Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 168-177
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412418

一类复合变型Bessel方程边值问题解的相似结构

许　琳，郑鹏社，蒋廷荣

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年11月15日；录用日期：2024年12月14日；发布日期：2024年12月30日

摘　要

本文先研究了一类变型Bessel方程的通解，由此进一步研究求解复合变型Bessel方程边值问题，发现这类微分方程边值问题的解在不同的边界条件下具有相似的结构，且其解是由边界条件的系数和相似核函数决定的，由此提出了相似构造法。该方法的主要步骤是首先求出方程的基础解系，构造引解函数；再利用引解函数和初边值条件、交界面条件的系数构造内区核函数和外区核函数；最后根据核函数和边值条件的系数得到微分方程组的相似结构解。利用相似构造法在求解微分方程的初边值问题时，能够极大地简化求解过程，便于试井软件的编写以及分析相应的参数。

关键词

复合变型Bessel方程，边值问题，相似构造法，相似核函数

Similar Structure of Solutions for Boundary Value Problems of a Class of Composite Modified Bessel Equations

Lin Xu, Pengshe Zheng, Tingrong Jiang

College of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Nov. 15th, 2024; accepted: Dec. 14th, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

In this paper, the general solution of a class of variant Bessel equations is studied, and then the boundary value problem of the composite variant Bessel equation is further studied, and it is found

文章引用: 许琳, 郑鹏社, 蒋廷荣. 一类复合变型 Bessel 方程边值问题解的相似结构[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 168-177. DOI: 10.12677/pm.2024.1412418

that the solution of the boundary value problem of this kind of differential equation has a similar structure under different boundary conditions, and its solution is determined by the coefficient and similar kernel function of the boundary condition, so the similarity construction method is proposed. The main steps of this method are to first find the basic solution system of the equation and construct the induction function. Then, the coefficients of the induction function, the initial boundary value condition and the interface condition are used to construct the inner and outer kernel functions. Finally, according to the coefficients of the kernel function and the boundary value condition, the similar structural solutions of the differential equations are obtained. The similarity construction method can greatly simplify the solution process when solving the initial boundary value problem of differential equations, which is convenient for the compilation of well testing software and the analysis of corresponding parameters.

Keywords

Composite Modified Bessel Equation, Boundary Value Problem, Similar Structure Method, Similar Kernel Function

1. 引言

随着全球经济的快速发展，人们对能源的需求越来越大，特别是在油气藏研究领域。为了更好开发利用油气藏，在实际工程所得数学模型中往往需要研究变型 Bessel 方程的边值问题，如均质油藏[1]、复合油藏[2]、分形双孔油藏[3]、复合双孔[4]以及双孔合采油藏[5]，这些油藏在求解转化过程中都涉及到一类变型 Bessel 方程边值问题的求解，但其中研究复合型的很少，因此，研究复合变型 Bessel 方程边值问题的解是必要的。

相似构造法是一类求解微分方程初边值问题的数学方法，它在求解复杂的微分方程组时具有重要的作用。通过对解的形式进行构造，利用初边值条件的系数进行组装将得到一个统一的、简洁的连分式形式，尤其对编程算法等方面有重要的作用。它最初是由李顺初等人在研究复合油藏的解时提出的。2002 年，Li [6]等人在研究复合油藏的渗流模型解时，发现无因次压力在三种理想状态外边界条件下，复杂的解的形式可以表达为连分式的统一形式，并能适用于其他类型的油藏，因而提出了相似构造法。从此相似构造法得到了广泛的应用，2010 年严娟[7]等人利用相似构造法研究了 Kummer 方程的一类边值问题，简化了求解过程。Wang [8]等人在 2013 年将相似构造法引入到了微分方程组中，对 Airy 方程的一类边值问题进行求解，通过变量替换得到了一类 Bessel 方程的边值问题，随后利用相似构造法求解并发现了相似构造法在求解该类边值问题时的简便性。接着相似构造法被引入到了各类丰富的油藏中来，2021 年 Dong [9]等人利用相似构造法求解了一类考虑井筒储集和表皮因子的两区径向复合油藏，随后利用 Laplace 变换和 Gaver-Stehfest 数值反演得到了实空间的相似结构解。2017 年 Zhang [10]等人将相似构造法引入到了页岩气渗流模型中来，针对传统页岩气储层模型在描述页岩气流动过程中存在的局限性，建立了考虑吸附和解吸过程的三重介质页岩气储层渗流模型，利用相似构造和 Laplace 变换法求解了三种外边界状态下的 Laplace 空间解，扩展了相似构造法的使用范围。Li [11]等人在 2022 年应用相似构造法求解了一类双孔分形复合油藏渗流模型，极大地简化了模型的求解过程，同时也简化了编写程序的繁琐。罗静[12]等人在 2023 年建立了弹性外边界条件下(其弹性系数为常数)分形复合油藏渗流模型，对一类复合扩展变型 Bessel 函数边值

