Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 162-167
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412417

Hans汉斯

多元函数积分学教学案例研究

张 萍*

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年11月11日；录用日期：2024年12月13日；发布日期：2024年12月30日

摘 要

积分学作为分析学的重要内容，在课程教学中占有举足轻重的地位。以积分学中四个具体案例的求解阐述积分学中所包含的课程思政元素、数学思想方法以及对教学的启示作用等。

关键词

重积分，曲线积分，换元法

Research on Teaching Cases of Multivariate Calculus

Ping Zhang*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 11th, 2024; accepted: Dec. 13th, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

As an important part of analysis theory, integral calculus plays a pivotal role in course teaching. Based on the solution of four specific cases in integral calculus, this paper expounds on the ideological and political elements, mathematical thoughts and methods and the enlightenment effect on teaching in integral calculus.

Keywords

Multiple Integral, Line Integral, Substitution

*通讯作者。

文章引用: 张萍. 多元函数积分学教学案例研究[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 162-167.
DOI: 10.12677/pm.2024.1412417

1. 引言

积分学是理工类专业《高等数学》以及数学专业《数学分析》课程的核心内容之一。积分学以微分学作为基础，在数学领域和工程应用方面有非常重要的应用体现。相较于微分学的教学，积分学的教学更有难度更富有挑战性。这主要是因为微分学的教学是基于极限的运算以及微分法则的应用等内容，所以只需要掌握微分法则(如四则运算法则、复合函数法则、反函数微分法则等)、分析变量之间的关系，就可以借助对应的法则解决问题。然而，作为微分逆运算的积分学并没有具有普遍性的求解方法。甚至有很多函数的原函数并不具备初等函数形式的原函数。这就使得积分学的教学成为了数学课程中的难点之一。同时由于其广泛的应用，积分学成为了大学各理工类专业学生必须要面对的数学难题。研究积分学的教学方法对数学课程的教学有非常重要的现实意义。

多元函数的积分学是分析学的重要组成部分，其中重积分是由定积分的积分区间到平面上有界闭区域和空间有界闭区域的推广。多元函数积分学在工程技术领域有着重要的应用。然而，由于重积分涉及的被积函数及积分区域相比定积分而言复杂性大大增加，这就导致重积分的计算比定积分的计算更困难，更需要注意积分的研究背景、问题模型和转化策略等。

在微积分的发展历程中，多元函数积分学的发展与许多物理问题密切相关。如牛顿在其 1686 年出版的《自然哲学的数学原理》中已经借助几何论述的方式讨论重积分。事实上，他研究的问题是球与球壳作用于质点上的万有引力问题(该问题也成为现今教材中重积分的一个典型物理应用案例)。1770 年代，欧拉利用累次积分方法来计算二重积分。1775 年，拉格朗日在研究旋转椭球的引力时，将表示引力的三重积分借助球坐标来化简计算，由此开启了重积分变量变换的研究。

在多元函数积分学的教学中，结合被积函数和积分区域的对称性来简化积分计算是一个重要方法，文献[1]给出一些利用对称性简化积分计算的案例。利用被积函数或积分区域特性，选取恰当的换元方法来简化计算也是重要的积分技巧，如常见的利用极坐标计算二重积分、利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分、甚至采用更广泛的积分换元公式来处理特殊的重积分计算是非常有必要的。文献[2]考虑了二重积分变量变换选取方法的探究学习策略。文献[3]从培养高层次数学人才角度，从更高的数学观点入手，围绕课程现代化与数学课程体系建设，结合微积分重要的基本思想挖掘，不同数学课程之间的融会贯通等方面，结合丰富案例分享了多元微积分教学的深刻体会。由于多元函数积分学与诸多物理背景密切相关，正如文献[4]中所强调的：多元微积分的教学还可以与学生正在学习的物理学结合起来，使学生对数学和物理都有更好的理解。在积分学的教学案例中，目前众多文献集中于积分的对称性对简化积分计算方面的研究(如参考文献[5] [6])，同时对不同积分之间的联系和相互转化也有很多涉及，见参考文献[7]。相比于积分的转化技巧，积分背景的深度挖掘，积分的应用拓展以及通过不同角度看待积分问题对课程教学更具有普遍性意义。

本文主要围绕多元函数积分中几个典型案例，试图深入挖掘其中的数学思想、数学方法以及数学所体现的特殊魅力，并结合教学实际对如何引导学生亲近多元微积分、主动探讨多元微积分的模型分析及求解策略作一些探讨。其中，第一个案例主要聚焦于积分在计算一些特殊体积时所产生的有趣问题，这些问题可以将看起来并不相关的问题建立紧密联系；第二个案例主要考虑积分形式的变形，围绕“一元”到“多元”的变形来分析积分的表现；第三个案例重点考虑积分的换元法，这与线性代数中的线性变换密切相关，也体现了不同数学分支之间的依存关联；第四个案例结合曲线的不同形式方程对积分求解的影响来分析解决问题的策略选择等。在作者长时间的教学实践中，恰当选取积分学的教学案例，对课程

