Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 128-137
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412414

Hans汉斯

局部共形平坦黎曼流形上特征值的一些估计

朱　钦

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2024年11月5日；录用日期：2024年12月6日；发布日期：2024年12月26日

摘　要

利用黎曼几何的热核性质和局部共形平坦黎曼流形上的Sobolev不等式，得到了局部共形平坦黎曼流形上高阶特征值的一个估计。并且通过相关特征值不等式给出了局部共形平坦黎曼流形上Schrödinger算子的特征值的个数的一个上界估计。

关键词

局部共形平坦黎曼流形，特征值估计，Sobolev不等式，Schrödinger算子

Some Estimates of Eigenvalues on Locally Conformally Flat Riemannian Manifolds

Qin Zhu

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Nov. 5th, 2024; accepted: Dec. 6th, 2024; published: Dec. 26th, 2024

Abstract

Using the thermal kernel property of Riemann geometry and the Sobolev inequality on a locally conformally flat Riemannian manifold, we obtained an estimate for high-order eigenvalues on such a manifold. And using the correlated eigenvalue gives an upper bound of the number of eigenvalues of Schrödinger operators on a locally conformally flat Riemannian manifold.

Keywords

Locally Conformally Flat Riemannian Manifold, Eigenvalue Estimate, Sobolev Inequality, Schrödinger Operator

文章引用: 朱钦. 局部共形平坦黎曼流形上特征值的一些估计[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 128-137.
DOI: 10.12677/pm.2024.1412414

1. 引言

1867 年，Beltrami 介绍了黎曼流形上的一类 2 阶椭圆算子[1]，其定义为 Δ =div ◦ grad，是 R^n 上的 Laplace 算子的推广，称之为 Laplace-Beltrami 算子(一般简称为 Laplace 算子)。这个算子在数学物理中被广泛应用，比如在微分几何、偏微分方程、概率论、势论等方面。同时，在一些研究物理现象的微分方程(比如 Laplace 方程、极小曲面等)中应用广泛。对于任意给定的黎曼流形，具体描述其 Laplace 算子的谱并不容易。因此，很多研究者感兴趣的是紧致黎曼流形(带边或不带边)和非紧致完备黎曼流形中有界区域上关于 Laplace 算子的谱性质，比如谱比较定理、Laplace 算子的不同类型特征值估计。在黎曼流形上的 Laplace 算子特征值问题研究中，学者最主要感兴趣的是 Laplace 算子的特征值估计，主要涉及 Laplace 算子第一特征值上下界的估计，高阶特征值的估计与特征值间隙的估计等三个方面。本文主要想研究 Dirichlet 边界条件下的 Laplace 特征值问题中的高阶特征值的估计，以下是已有的一些相关研究。

设 Ω 是 R^n 中有界带边区域，众所周知，Ω 上 Dirichlet 特征值问题有实的离散的谱：

$$0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots\to\infty.$$

著名的 Weyl 渐进公式为

$$\lambda_k(\Omega)\sim C_n\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}},\quad \text{as}\quad k\to\infty,$$

其中 $C_n=\left(4\pi^2\right)\omega_n^{-\frac{2}{n}}$ 并且 $\omega_n=vol\left(\mathbb{S}^n\right)$。基于这个公式，Pólya [2]证明了当 $n=2$ 且 Ω 是 R^2 中嵌入区域时，有

$$\lambda_k(\Omega)\ge C_n\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}},\quad k=1,2,\cdots.$$

通过上述结果，Pólya 猜测以上的特征值不等式对 R^n 中的有界区域都成立。

对于有界区域 $\Omega\subset R^n$，Li-Yau [3]证明了不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\ge\frac{nkC_n}{n+2}\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

其中 λ_k 是带 Dirichlet 边界条件的 Ω 上的第 k 个特征值。

从渐进公式来看，Li-Yau 的不等式是最接近 Pólya 猜想的结果，因为它可以推出

$$\lambda_k\ge\frac{nC_n}{n+2}\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