问题利用相似构造法和 Stehfest 数值反演法[13]得到了模型在实空间中的解，并绘制了在不同参数作用下油藏的特征曲线，为相应试井软件的编程设计提供了新思路。以上研究表明相似构造法对于渗流模型的求解是一种简单有效的方法。此外，相似构造法不仅局限于变型 Bessel 方程，而且可以推广到 Laguerre 方程、Legendre 方程、Hermit 方程、Tschebycheff 方程、Weber 方程、Thomson 方程等方程的边值问题。这些都是相似构造法的应用，该方法在工程和物理等方面也具有重要意义。

弹性是用来表示变量的相对变化对另一个变量相对变化的反映程度，1920 年，Marshall [14]在经济学领域首次提出弹性的概念，他表明价格弹性或需求弹性表示的是在一个特定时期内，一种商品需求量相对变动相应于该商品价格相对变动的反映程度。但是由于没有具体表达式，使得弹性发展较为缓慢，直到 1997 年，Woods [15]等人给出了弹性的数学表达式。于是弹性开始被运用于化学、物理学、经济学等各个领域中[16]-[21]。2019 年，李顺初[18]等人最初将弹性外边界引入到均质复合油藏，发现弹性外边界是石油工程中常用的三种外边界条件的推广，建立了更贴近实际渗流特征的均质油藏渗流模型。2021 年，郑鹏社[19]等人将弹性外边界条件引入到页岩气藏渗流模型中，建立双重介质页岩气渗流模型，得到了实空间中渗流模型的解。李顺初[20]等人在 2020 年针对传统分形均质油藏模型外边界条件(无限、恒压、封闭)的理想化，引入弹性外边界条件，建立了分形均质储层渗流模型，发现弹性外边界位于三种理想状态边界之间，更能真实反映渗流规律。Sun [21]等人在 2023 年把弹性外边界条件引入到了非牛顿幂律流体均质油藏中来，发现弹性外边界主要影响渗流后期，同时要比理想外边界条件更具有一般性，是传统理想外边界条件的推广。然而弹性函数是与半径和时间有关的函数，上述渗流模型的研究中，外边界处的弹性函数都是常数，有一定的局限性。本文对弹性外边界函数进行改进，将其表示成半径与时间的函数，得到了一个关于半径和时间的微分表达式，这样得到的结果更具一般性和真实性。故本文研究如下外边界条件为弹性外边界的复合变型 Bessel 方程边值问题，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_1(x,z)}{\partial x^2}+\dfrac{A_1}{x}\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}-zx^{C_1-2}y_1(x,z)=0,(a\le x\le b)\\ \dfrac{\partial^2 y_2(x,z)}{\partial x^2}+\dfrac{A_2}{x}\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}-zx^{C_2-2}y_2(x,z)=0,(b\le x\le c)\\ \left[Ey_1(x,z)+(1+EF)\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=a}=D\\ y_1(x,z)\big|_{x=b}=\alpha\, y_2(x,z)\big|_{x=b}\\ \left.\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=\beta\left.\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}\\ \left[(Mx+K)y_2(x,z)-N\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}-x\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=c}=0\end{cases} \tag{1}$$

其中 $A_1,A_2,C_1,C_2,D,E,F,M,N,K,\alpha,\beta,a,b,c$ 都是实常数，$y_i=y(x,z),(i=1,2)$ 是关于变量 x, z 的二元函数，$z>0,C_1,C_2\ne 0$ 并且 $\alpha\beta\ne 0,D\ne 0,M^2+N^2\ne 0$。

