Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 155-161
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412416

Hans汉斯

点数不超过10的区传递2-(v,k,λ)设计

申佳昕，盛业青*

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门

收稿日期：2024年10月31日；录用日期：2024年11月28日；发布日期：2024年12月30日

摘　要

本文决定了所有点数不超过10的非平凡区传递$2\text{-}(v,k,\lambda)$设计，在此情况下，共有41个两两不同构的设计。

关键词

2-设计，自同构群，区传递，点本原，点非本原

Block-Transitive 2-(v,k,λ) Designs with the Number of Points at Most 10

Jiaxin Shen, Yeqing Sheng*

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Oct. 31st, 2024; accepted: Nov. 28th, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

We determine all block-transitive $2\text{-}(v,k,\lambda)$ designs with the number of points $v \le 10$. We find that there are exactly 41 designs satisfying the condition, up to isomorphism.

Keywords

2-Design, Automorphism Group, Block-Transitive, Point-Primitive, Point-Imprimitive

*通讯作者。

文章引用: 申佳昕, 盛业青. 点数不超过 10 的区传递 2-(v,k,λ)设计[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 155-161.
DOI: 10.12677/pm.2024.1412416

1. 引言

一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计 $\mathcal{D}$ 定义为符合下列条件的一对符号 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$：

1) $\mathcal{P}$ 是有 v 个元素的有限集，$\mathcal{P}$ 中的元素称为点；

2) $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一组 k-子集的集合，$\mathcal{B}$ 中的元素称为区组或者区；

3) $\mathcal{P}$ 中任意给定的 2-子集都恰好包含在 $\mathcal{B}$ 中的 λ 个区组中。

在一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计 $\mathcal{D}$ 中，b 表示区组的总数，r 表示任意一点所在的区组数，如果参数满足 $2<k<v-1$ 且 $b<\binom{v}{k}$，则称 $\mathcal{D}$ 是非平凡设计。如果 $b=v$，则称 $\mathcal{D}$ 为对称设计。本文主要研究非平凡设计，因此 $b\ge v$，$r\le k$。

两个设计 $\mathcal{D}_1=(\mathcal{P}_1,\mathcal{B}_1)$ 和 $\mathcal{D}_2=(\mathcal{P}_2,\mathcal{B}_2)$ 称为同构的，若存在一个双射 $\varphi:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$，使得对任意的 $B_1\in\mathcal{B}_1$，当且仅当 $\varphi(B_1)\in\mathcal{B}_2$。设计 $\mathcal{D}$ 到自身的同构称为它的自同构。一个设计的所有自同构关于映射乘法作成一个群，称为这个设计的全自同构群，记为 $Aut(\mathcal{D})$。它的任意一个子群 G 称为 $\mathcal{D}$ 的一个自同构群，记为 $G\le Aut(\mathcal{D})$。如果 G 在 $\mathcal{P}$ 上的作用是传递（本原）的，则称 G 是点传递(点本原)的。如果 G 在 $\mathcal{B}$ 上的作用是传递(本原)的，则称 G 是区传递(区本原)的。如果 G 非点本原，则存在 $\mathcal{P}$ 的非本原分划 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_d\}$。这里，$|C_i|=c$，则 $v=cd$。如果存在区 B 和 C_i 使得 $\alpha,\beta\in B\cap C_i$，则称无序对 $\{\alpha,\beta\}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个内点对。设计 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 的一个旗是指一个点－区对 (α,B)，其中 $\alpha\in B,B\in\mathcal{B}$。如果自同构群 G 在 $\mathcal{D}$ 的旗的集合上是传递的，那么设计 $\mathcal{D}$ 称为旗传递的。

对于区传递的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计的研究已经有很长的历史。1976 年，Calpham [1]完成了对区传递的 $2\text{-}(v,3,1)$ 设计的分类。1993 年，Cameron 和 Praeger [2]给出了当 $v=\left(\binom{k}{2}-1\right)^2$ 时设计的接近完整分类。然而，研究一般的区传递 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计是一件非常有意义且有一定挑战性的工作。为了推动分类所有的区传递区组设计，研究点数较少的设计是重要的一步，这能为后续分类更大更复杂的设计奠定技术基础。据此，本文考虑 $v\le 10$ 时，区传递的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计，得到下述完整的分类结果：