在过去 30 年中，在推广欧几里得空间中有界域的高阶特征值的下界估计方面已经有一些进展，可以参考[4]-[8]。例如 Cheng, Li and Yau [6]得到，如果 M 是非正常曲率完备单连通空间形式中的 n 维紧致带边极小子流形，则有

$$\lambda_k \geq 4\pi \mathrm{e}^{-\frac{2}{n}}\left(\frac{k}{vol(M)}\right)^{\frac{2}{n}}$$

其中 λ_k 是 M 上 Dirichlet 第 k 个 Dirichlet 特征值。但 Pólya 猜想至今仍是开放的。

最近，通过使用黎曼几何中热核的性质和比较定理，Xu-Xu [9]证明了当 M 是 Cartan-Hadamard 流形中的紧致带边极小子流形时，则有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(M) \geq \frac{2kn\pi}{e}\left(\frac{k}{vol(M)}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

特别地，

$$\lambda_k \geq \frac{2n\pi}{e}\left(\frac{k}{vol(M)}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

受到上述结果的启发，我们研究局部共形平坦黎曼流形上的特征值问题。如果一个 n 维黎曼流形 (M^n, g) 容许一个坐标覆盖 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ 使得映射 $\phi_\alpha : (U_\alpha, g_\alpha) \to (S^n, g_0)$ 是一个共形映射，其中 g_0 是 S^n 上的标准度量，则称 n 维黎曼流形是局部共形平坦的。Sobolev 不等式是几何分析中一个重要工具，不同曲率条件下的 Sobolev 常数估计已有很长的历史，Sobolev 常数的估计通常依赖于体积比较定理，因此它与流形的曲率密切相关。我们利用局部共形平坦黎曼流形上的 Sobolev 不等式和热核方法，我们得到了局部共形平坦黎曼流形上的一个高阶特征值的估计。关于局部共形平坦黎曼流形特征值估计的更多结果可以参考文献[10]-[12]。

1.1. 定理 1

设 M^n 是 $n(n \geq 3)$ 维单连通的、局部共形平坦的完备黎曼流形，并且 $R \leq 0$ 或 $\int_M |R|^{\frac{n}{2}} < \infty$。令 Ω 是 M 的一个紧致区域，则 Ω 上的第 k 个 Dirichlet 特征值满足

$$\lambda_k(\Omega) \geq \frac{1}{e\tilde{S}}\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{1.1}$$

其中 $\tilde{S}$ 是不等式(2.2)中的 Sobolev 常数。

注：我们可以知道当 $\tilde{S} = Q(\mathbb{S}^n)^{-1}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(e\tilde{S})^{-1}}{C_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4e}}{(4\pi^2)\omega_n^{-\frac{2}{n}}} = \infty$. 因此在 n 充分大的时候，上述估计提供的系数要比 C_n 更精确。

其次，我们考虑 M^n 上 Schrödinger 算子的特征值问题

$$-\Delta\phi(x) + V(x)\phi(x) = \mu\phi(x), \tag{1.2}$$

其中 $V(x)$ 是位势函数。用 V_- 表示 V 的负部，即 $V_- = \max\{0, -V\}$ 当 $V_- \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ 时，算子 $L_V = -\Delta + V$ 在负实轴上有离散的谱。对任意的 $\alpha \leq 0$，用 $N_\alpha(V)$ 表示特征值问题(1.2)的满足 $\mu \leq \alpha$ 的特征值 μ 的个数。特别地，当 $\alpha = 0$ 时，$N_0(V) = IndL_V(M)$ 表示算子 L_V 非正特征值的个数，同时在物理上被视作束缚态的个数，并且 $N_0(V)$ 是有限的。Rosenbljum [13]通过 $(V+\alpha)_-$ 的 $L^{\frac{n}{2}}$ 范数来得到关于 $N_\alpha(V)$ 的估计。与此同时，Cwikel 和 lieb [14]-[16]独立证明了以下不等式

$$C_n N_\alpha(V) \le \int_{R^n} (V+\alpha)_-^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}x.$$