2. 预备知识

引理 1 一类变型 Bessel 方程的通解[22]

若有方程形如

$$y''+\frac{A}{x}y'-Bx^{C-2}y=0 \tag{2}$$

其中 $A,B,C\in R,\ B>0,\ C\neq 0$

则方程的通解为：

$$y=C_1x^{\frac{1-A}{2}}I_v\left(\frac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right)+C_2x^{\frac{1-A}{2}}K_v\left(\frac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right) \tag{3}$$

其中 $v=\dfrac{1-A}{C}$，C_1,C_2 是任意常数。

证明：对原式进行变量替换

$h=x^{-\frac{1-A}{2}}y$，$g=\dfrac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}$，得到如下变型 Bessel 方程：

$$g^2\frac{d^2h}{dg^2}+g\frac{dh}{dg}-\left(g^2+\left(\frac{1-A}{C}\right)^2\right)h=0$$

根据变型 Bessel 方程的性质可得到该方程的通解是：

$$h=C_1I_v(g)+C_2K_v(g)$$

其中 $I_v(\cdot),K_v(\cdot)$ 分别为 v 阶的第一、第二类变型 Bessel 函数。

将其带入原来所作的变量替换中，得到变型 Bessel 方程的通解如下：

$$y=C_1x^{\frac{1-A}{2}}I_v\left(\frac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right)+C_2x^{\frac{1-A}{2}}K_v\left(\frac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right)$$

3. 主要定理及其证明

若复合变型 Bessel 方程边值问题(1)有唯一解，则 $y_1(x,z)$ 在区间 $x\in[a,b]$ 上的唯一解可以表示为如下连分式的形式：

$$y_1(x,z)=D\frac{1}{E+\dfrac{1}{\Phi(a,z)+F}}\frac{1}{\Phi(a,z)+F}\Phi(x,z) \tag{4}$$

$y_2(x,z)$ 在区间 $x\in[b,c]$ 上的唯一解可以表示为如下连分式的形式：

$$y_2(x,z)=D\frac{1}{E+\dfrac{1}{\Phi(a,z)+F}}\frac{1}{\Phi(a,z)+F}\cdot\frac{\Phi^*(x,z)}{\dfrac{\alpha\Phi^*(b,z)\phi_{0,1}^1(a,b,z)}{\phi_{0,1}^1(b,b,z)}-\dfrac{\beta\phi_{1,0}^1(a,b,z)}{\phi_{0,1}^1(b,b,z)}} \tag{5}$$

其中 $\Phi^*(x,z)$ 是 $y_2(x,z)$ 在区间 $x\in[b,c]$ 上的外区相似核函数：

$$\Phi^*(x,z)=\frac{(Mx+K)\phi_{0,0}^2(x,c,z)-N\phi_{0,1}^*(x,c,z)-c\phi_{0,1}^2(x,c,z)}{(Mx+K)\phi_{1,0}^2(b,c,z)-N\phi_{1,1}^*(b,c,z)-c\phi_{1,1}^2(b,c,z)},(b\le x\le c) \tag{6}$$

$\Phi(x,z)$ 为 $y_1(x,z)$ 在区间 $x\in[a,b]$ 上的内区相似核函数：

$$\Phi(x,z)=\frac{\alpha\Phi^*(b,z)\phi_{0,1}^1(x,b,z)-\beta\phi_{0,0}^1(x,b,z)}{\alpha\Phi^*(b,z)\phi_{1,1}^1(a,b,z)-\beta\phi_{1,0}^1(a,b,z)},(a\le x\le b) \tag{7}$$

