。因此，$\chi_C(D)\leq\chi_C(Q(D))=0$。于是由 χ_C 的正则性知 D 是相对紧的，矛盾。所以 Q 是 χ_C-凝聚的。

第四步：存在一个常数 $R>0$ 使得

$$Q\left(\overline{B}_R\right)\subset\overline{B}_R:=\left\{y\in C(J,X):\|y\|_C^*\le R\right\}\subset C(J,X).$$

为了得到这一步的证明，选取

$$R>\frac{M\|x_0\|+Mb^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)}{1-Mc_2\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}b^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

则对任意的 $y\in Q(x)$，有

$$\begin{aligned}\|y(t)\|&\le\left\|S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\int_0^t s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\|B(s,x(s))u(s)\|+\|f(s)\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+Mb^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+Mc_2R\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}b^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&<R.\end{aligned}$$

从而定义 2.8 的所有条件均被满足。于是由定义 2.8 可知 Q 至少有一个不动点。此不动点也是问题(1.3)的一个 mild 解，即 $\Psi(x)$ 是非空的。

第五步：mild 解集 $\Psi(x)$ 的紧性。

正如之前的证明，将问题(1.3)的 mild 解集 $\Psi(x)$ 与定义在(3.1)式的集值映射 $Q:C(J,X)\to P_{cl,cv}\left(C(J,X)\right)$ 的不动点联系在一起。因此需要验证集合 $FixQ$ 的紧性。为此只需验证引理 2.3 的所有条件并用 Q 代替其中的 F 即可。

注意到第二步已经验证了(3.1)式所定义的集值算子 Q 是闭的，且第三步已经证明了 Q 是一个 χ_C -凝聚算子。为了运用引理 2.3，还需要验证 $FixQ$ 在 $C(J,X)$ 上是有界的。事实上，对任意的 $x\in Q(x)$ 和所有的 $t\in J$，根据假设条件(HA)、(HB)、(HF)及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&\le\left\|S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\int_0^t s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\left(\|B(s,x(s))u(s)\|+\|f(s)\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+M\int_0^t s^{\alpha-1}\left(a_1(s)\|u(s)\|+a_2(s)+c_2\|x\|\right)\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+M\left(\int_0^t\left(s^{\alpha-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+Mc_2\int_0^t s^{\alpha-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s\\&\le M\|x_0\|+Mb^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)+Mc_2\int_0^t s^{\alpha-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s\\&\le K+Mc_2\int_0^t s^{\alpha-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $K\le M\|x_0\|+Mb^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p\alpha-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|a_1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}+\|a_2\|_{L^p}\right)$。则由 Bellman 不等式，可得 $\|x(t)\|\le R_1$，其中 $R_1:=K\mathrm{e}^{\frac{Mc_2b^\alpha}{\alpha}}$。

从而 $\|x\|_C^*=\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|\le\mathrm{e}^{\lambda b}K\mathrm{e}^{\frac{Mc_2b^\alpha}{\alpha}}$。于是引理 2.3 的所有条件都满足。所以由引理 2.3 可得，问题(1.3)

的解集 $\Psi(x)$ 在 $C(J,X)$ 上是紧的。

4. 结论

本文讨论了 Banach 空间中一类 Conformable 分数阶发展包含解的存在性以及解集的紧性，首先给出了 Conformable 分数阶发展包含 mild 解的表达形式，其次在紧半群情形下利用凝聚映射的不动点定理证明了系统(1.3)mild 解的存在性以及解集的紧性。

参考文献

[1] Henderson, J. and Ouahab, A. (2009) Fractional Functional Differential Inclusions with Finite Delay. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 2091-2105. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.111

[2] Cernea, A. (2014) On a Fractional Integro-Differential Inclusion. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **25**, 1-11. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.25

[3] Ahmad, B. and Ntouyas, S.K. (2012) A Note on Fractional Differential Equations with Fractional Separated Boundary Conditions. *Abstract and Applied Analysis*, **15**, 363-383. https://doi.org/10.1155/2012/818703

[4] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M. (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002

[5] Yang, H. (2021) Approximate Controllability of Sobolev Type Fractional Evolution Equations of Order $\alpha \in (1,2)$ via Resolvent Operator. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **11**, 2981-3000.

[6] Lian, T., Fan, Z. and Li, G. (2018) Time Optimal Controls for Fractional Differential Systems with Riemann-Liouville Derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **21**, 1524-1541. https://doi.org/10.1515/fca-2018-0080

[7] Abdeljawad, T. (2015) On Conformable Fractional Calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **279**, 57-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016

[8] Birgani, O.T., Chandok, S., Dedovic, N. and Radenovic, S. (2019) A Note on Some Recent Results of the Conformable Fractional Derivative. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*, **3**, 11-17. https://doi.org/10.31197/atnaa.482525

[9] El-Ajou, A. (2020) A Modification to the Conformable Fractional Calculus with Some Applications. *Alexandria Engineering Journal*, **59**, 2239-2249. https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.003

[10] Wang, X., Wang, J. and Fečkan, M. (2020) Controllability of Conformable Differential Systems. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **25**, 658-674. https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.18135

[11] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer.

[12] 周鸿兴, 王连文. 线性算子半群理论及应用[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1994.

[13] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题的整体解[J]. 应用泛函分析学报, 2001, 3(4): 339-347.

[14] He, J.W., Liang, Y., Ahmad, B. and Zhou, Y. (2019) Nonlocal Fractional Evolution Inclusions of Order $\alpha \in (1,2)$. *Mathmatics*, **7**, Article 209.

[15] Xiang, Q. and Zhu, P. (2019) Approximate Controllability of Fractional Delay Evolution Inclusions with Noncompact Semigroups. *Optimization*, **69**, 553-574. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1625350

[16] Kamemskii, R.N., Obukhovskii, V.V. and Zecca, P. (2001) Condensing Multivalued Maps and Semi-Linear Differential Inclusions in Banach Space. Walter de Gruyter.

[17] Benedetti, I., Loi, N.V. and Malaguti, L. (2014) Nonlocal Problems for Differential Inclusions in Hilbert Spaces. *Set-Valued and Variational Analysis*, **22**, 639-656. https://doi.org/10.1007/s11228-014-0280-9

[18] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2005.

[19] Alqifiary, Q.H. and Jung, S. (2014) On the Hyers-Ulam Stability of Differential Equations of Second Order. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, 1-8. https://doi.org/10.1155/2014/483707

[20] Liang, Y. (2023) Optimal Controls for a Class of Conformable Fractional Evolution Systems. *Fractal and Fractional*, **7**, Article 640. https://doi.org/10.3390/fractalfract7090640

[21] Benedetti, I., Malaguti, L. and Taddei, V. (2012) Semi-Linear Evolution Equations in Abstract Spaces and Applications. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste*, **44**, 371-388.