定理 1 设 $\mathcal{D}$ 是非平凡的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计且 $G\le Aut(\mathcal{D})$ 是区传递的。若 $v\le 10$，则 G 是本原群且 $\mathcal{D}$ 只能是表 1 中的 41 个设计之一：

Table 1. The 41 pairwise non-isomorphic designs and their parameters
表 1. 41 个两两不同构的设计及其参数

设计	(v,k,λ)	设计	(v,k,λ)	设计	(v,k,λ)	设计	(v,k,λ)
$\mathcal{D}_1$	(6, 3, 2)	$\mathcal{D}_{12}$	(8, 4, 9)	$\mathcal{D}_{23}$	(9, 5, 20)	$\mathcal{D}_{34}$	(10, 5, 20)
$\mathcal{D}_2$	(7, 3, 1)	$\mathcal{D}_{13}$	(8, 4, 12)	$\mathcal{D}_{24}$	(9, 6, 5)	$\mathcal{D}_{35}$	(10, 5, 40)
$\mathcal{D}_3$	(7, 3, 2)	$\mathcal{D}_{14}$	(9, 3, 1)	$\mathcal{D}_{25}$	(9, 6, 30)	$\mathcal{D}_{36}$	(10, 6, 5)
$\mathcal{D}_4$	(7, 3, 3)	$\mathcal{D}_{15}$	(9, 3, 6)	$\mathcal{D}_{26}$	(10, 3, 2)	$\mathcal{D}_{37}$	(10, 6, 10)
$\mathcal{D}_5$	(7, 3, 4)	$\mathcal{D}_{16}$	(9, 4, 3)	$\mathcal{D}_{27}$	(10, 3, 4)	$\mathcal{D}_{38}$	(10, 6, 20)
$\mathcal{D}_6$	(7, 4, 2)	$\mathcal{D}_{17}$	(9, 4, 6)	$\mathcal{D}_{28}$	(10, 4, 2)	$\mathcal{D}_{39}$	(10, 6, 60)
$\mathcal{D}_7$	(7, 4, 4)	$\mathcal{D}_{18}$	(9, 4, 9)	$\mathcal{D}_{29}$	(10, 4, 4)	$\mathcal{D}_{40}$	(10, 7, 14)
$\mathcal{D}_8$	(7, 4, 6)	$\mathcal{D}_{19}$	(9, 4, 12)	$\mathcal{D}_{30}$	(10, 4, 8)	$\mathcal{D}_{41}$	(10, 7, 28)
$\mathcal{D}_9$	(7, 4, 8)	$\mathcal{D}_{20}$	(9, 5, 5)	$\mathcal{D}_{31}$	(10, 4, 24)		
$\mathcal{D}_{10}$	(8, 4, 3)	$\mathcal{D}_{21}$	(9, 5, 10)	$\mathcal{D}_{32}$	(10, 5, 8)		
$\mathcal{D}_{11}$	(8, 4, 6)	$\mathcal{D}_{22}$	(9, 5, 15)	$\mathcal{D}_{33}$	(10, 5, 16)		

2. 预备知识

引理 1 ([3])若 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计，则下面式子成立：

1) $bk=vr$；

2) $\lambda(v-1)=r(k-1)$；

3) $b\geq v$ (Fisher 不等式)。

引理 2 设 $\mathcal{D}$ 是一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计，$G\leq Aut(\mathcal{D})$ 是区传递的，则每个区组包含内点对的个数是

$$\frac{k(k-1)(c-1)}{2(v-1)}.$$

证明：因为 G 区传递，则 $\mathcal{D}$ 的每个区包含内点对的个数 x 与区本身无关。用两种不同的方式对集合 $\left\{(\{\alpha,\beta\},B,C_i)\middle|\alpha,\beta\in B\cap C_i\right\}$ 进行计数，得到 $bx=dc(c-1)\lambda/2$。由此可得

$$x=\frac{k(k-1)(c-1)}{2(v-1)}.$$

引理 3 设 $\mathcal{D}$ 是一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计，$G\leq Aut(\mathcal{D})$ 是区传递而非点本原的，则