教学会起到非常积极的促进作用。

2. 典型案例及分析

例题 1：求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截出立体的体积。

[选题背景]该立体首先由 17 世纪意大利数学家 Viviani 研究，因此球面和圆柱面的交线通常称为 Viviani 曲线(见图 1 红色曲线部分)，相应地围成的立体称为 Viviani 体(见图 1)。

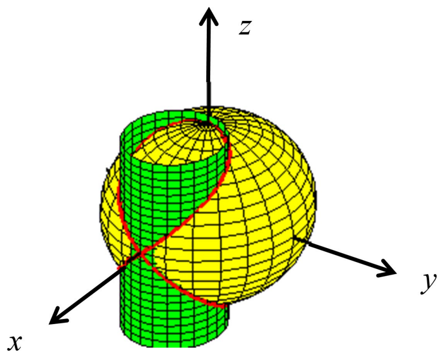

Figure 1. Viviani's curve and Viviani's vault
图 1. Viviani 曲线和 Viviani 体

解法 1：利用直角坐标系求解。由对称性，有

$$V=4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le Rx, y\ge 0\right\}.$$

在直角坐标系下，该二重积分可以按如下步骤计算。

第一步：化二重积分为二次积分：

$$V=4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

第二步：利用第二类换元计算内层积分，令 $y=\sqrt{R^2-x^2}\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则有

$$\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}+\frac{1}{2}\sqrt{R}(R-x)\sqrt{x}.$$

第三步：再计算外层积分，我们分成如下两部分：

$$\int_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^R \arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\mathrm{d}\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\cdot\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R-\frac{1}{4}\int_0^R\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\frac{\sqrt{R}}{(R+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

对后式再利用第二类换元，可得：

$$\frac{1}{4}\int_0^R\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\frac{\sqrt{R}}{(R+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left(\frac{16}{45}-\frac{\pi}{12}\right)R^3.$$

因此，

$$\int_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{16}{45}\right)R^3.$$

另一方面容易计算得到第二部分 $\frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{Rx}\left(R-x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{15}R^3$ 。

所以，

$$V = 4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3.$$

解法 2：利用极坐标求解，过程如下：

$$\begin{aligned} V &= 4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r \\ &= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}R^3\pi + \frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3. \end{aligned}$$

[**解法比较**]从解答篇幅上看，采用解法 2 中的极坐标方法更加简单，这是因为被积函数是关于变量的平方和的形式，且积分区域是以特殊的圆形(扇形)区域，因此采用极坐标后被积函数和积分限都变得非常简单。然而，解法 1“抽丝剥茧”、“各个击破”式的解题思路更具有一般性，也具有非常重要的价值。

有意思的是，注意到球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$，因此当我们在如图的球中挖掉两个 Viviani 体(另一个与图中的 Viviani 体关于 yOz 平面对称)后所剩余的部分体积为 $\frac{16}{9}R^3$，这个值与圆周率无关！

例题 2：设函数 $f\left(x,y,z\right)$ 存在二阶连续偏导数，且 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}>0$. 讨论 $F\left(r\right)=\frac{1}{r^2}\oiint_\Sigma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}S$ 的单调性，其中 $\Sigma := x^2+y^2+z^2=r^2$.

解：作球面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, 0\le\theta\le 2\pi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}. \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

利用坐标变量代换公式，得

$$\oiint_\Sigma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma f\left(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi\right)\left|J\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

其中，

$$J = \sqrt{\left[\frac{\partial\left(y,z\right)}{\partial\left(\theta,\varphi\right)}\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(z,x\right)}{\partial\left(\theta,\varphi\right)}\right]^2 + \left[\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(\theta,\varphi\right)}\right]^2} = r^2\sin\varphi.$$

因此，

$$F\left(r\right) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

$$\begin{aligned} F'\left(r\right) &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f_x\cos\theta\sin\varphi + f_y\sin\theta\sin\varphi + f_z\cos\varphi\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{r^3}\oiint_\Sigma\left(xf_x + yf_y + zf_z\right)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{r^2}\oiint_\Sigma\left(f_x, f_y, f_z\right)\cdot\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{r^4}\iiint_V\left(f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}\right)\mathrm{d}V > 0. \end{aligned}$$

[**解法分析**]在例题 2 的求解中，考虑函数的单调性往往需要借助求导。因此，需要寻找出自变量 r 与 x,y,z 的关系并合理转化积分。在得到需要的函数表达式后还需要借助曲面积分的两种形式之间的转化，以及与三重积分之间的转化关系去得到题设要求的表达式，最终判定函数的单调性。所以，熟悉积分之间的相互转化是非常有必要的。

例题 3：求由两条直线 $y=x, y=2x$，和两条双曲线 $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}$ 在第一卦限围成区域 D 的面积 S。

解法 1：利用二重积分计算。为了简化积分区域，令 $u=\frac{y}{x}, v=xy$. 由此解得：$x=\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}, y=\sqrt{uv}$.