我们通过局部共形平坦黎曼流形上高阶特征值的不等式证明了以下关于算子 L_V 的非正特征值的个数的一个上界估计。

1.2. 定理 2

设 M^n 是 $n(n \ge 3)$ 维单连通的、局部共形平坦的紧致完备黎曼流形，并且 $R \le 0$ 或 $\int_M |R|^{\frac{n}{2}} < \infty$。如果 V 的负部满足 $V_- \in L^{\frac{n}{2}}(M)$，则

$$N_\alpha(V) \le \left(\tilde{S}e\right)^{\frac{n}{2}} \int_M (V-\alpha)_-^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}v, \tag{1.3}$$

其中 $\tilde{S}$ 是不等式(2.2)中的 *Sobolev* 常数。

2. 预备知识

设 (M^n, g) 是完备黎曼流形，用 ∇，Δ 分别表示 M 上的黎曼联络和 Laplace 算子。对于 M 上的热方程，存在热核(即热方程的基本解) $H(x,y,t) \in C^\infty(M, M, \mathbb{R}^+)$，使得对任意 $f \in L^2(M)$ 有 $\left(\mathrm{e}^{-\Delta t} f\right)(x) = \int_M H(x,y,t) f(y)$. 由文献[17]可知黎曼流形上的热核满足：

1) $H(x,y,t) = H(y,x,t)$,
2) $\lim_{t \to 0} H(x,y,t) = \delta_x(y)$,
3) $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) H = 0,$
4) $H(x,y,t) = \int_M H(x,z,t-s) H(z,y,s)\mathrm{d}z.$

若 M 是紧致黎曼流形，ϕ_i 是 M 上的特征函数构成的一组正交基，λ_i 是其对应的特征值，那么热方程的基本解，即热核可以写成

$$H(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y),$$

特别地，

$$\int_M H(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_i t}.$$

我们知道单连通的、局部共形平坦的流形 $M^n (n \ge 3)$ 可以共形浸入到 S^n 上，并且根据 Schoen 和 Yau 的结果[17]，M^n 的 Yamabe 常数满足 $Q(M^n) = Q(\mathbb{S}^n) = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}$, 其中 ω_n 是 R^n 中单位球面的体积。因此对于任意的 $f \in C_0^\infty(M)$ 有以下不等式

$$Q(\mathbb{S}^n)\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} \mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}} \le \int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}v + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} R f^2 \mathrm{d}v. \tag{2.1}$$

由 Lin [18]，我们可以从上式得到以下的 L^2-Sobolev 不等式。

引理 1

设 M^n 是 $n(n \ge 3)$ 维单连通的、局部共形平坦的完备黎曼流形，并且 $R \le 0$ 或 $\int_M |R|^{\frac{n}{2}} < \infty$。则对于某个

常数 $\tilde{S}>0$ 有以下 L^2-Sobolev 不等式成立

$$\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}} \le \tilde{S}\int_M |\nabla f|^2\mathrm{d}v, \quad \forall f\in C_0^\infty(M), \tag{2.2}$$

其中当 $R\le 0$ 时，$\tilde{S}=Q(\mathbb{S}^n)^{-1}$.

证明：当 $R\le 0$ 时，由于式(2.1)右侧第二项为负，可直接得到

$$Q(\mathbb{S}^n)\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}} \le \int_M |\nabla f|^2\mathrm{d}v.$$

当 $\int_M |R|^{\frac{n}{2}}<\infty$ 时，在 Carron [19]中的定理 A 证明了对某个常数 C(n,M)成立

$$C(n,M)\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}} \le \int_M |\nabla f|^2\mathrm{d}v, \forall f\in C_0^\infty(M). \ \square$$

3. 定理 1 的证明

定理 1 的证明：由热核的半群性质和对称性，有

$$H(x,x,2t)=\int_\Omega H^2(x,y,t)\mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

两边同时微分得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(x,x,2t) &= 2\int_\Omega H(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}H(x,y,t)\mathrm{d}y \\ &= 2\int_\Omega H(x,y,t)\Delta H(x,y,t)\mathrm{d}y \\ &= -2\int_\Omega |\nabla H(x,y,t)|^2\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{3.2}$$