$$v\leq\left(k(k-1)/2-1\right)^2.$$

证明： 设 $K=k(k-1)/2$。由引理 2，

$$K(c-1)=(v-1)x. \tag{1}$$

则有 $cd-1|K(c-1)$。又因为 $d-1=cd-1-d(c-1)$，所以 $cd-1|K(d-1)$。令

$$K(d-1)=(cd-1)y \tag{2}$$

由等式(1)和(2)可知 $K^2-K(x+y)=(v-1)xy$，因此 $v=\dfrac{(K-x)(K-y)}{xy}$。

因为 $f(t)=(K-t)/t$ 是单调递减函数，则有 $v\leq(K-1)^2$。

3. 定理 1 的证明

本部分，我们总假设 $\mathcal{D}$ 是一个非平凡 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计，这里 $v\leq10$ 且 $G\leq Aut(\mathcal{D})$ 是区传递的。由 Block 引理[4]知 G 在 $\mathcal{D}$ 上点传递。因此，在这一部分的 3.1 和 3.2 节，我们将从 G 是非点本原和 G 是点本原两种情况来证明定理 1。

3.1. *G* 非点本原

在这一部分，我们将总假设 G 是非点本原的。因为素数次传递群必本原([5], Theorem8.3)，所以 v 只能等于 6，8，9，10。

当 $v=6$ 时，由 $k\leq v-2$ 知 $k=3$ 或 4，又由引理 3 知 $k=4$。因为 $v=cd$，所以 $c=2$ 或 3，此时，由引理 2 知 x 不为正整数，矛盾。

当 $v=8$ 时，由 $k\leq v-2$ 知 $k=3,4,5$ 或 6，又由引理 3 知 $k=4,5,6$。因为 $v=cd$，所以 $c=2$ 或 4，此时，由引理 2 知 x 不为正整数，矛盾。

当 $v=9$ 时，由 $k\leq v-2$ 知 $k=3,4,5,6$ 或 7，又由引理 3 知 $k=4,5,6,7$。因为 $v=cd$，所以 $c=3$，此时，由引理 2 知 x 不为正整数，矛盾。

当 $v=10$ 时，由 $k\leq v-2$ 知 $k=3,4,5,6,7$ 或 8，又由引理 3 知 $k=4,5,6,7,8$。因为 $v=cd$，所以 $c=2$ 或

5，此时，由引理 2 知 x 不为正整数，矛盾。

命题 1 设 $\mathcal{D}$ 是非平凡的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计且 $G \le Aut(\mathcal{D})$ 是区传递的。若 $v \le 10$，则 G 不能是非本原群。

3.2. G 点本原

在这一部分，我们将在 G 本原的条件下，找出满足条件的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计。

3.2.1. 参数的可能性

首先，因为 G 是点本原的。由文献([5], Theorem8.2)可知点稳定子群 G_α 是 G 的极大子群，且 $v=|G:G_\alpha|\le 10$。故 G 为次数小于 10 的本原群，则设计 $\mathcal{D}$ 的参数 (v,b,r,k,λ) 必须满足下列 6 个条件：

1) $b\,\|G|$；
2) $\lambda(v-1)=r(k-1)$；
3) $bk=vr$；
4) $3\le k\le v-2$；
5) $r\ge k$；
6) $b<\binom{v}{k}$。

根据这 6 个条件，利用计算机代数软件 GAP [6]可以计算出 332 组参数。需特别说明的是，由于 G 是作用在 n 个点的集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换群，若 $G=A_n$ 或 S_n，则 G 至少是 $n-2$ 重传递的(见文献[5])。在这种情况下，设计的区组数是 $b=\binom{v}{k}$，此时 $\mathcal{D}$ 是一个完全设计，我们不予考虑。下面是借助计算机代数软件 GAP 计算这些参数组所需算法：

算法 1：

```
design:=function(v,G)
local(λ,r,b,k,results);
results:=[];
for k in [3..v−2] do
for r in DivisorsInt (k*G/v) do
for λ in [1..r−1] do
b:=v*r/k;
if b >= Binomial(v,k) then continue; fi;
if λ*(v−1)/r+1 <> k then continue; fi;
if not IsInt(b) or r < k then continue; fi;
Add(results,[v,b,r,k,λ,G/b]);
od;od;od;
return results;
end;
```

3.2.2. 参数的分析

在这一部分，我们将处理从上述算法中得到的全部参数组，筛选出符合设计条件的 6-元组 $(v,b,r,k,\lambda,|G|/b)$。另外，这部分所涉及的计算都是用 MAGMA [7]进行的。