进一步有：

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

该变换将 xOy 平面得区域 D 映成了 uOv 平面得区域 Δ。Δ 的边界为由不等式组确定的矩形区域：$1\le u\le 2, 1\le v\le 2$. 所以，

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta |J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^2 \mathrm{d}u\int_1^2 \frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\frac{\ln 2}{2}.$$

解法 2：利用定积分计算。先求出四个交点坐标分别为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right),(1,1),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(1,2).$$

将积分区域按照直线 $x=1$ 分为两部分。则有

$$S=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{x}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln 2}{2}.$$

[**解法比较**]解法 2 中简洁性其实体现的是一种巧合，也即直线 $x=1$ 分为的两个部分积分都非常容易计算得到。然而，对于更一般的曲线族网格，很难通过恰当的划分方式简化积分计算。因此，解法 1 中将曲线族在变量变换下映射成直线族来化简积分是更具有普遍性的解题策略。

例题 4：计算曲线积分 $\oint_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s, C: x^2+y^2=2x.$

解法 1：利用对称性，原积分等于在第一卦线曲线积分的二倍。在第一卦线上，曲线 C 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$。且

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x.$$

因此，借助第二类换元积分可得：

$$\oint_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=2\int_0^2\frac{2x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=4\pi.$$

解法 2：将曲线方程化为参数方程，令

$$\begin{cases} x=\cos t+1, \\ y=\sin t, \end{cases} 0\le t\le 2\pi.$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t.$$

因此，

$$\oint_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left[(1+\cos t)^2+\sin^2 t\right]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}2(1+\cos t)\mathrm{d}t=4\pi.$$

解法 3：将曲线方程化为极坐标形式，令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin t,\end{cases}$ 得曲线方程为

$$r=2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\left[r'(\theta)\right]^2+\left[r(\theta)\right]^2}\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta.$$

因此，

$$\oint_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=2\int_0^{2\pi}r^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2(1+\cos t)\mathrm{d}t=4\pi.$$

[**解法比较**]解法 1 侧重直接法计算，在本题中虽然表达式带有根式，但可以借助第二类换元解决。解法 2 和解法 3 的积分表达式中都不再出现根式，因此计算起来更方便。进一步思考可以看到，如果将积分曲线 C 换为位置更一般的圆，则其参数方程并没有变得更加复杂，因此积分也会相对比较简单。但对于极坐标计算法则有很大不同，相应的积分式将变得复杂起来。因此，在计算曲线积分时，选择恰当的曲线表达式对积分的计算有很大影响。

3. 结论和思考

多元函数积分学是分析学的后半阶段的学习内容之一，此时同学们已经接触过高等代数、微分方程、大学物理等课程的学习内容。在课堂教学中穿插这些学科的交叉融合有利于学生进一步深入了解不同学科之间的脉络关联。如例题 1、3、4 中所涉及的问题，都可以找到与之相适应的物理或工程模型。这些问题的不同处理策略以及推广形式，对理解数学、应用数学解决实际问题都有很好的启示作用。

另一方面，从更高观点看待一些典型的数学模型对培养复合型数学人才有非常积极的意义。如分析学中在介绍多元函数微积分学时涉及的向量值函数在解决很多问题时都有重要的应用体现。如例题 2 中借助向量积分(第二类曲面积分)与标量积分(第一类曲面积分或三重积分)之间的相互转化解决问题就体现了这一思想。所以，在教学过程中，对所教授内容进行适度挖掘，发现数学的“用”和数学的“趣”，对数学课程的进一步学习是非常有意义的。

基金项目

上海高校青年教师培养资助计划(ZZ202203102)，上海理工大学研究生课程思政建设项目。

参考文献

[1] 解加芳, 邹杰涛, 李迈岩, 等. 对称性及其在曲面积分计算中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(14): 295-298.

[2] 张文丽, 张安玲. 二重积分变量变换选取方法的探究学习[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 25-27.

[3] 刘轼波. 数学专业多元微积分教学的几点体会[J]. 大学数学, 2021, 37(3): 84-92.

[4] 程艺. 在微积分教学中如何处理好数学与物理相互渗透[J]. 大学数学, 2020, 36(2): 1-10.

[5] 郭嗣琮, 赵颖, 韩建. 基于结构元的模糊值函数曲面积分[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(12): 239-244.

[6] 张国林. 积分对称性质的研究[J]. 高师理科学刊, 2015, 35(8): 15-18.

[7] 许丽莉. 各类积分间的区别与联系[J]. 宁德师范学院学报(自然科学版), 2014, 26(3): 306-309.