利用引理 1 中的 Sobolev 不等式，我们有

$$\int_\Omega |\nabla H(x,y,t)|^2\mathrm{d}y \ge \frac{1}{\tilde{S}}\left(\int_\Omega |H(x,y,t)|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3.3}$$

另一方面，通过 Hölder 不等式和 $\int_\Omega H(x,y,t)\mathrm{d}y\le 1$ 可以得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega H^2(x,y,t)\mathrm{d}y &\le \left(\int_\Omega |H(x,y,t)|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}}\left(\int_\Omega |H(x,y,t)|\right)^{\frac{4}{n+2}} \\ &\le \left(\int_\Omega |H(x,y,t)|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

将式(3.3)和式(3.4)代入式(3.2)，结合式(3.1)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,x,2t) \le -\frac{2}{\tilde{S}}H^{\frac{n+2}{n}}(x,x,2t),$$

整理得

$$\frac{\partial}{\partial r}H^{-\frac{2}{n}}(x,x,r) \ge \frac{2}{n\tilde{S}}. \tag{3.5}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.1412414

对上式两边积分得

$$H^{-\frac{2}{n}}(x,x,t)-H^{-\frac{2}{n}}(x,x,\epsilon)\geq\frac{2}{n\tilde{S}}(t-\epsilon). \tag{3.6}$$

由文献[17]可知

$$H(x,x,\epsilon)\sim(4\pi\epsilon)^{-\frac{n}{2}},$$

因此

$$\lim_{\epsilon\to0}H(x,x,\epsilon)=0. \tag{3.7}$$

结合式(3.6)和式(3.7)，有

$$H(x,x,t)\leq\left(\frac{2}{n\tilde{S}}t\right)^{-\frac{n}{2}}. \tag{3.8}$$

对于任意的 $k\leq1$，利用平均值不等式和迹公式可以得到

$$\begin{aligned}k\left[\exp\left(-t\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\right]^{\frac{1}{k}}&\leq\sum_{i=1}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\\&=\int_{\Omega}H(x,x,t)\mathrm{d}x\\&\leq\left(\frac{2}{n\tilde{S}}t\right)^{-\frac{n}{2}}vol(\Omega).\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\geq-\frac{k}{t}ln\left[\frac{vol(\Omega)}{k}\left(\frac{2}{n\tilde{S}}t\right)^{-\frac{n}{2}}\right],\quad\forall t>0, \tag{3.9}$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\geq\max_{t>0}\left\{-\frac{k}{t}ln\left[\frac{vol(\Omega)}{k}\left(\frac{2}{n\tilde{S}}t\right)^{-\frac{n}{2}}\right]\right\}, \tag{3.10}$$

并且式(3.10)的右边在 $t=\dfrac{ne\tilde{S}vol(\Omega)^{\frac{2}{n}}}{2k^{\frac{2}{n}}}$ 处达到最大值。因此可以得到

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\geq\frac{k}{e\tilde{S}}\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{3.11}$$

特别地，我们有

$$\lambda_k\geq\frac{1}{e\tilde{S}}\left(\frac{k}{vol(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}}.\quad\square$$

4. 定理 2 的证明

为了证明定理 2，利用参考文献[9]中类似的方法，我们可以证明以下引理。

引理 2

设 M^n 是 $n(n\geq 3)$ 维单连通的、局部共形平坦的紧致完备黎曼流形，并且 $R\leq 0$ 或 $\int_M |R|^{\frac{n}{2}}<\infty$ 。令 $q(x)$ 是 M 上的一个正函数，并且 μ_k 是以下问题的第 k 个特征值

$$\begin{cases}\Delta\phi(x)=-\mu q(x)\phi(x), & x\in M,\\ \phi(x)=0, & x\in\partial M,\end{cases}\tag{4.1}$$

则

$$\mu_k^{\frac{n}{2}}\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}v\geq k\left(\tilde{S}e\right)^{-\frac{n}{2}},\tag{4.2}$$