设 B 是设计 $\mathcal{D}$ 的一个区组，G_B 为区稳定子群。由于 G 是设计 $\mathcal{D}$ 的区传递自同构群，则 G 必须满足下列条件：

1) $|G:G_B|=b$，即 G 中至少存在一个指数为 b 的子群；

2) G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 中必存在一个长为 k 的不动区 B；

3) $|B^G|=b$， B 在 G 的作用下轨道长为 b；

4) $(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计。

因此我们将从下面 5 个步骤来分析 3.2.1 的参数。

步骤 1：排除不满足条件 1)的设计参数。

输入命令 $Subgroups(G:OrderEqual:=n)$ (这里 $n=|G_B|=|G|/b$)，即可得到指数为 b 的所有子群。由此可知，有 27 组参数对应的设计的自同构群不存在指数为 b 的子群。

步骤 2：排除不满足条件 2)的设计参数。

因为 B 为 G_B 的不动区。令 $H=G_B$，利用命令 $Orbits(H)$ 可排除 69 组参数。

步骤 3：选取步骤 2 中满足 $|B^G|=b$ 的不动区 B 和对应的子群 H。

利用命令 $\#(B\hat{\ }G)$ 筛选出步骤 2 中满足 $|B^G|=b$ 的不动区 B 和对应的子群 H，排除 104 组参数。

步骤 4：验证 $(\mathcal{P},B^G)$ 是否为一个 2-(v,k,λ) 设计。

对于满足步骤 3 的参数，利用命令 $Design(2,v|B\wedge G)$ 验证 $(\mathcal{P},B^G)$ 是否为一个 2-设计，可排除 12 组参数。

步骤 5：验证满足步骤 4 的设计 $\mathcal{D}$ 是否同构。

现在剩下 120 组参数，利用命令 $IsIsomorphic(\mathcal{D}_i,\mathcal{D}_j)$ 验证设计 $\mathcal{D}_i$ 和 $\mathcal{D}_j$ 是否同构，得到 41 个两两不同构的设计。注：当设计中的参数组 (v,b,r,k,λ) 数值相同时，尽管设计的自同构群 G 不同，但它们对应的 $2\text{-}(v,k,\lambda)$ 设计仍可能是同构的。

3.3. 例子

这部分我们以 $v=8$ 为例来说明我们的方法。根据文献[8]中所列出的 8 次本原群 G 有 7 个，除去 A_8,S_8 这两种情形外，余下 5 个。则由算法 1，可以得到 19 组可能的参数组。将参数组以及对应的自同构群列在表 2 中(这里， $\mathcal{D}_i$ 的符号与定理 1 的符号一致)：

Table 2. Parameters for designs with $v=8$ and automorphism groups G
表 2. $v=8$ 时的设计参数组和自同构群 G

情形	$(v,b,r,k,\lambda,\|G\|/b)$	G	设计/排除办法
1	$(8,14,7,4,3,4)$	$AGL_1(8)$	$\mathcal{D}_{10}$
2	$(8,28,14,4,6,2)$		步骤 3
3	$(8,56,28,14,4,12,1)$		$\mathcal{D}_{13}$
4	$(8,14,7,4,3,12)$	$V_8\cdot F_{7,3}$	$\mathcal{D}_{10}^1\cong\mathcal{D}_{10}$
5	$(8,28,14,4,6,6)$		步骤 2
6	$(8,42,21,4,9,4)$		步骤 3
7	$(8,56,28,4,12,3)$		$\mathcal{D}_{13}^1\cong\mathcal{D}_{13}$
8	$(8,14,7,4,3,12)$	$L_2(7)$	$\mathcal{D}_{10}^2\cong\mathcal{D}_{10}$
9	$(8,28,14,4,6,6)$		步骤 2
10	$(8,42,21,4,9,4)$		$\mathcal{D}_{12}$
11	$(8,56,28,4,12,3)$		步骤 3

续表

12	$(8,14,7,4,3,24)$	$PGL_2(7)$	步骤 2
13	$(8,28,14,4,6,12)$		$\mathcal{D}_{11}$
14	$(8,42,21,4,9,8)$		$\mathcal{D}_{12}^1 \cong \mathcal{D}_{12}$
15	$(8,56,28,4,12,6)$		步骤 2
16	$(8,14,7,4,3,96)$	$AGL_3(2)$	$\mathcal{D}_{10}^3 \cong \mathcal{D}_{10}$
17	$(8,28,14,4,6,48)$		步骤 3
18	$(8,42,21,4,9,32)$		步骤 3
19	$(8,56,28,4,12,24)$		$\mathcal{D}_{13}^2 \cong \mathcal{D}_{13}$