其中，$\phi_{j,k}^i(x,\xi,z),(i=1,2;j,k=0,1)$ 为引解函数，它们的表达式如下：

$$\phi_{0,0}^i(x,\xi,z)=y_{i1}(x,z)y_{i2}(\xi,z)-y_{i2}(x,z)y_{i1}(\xi,z),(i=1,2) \tag{8}$$

$$\phi_{1,0}^{i}(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi_{0,0}^{i}(x,\xi,z)=y'_{i1}(x,z)y_{i2}(\xi,z)-y'_{i2}(x,z)y_{i1}(\xi,z),(i=1,2) \tag{9}$$

$$\phi_{0,1}^{i}(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial \xi}\phi_{0,0}^{i}(x,\xi,z)=y_{i1}(x,z)y'_{i2}(\xi,z)-y_{i2}(x,z)y'_{i1}(\xi,z),(i=1,2) \tag{10}$$

$$\phi_{1,1}^{i}(x,\xi,z)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial \xi}\phi_{0,0}^{i}(x,\xi,z)=y'_{i1}(x,z)y'_{i2}(\xi,z)-y'_{i2}(x,z)y'_{i1}(\xi,z),(i=1,2) \tag{11}$$

$$\phi_{0,1}^{*}(x,\xi,z)=y_{21}(x,z)\frac{\partial y_{22}(\xi,z)}{\partial z}-y_{22}(x,z)\frac{\partial y_{21}(\xi,z)}{\partial z} \tag{12}$$

$$\phi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_{21}(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_{22}(\xi,z)}{\partial z}-\frac{\partial y_{22}(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_{21}(\xi,z)}{\partial z} \tag{13}$$

其中 $y_{i1}(x,z),y_{i2}(\xi,z),i=1,2$ 分别是(1)式中的第一个和第二个微分方程的两个线性无关解。

证明：设(1)式的第一个和第二个微分方程的两个线性无关解为 $y_{i1}(x,z),y_{i2}(\xi,z),i=1,2$。

由引理 1 知，弹性边值问题(1)的内 $(i=1)$、外 $(i=2)$ 区间上的定解方程的通解为：

$$y_1(x,z)=C_{11}y_{11}(x,z)+C_{12}y_{12}(\xi,z) \tag{14}$$

$$y_2(x,z)=C_{21}y_{21}(x,z)+C_{22}y_{22}(\xi,z) \tag{15}$$

其中 $C_{11},C_{12},C_{21},C_{22}$ 为任意常数。

将定解方程的通解 $y_1(x,z)$ 代入内边界条件 $\left[Ey_1(x,z)+(1+EF)\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=a}=D$ 得：

$$C_{11}\left[Ey_{11}(a,z)+(1+EF)\frac{\partial y_{11}(a,z)}{\partial x}\right]+C_{12}\left[Ey_{12}(a,z)+(1+EF)\frac{\partial y_{12}(a,z)}{\partial x}\right]=D \tag{16}$$

将通解 $y_1(x,z),y_2(x,z)$ 代入交界面条件 $y_1(x,z)\big|_{x=b}=\alpha\, y_2(x,z)\big|_{x=b}$，$\left.\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=\beta\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}$ 得：

$$C_{11}y_{11}(b,z)+C_{12}y_{12}(b,z)-C_{21}\alpha y_{21}(b,z)-C_{22}\alpha y_{22}(b,z)=0 \tag{17}$$

$$C_{11}\frac{\partial y_{11}(b,z)}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial y_{12}(b,z)}{\partial x}-C_{21}\beta\frac{\partial y_{21}(b,z)}{\partial x}-C_{22}\beta\frac{\partial y_{22}(b,z)}{\partial x}=0 \tag{18}$$

将通解 $y_2(x,z)$ 代入外边界条件 $\left[(Mx+K)y_2(x,z)-N\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}-x\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=c}=0$ 得：

$$\begin{aligned}&C_{21}\left[(Mc+K)y_{21}(c,z)-N\frac{\partial y_{21}(c,z)}{\partial z}-c\frac{\partial y_{21}(c,z)}{\partial x}\right]\\&+C_{22}\left[(Mc+K)y_{22}(c,z)-N\frac{\partial y_{22}(c,z)}{\partial z}-c\frac{\partial y_{22}(c,z)}{\partial x}\right]=0\end{aligned} \tag{19}$$