其中 $\tilde{S}$ 是不等式(2.2)中的 *Sobolev* 常数。

证明： 令 $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是一组满足方程 $\Delta\phi_i(x)=-\mu q(x)\phi_i(x)$ 的关于新度量 $q(x)dv$ 的正交特征函数，则抛物型算子 $\frac{\Delta}{q}-\frac{\partial}{\partial t}$ 的热核满足

$$H(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu_i t}\phi_i(x)\phi_i(y),\tag{4.3}$$

并且该热核满足以下性质

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta_x H(x,y,t)}{q(x)}=\dfrac{\partial H(x,y,t)}{\partial t}, & t>0,x,y\in M,\\ H(x,y,t)=0, & x,y\in\partial M.\end{cases}\tag{4.4}$$

定义函数 $h(t)$ 为

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_M\int_M H^2(x,y,t)q(x)q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\mu_i t}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

对式(4.5)两边同时微分，并利用散度定理可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(t)}{\partial t}&=2\int_M\int_M H(x,y,t)q(x)q(y)\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=2\int_M\int_M H(x,y,t)q(x)\Delta_y H(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &=-2\int_M q(x)\int_M\left|\nabla_y H(x,y,t)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.6}$$

另一方面，对 $h(t)$ 使用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_M q(x)\int_M H^2(x,y,t)q(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\leq\int_M q(x)\left(\int_M H^{\frac{2n}{n-2}}(x,y,t)\mathrm{d}y\right)^{\frac{n-2}{n+2}}\left(\int_M H(x,y,t)q^{\frac{n+2}{4}}(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{4}{n+2}}\mathrm{d}x\\ &\leq\left[\int_M q(x)\left(\int_M H^{\frac{2n}{n-2}}(x,y,t)\mathrm{d}y\right)^{\frac{n-2}{n}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{n}{n+2}}\times\left[\int_M q(x)\left(H(x,y,t)q^{\frac{n+2}{4}}(y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{n+2}}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

为了估计式(4.7)右边的第二项，我们令

$$Q(x,t)=\int_M H(x,y,t)q^{\frac{n+2}{4}}(y)\mathrm{d}y,$$

其满足

$$\frac{\Delta_x Q(x,t)}{q(x)}=\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t},$$

并且对于 $t>0$， $x\in\partial M$ 有 $Q(x,t)=0$。因为 $\lim\limits_{t\to 0}H(x,y,t)=\delta_x(y)$，所以

$$\begin{aligned}Q(x,0)&=\lim_{t\to 0}\int_M H(x,y,t)q^{\frac{n-2}{4}}(y)q(y)\mathrm{d}y\\&=\int_M \delta_x(y)q^{\frac{n-2}{4}}(y)q(y)\mathrm{d}y\\&=q^{\frac{n-2}{4}}(x).\end{aligned}$$

由 $Q(x,t)$ 满足的性质和散度定理得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_M Q^2(x,t)q(x)\mathrm{d}x&=2\int_M Q(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}q(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_M Q(x,t)\Delta_x Q(x,t)\mathrm{d}x\\&=-2\int_M\left|\nabla_x Q(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\\&\le 0,\end{aligned}\tag{4.8}$$

故由式(4.8)可以推出

$$\begin{aligned}\int_M Q^2(x,t)q(x)\mathrm{d}x&\le\int_M Q^2(x,0)q(x)\mathrm{d}x\\&=\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.9}$$

结合式(4.6)，(4.7)，(4.9)，并使用引理 1 中的式(2.2)，则可以得到

$$\begin{aligned}h^{\frac{n+2}{n}}(t)&\le\left(\int_M q(x)\left(\int_M H^{\frac{2n}{n-2}}(x,y,t)\mathrm{d}y\right)^{\frac{n-2}{n}}\mathrm{d}x\right)\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n}}\\&\le\left(\tilde{S}\int_M q(x)\int_M\left|\nabla_y H(x,y,t)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n}}\\&=-\frac{\tilde{S}}{2}\frac{\partial h(t)}{\partial t}\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n}}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