下面我们对这 19 组参数进行处理，从而筛选出符合 3.2.2 条件的参数组，并把其结果反映在上表第 4 列中。不妨以 $G = V_8 \cdot F_{7,3}$ 为例，通过算法 1 我们得到下列 4 组参数：

1) $v=8, b=14, r=7, k=4, \lambda=3, |G|/b=12$；
2) $v=8, b=28, r=14, k=4, \lambda=6, |G|/b=6$；
3) $v=8, b=42, r=21, k=4, \lambda=9, |G|/b=4$；
4) $v=8, b=56, r=28, k=4, \lambda=12, |G|/b=3$。

$G = V_8 \cdot F_{7,3}$ 是作用在 8 个点的集合 $\Omega = \{1,2,\cdots,8\}$ 上的本原置换群。通过文献[8]知 G 在 Magma 中的存储位置，即 $G = PrimitiveGroup(8,2)$。下以 1)和 2)为例来分析上述参数：

对于 1)，利用命令 $Subgroups(G: OrderEqual := 12)$ 知 G 中只有 1 个指数为 $b=14$ 的子群共轭类，即记 H 为其代表元。利用命令 $Orbits(H)$ 知 H 有两个长为 $k=4$ 的不动区：

$$B_1 = \{1,3,5,7\}, B_2 = \{2,4,6,8\}.$$

此时，$|B_1^G| = |B_2^G| = 14 = b$，说明 B_1，B_2 可能分别是设计 $\mathcal{D}_{10}^1$，$\mathcal{D}_{10}^{1\prime}$ 的基本区。利用命令 $\mathcal{D}_{10}^1 := Design\left(2, v \middle| B_1^G\right), \mathcal{D}_{10}^{1\prime} := Design\left(2, v \middle| B_2^G\right)$ 知 $\mathcal{D}_{10}^1$，$\mathcal{D}_{10}^{1\prime}$ 都是 2-设计，最后通过命令 $IsIsomorphic\left(\mathcal{D}_{10}^1, \mathcal{D}_{10}^{1\prime}\right)$ 知 $\mathcal{D}_{10}^1 \cong \mathcal{D}_{10}^{1\prime}$，显然它们同构于 $\mathcal{D}_{10}$。从而 $\mathcal{D}_{10}^1$ 是一个区传递点本原的 $2\text{-}(8,4,3)$ 设计。

对于 2)，利用命令 $Subgroups(G: OrderEqual := 6)$ 知 G 中只有 1 个指数为 $b=28$ 的子群共轭类，即记 K 为其代表元。利用命令 $Orbits(K)$ 知 K 有两个轨道：$O_1 = \{1,2\}, O_2 = \{3,4,5,6,7,8\}$，显然，$K$ 没有长为 4 的不动区，所以排除第 5 组参数。

运用上述同种方法，对表 2 中的其他情形进行分析，得到 4 个两两不同构的设计 $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}$，如表 2 第 4 栏所示。

基金项目

国家自然科学基金青年基金(No. 12201469)；广东省高校重点领域专项基金(No. 2022ZDZX1034)。

参考文献

[1] Clapham, P.C. (1976) Steiner Triple Systems with Block-Transitive Automorphism Groups. *Discrete Mathematics*, **14**, 121-131. https://doi.org/10.1016/0012-365x(76)90055-8

[2] Cameron, P.J. and Praeger, C.E. (1993) Block-Transitive *t*-Designs I: Point-Imprimitive Designs. *Discrete Mathematics*, **118**, 33-43. https://doi.org/10.1016/0012-365x(93)90051-t

[3] Amderson, I. and Honkala, I. (1997) A Short Course in Combinatorial Designs. Internet Edition.

[4] Block, R.E. (1967) On the Orbits of Collineation Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **96**, 33-49. https://doi.org/10.1007/bf01111448

[5] Wielandt, H. (1964) Finite Permutation Group. Academics Press.

[6] The GAP Group (2005) GAP: Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.

[7] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[8] Colbourn, C.J. and Dinitz, J.H. (2007) Handbook of Combinatorial Designs. CRC Press.