对式(4.10)进行移项再积分，因此有

$$\begin{aligned}\int_0^t h^{-\frac{n+2}{n}}(s)\frac{\partial h(s)}{\partial s}\mathrm{d}s&\le-\frac{2}{\tilde{S}}\int_0^t\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{2}{n}}\mathrm{d}s\\&=-\frac{2t}{\tilde{S}}\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{2}{n}}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

进一步将式(4.11)左侧写成

$$-\frac{n}{2}h^{-\frac{2}{n}}(t)-\left(-\frac{n}{2}\lim_{s\to 0}h^{-\frac{2}{n}}(t)\right)\le -\frac{2t}{\tilde{S}}\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{2}{n}}.$$

因为 $\lim_{t\to 0}h^{-\frac{2}{n}}(t)=0$，所以我们由上式可知

$$\begin{aligned}h(t)&\le\left[\frac{4t}{n\tilde{S}}\left(\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\right)^{-\frac{2}{n}}\right]^{-\frac{n}{2}}\\&=\left(\frac{4}{n\tilde{S}}\right)^{-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.12}$$

将式(4.12)代入式(4.5)得

$$ke^{-2\mu_k t}\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\mu_i t}\le\left(\frac{4}{n\tilde{S}}\right)^{-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x.\tag{4.13}$$

令 $t=\frac{n}{4\mu_k}$，我们有

$$ke^{-\frac{n}{2}}\le\left(\tilde{S}\mu_k\right)^{\frac{n}{2}}\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x.\tag{4.14}$$

因此

$$(\mu_k)^{\frac{n}{2}}\int_M q^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}x\ge k\left(\tilde{S}e\right)^{-\frac{n}{2}}.\qquad\square$$

定理 1.2 的证明：根据 $N_0(V)$ 关于位势函数 $V(x)$ 的单调性，我们可以用 $-V_-(x)$ 代替 $V(x)$，从而假设 $V(x)\le 0$。进一步，我们可以用 $L^{\frac{n}{2}}$ 范数中的严格负函数列逼近 $-V_-(x)$，所以我们可以在下面的论证中假设 $V(x)\le 0$。用 $\tilde{N}_\alpha(V)$ 表示以下特征值问题的特征值小于等于 α 的个数

$$\begin{cases}\Delta\varphi(x)=\mu V(x)\varphi(x), & x\in M,\\ \varphi=0, & x\in\partial M.\end{cases}\tag{4.15}$$

因为 Schrӧdinger 方程(1.2)的二次型满足

$$\frac{\int_M|\nabla\phi|^2\mathrm{d}v+\int_M V\phi^2\mathrm{d}v}{\int_M\phi^2\mathrm{d}v}=\frac{\int_M|V|\phi^2\mathrm{d}v}{\int_M\phi^2\mathrm{d}v}\left(\frac{\int_M|\nabla\phi|^2\mathrm{d}v}{\int_M|V|\phi^2\mathrm{d}v}-1\right),\tag{4.16}$$

并且 $\frac{\int_M|V|\phi^2\mathrm{d}v}{\int_M\phi^2\mathrm{d}v}$ 是 Dirichlet 问题(4.15)的二次型。因此上式左侧为非正的子空间的维数等于二次型 $\frac{\int_M|V|\phi^2\mathrm{d}v}{\int_M\phi^2\mathrm{d}v}$ 小于等于 1 的子空间的维数，而后者正是问题(4.15)的二次型。于是我们可以得到 $N_0(V)=\tilde{N}_1(V)$。

若 μ_k 是(4.15)中满足 $\mu_k\le 1$ 的最大特征值，则由引理 2，我们可以得到

$$N_0(V)=\tilde{N}_1(V)=k\le\left(\tilde{S}e\right)^{\frac{n}{2}}\mu_k^{\frac{n}{2}}\int_M|V|^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}v\le\left(\tilde{S}e\right)^{\frac{n}{2}}\int_M V_-^{\frac{n}{2}}(x)\mathrm{d}v.\tag{4.17}$$

对任意的 $\alpha\le 0$，λ 是 $-\Delta+V$ 的一个特征值当且仅当 $\lambda-\alpha$ 是 $-\Delta+(V-\alpha)$ 的一个特征值。因此，由式

(4.17)可以得到

$$N_\alpha(V) \le \left(\tilde{S}e\right)^{\frac{n}{2}} \int_M (V-\alpha)_-^{\frac{n}{2}}(x)\,\mathrm{d}v. \qquad \square$$

基金项目

福建省自然科学基金资助项目(2021J01165)。

参考文献

[1] Beltrami, E. (1867) Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **1**, 329-366. https://doi.org/10.1007/bf02419182

[2] Pólya, G. (1961) On the Eigenvalues of Vibrating Membranes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 419-433. https://doi.org/10.1112/plms/s3-11.1.419

[3] Li, P. and Yau, S. (1983) On the Schrdinger Equation and the Eigenvalue Problem. *Communications in Mathematical Physics*, **88**, 309-318. https://doi.org/10.1007/bf01213210

[4] Cheng, Q. and Yang, H. (2004) Estimates on Eigenvalues of Laplacian. *Mathematische Annalen*, **331**, 445-460. https://doi.org/10.1007/s00208-004-0589-z

[5] Cheng, Q. and Yang, H. (2006) Bounds on Eigenvalues of Dirichlet Laplacian. *Mathematische Annalen*, **337**, 159-175. https://doi.org/10.1007/s00208-006-0030-x

[6] Cheng, S., Li, P. and Yau, S. (1984) Heat Equations on Minimal Submanifolds and Their Applications. *American Journal of Mathematics*, **106**, 1033-1065. https://doi.org/10.2307/2374272

[7] Xia, C. (1999) A Universal Bound for the Low Eigenvalues of Neumann Laplacians on Compact Domains in a Hadamard Manifold. *Monatshefte für Mathematik*, **128**, 165-171. https://doi.org/10.1007/s006050050054

[8] Xia, C. and Xu, H. (2013) Inequalities for Eigenvalues of the Drifting Laplacian on Riemannian Manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **45**, 155-166. https://doi.org/10.1007/s10455-013-9392-y

[9] Xu, Z. and Xu, H. (2020) A Generalization of Pólya Conjecture and Li-Yau Inequalities for Higher Eigenvalues. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, 1-19. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01839-w

[10] Perrone, D. (1982) On the Minimal Eigenvalue of the Laplacian Operator for *p*-Forms in Conformally Flat Riemannian Manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **86**, 103-108. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1982-0663876-8

[11] Tsagas, G. (1985) The Spectrum of the Laplace Operator on Conformally Flat Manifolds. *Annales Polonici Mathematici*, **45**, 55-60. https://doi.org/10.4064/ap-45-1-55-60

[12] Hu, Z., Li, H. and Simon, U. (2008) Schouten Curvature Functions on Locally Conformally Flat Riemannian Manifolds. *Journal of Geometry*, **88**, 75-100. https://doi.org/10.1007/s00022-007-1958-z

[13] Rosenbljum, G.V. (1972) Distribution of the Discrete Spectrum of Singular Operator. *Doklady Akademii Nauk*, **202**, 1012-1015.

[14] Cwikel, M. (1977) Weak Type Estimates for Singular Values and the Number of Bound States of Schrodinger Operators. *The Annals of Mathematics*, **106**, 93-100. https://doi.org/10.2307/1971160

[15] Lieb, E. (1980) The Number of Bound States of One-Body Schrodinger Operators and the Weyl Problem. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **36**, 241-252.

[16] Lieb, E. (1976) Bounds on the Eigenvalues of the Laplace and Schroedinger Operators. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **82**, 751-753. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1976-14149-3

[17] Schoen, R. and Yau, S.T. (1994) Lectures on Differential Geometry. International Press.

[18] Lin, H. (2015) On the Structure of Conformally Flat Riemannian Manifolds. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **123**, 115-125. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.05.001

[19] Carron, G. (1998) Une suite exacte en L2-cohomologie. *Duke Mathematical Journal*, **95**, 343-372. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-98-09510-2