结合(16)、(17)、(18)、(19)式，可得一个关于 $C_{11},C_{12},C_{21},C_{22}$ 的线性方程组，利用克拉默法则，经过一系列计算得到 $C_{11},C_{12},C_{21},C_{22}$，再进行组装 $y_1(x,z),y_2(x,z)$，即可得到上式的两个连分式形式(4)和(5)这种方法称为相似构造法，观察可知方程的解只与相似核函数和边值条件的系数有关。

通过观察边值问题(1)的边界条件，易得到如下几个推论：

推论 1 当 $y_2(c,z)=0$，相应的外区核函数为

$$\Phi^*(x,z)=\frac{(Mx+K)\phi_{0,0}^2(x,c,z)-c\phi_{0,1}^2(x,c,z)}{(Mx+K)\phi_{1,0}^2(b,c,z)-c\phi_{1,1}^2(b,c,z)} \tag{20}$$

推论 2 当 $\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=c}=0$，相应的外区核函数为

$$\Phi^*(x,z)=\frac{\phi_{0,1}^2(x,c,z)}{\phi_{1,1}^2(b,c,z)} \tag{21}$$

推论 3 当 $\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}\right|_{x=c}=0$，相应的外区核函数为

$$\Phi^*(x,z)=\frac{-N\phi_{0,1}^*(x,c,z)-c\phi_{0,1}^2(x,c,z)}{-N\phi_{1,1}^*(b,c,z)-c\phi_{1,1}^2(b,c,z)} \tag{22}$$

推论 4 在 $x=a$ 处有：

$$\begin{aligned}&\left[y_1(x,z)+F\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=a}\\&=D\frac{1}{E+\frac{1}{\Phi(a,z)+F}}\frac{1}{\Phi(a,z)+F}\Phi(x,z)\end{aligned} \tag{23}$$

4. 相似构造法的具体步骤

通过上述求解证明复合变型 Bessel 方程边值问题的过程，总结出相似构造法求解微分方程边值问题的步骤：

第一步：分别求出两个控制方程的两个线性无关解 $y_{11}(x,z),y_{12}(\xi,z),y_{21}(x,z),y_{22}(\xi,z)$。

第二步：利用方程的线性无关解构造出引解函数 $\phi_{j,k}^i(x,\xi,z),(i=1,2,*;j,k=0,1)$。

第三步：利用六个引解函数和外边界条件 $\left[(Mx+K)y_2(x,z)-N\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}-x\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=c}=0$ 的系数 M,N,K 以及 $x=c$ 构造外区相似核函数 $\Phi^*(x,z)$，即(6)式。

第四步：利用引解函数 $\phi_{j,k}^1(x,\xi,z)(j,k=0,1),\Phi^*(x,z)$ 以及(1)的交界面条件 $\left.y_1(x,z)\right|_{x=b}=\alpha\left.y_2(x,z)\right|_{x=b},\left.\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=\beta\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}$ 中的系数 α，β 构造内区相似核函数 $\Phi(x,z)$，即(7)式。

第五步：将相似核函数 $\Phi^*(x,z),\Phi(x,z)$ 和内边界条件 $\left[Ey_1(x,z)+(1+EF)\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=a}=D$ 中的系数 E,F,D 进行组装即可得到边值问题(1)的解 $y_1(x,z),y_2(x,z)$，即(4)、(5)式。

5. 举例

利用相似构造法求解以下具体复合变型 Bessel 方程边值问题，其中：

$$\begin{aligned}&A_1=1,A_2=-1,C_1=C_2=2,E=1,F=D=2,M=N=K=1,\\&\alpha=1,\beta=3,a=1,b=2,c=6\end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y_1(x,z)}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}-zy_1(x,z)=0,(1\le x\le 2) \\ \dfrac{\partial^2 y_2(x,z)}{\partial x^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}-zy_2(x,z)=0,(2\le x\le 4) \\ \left[y_1(x,z)+3\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=1}=2 \\ y_1(x,z)\big|_{x=2}=y_2(x,z)\big|_{x=2} \\ \dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2}=3\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2} \\ \left[(x+1)y_2(x,z)-\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=6}=0 \end{cases} \tag{24}$$

第一步：根据定理 1 可知(24)式内区定解方程的两个线性无关解为：

$I_v\left(\sqrt{z}x\right),K_v\left(\sqrt{z}x\right)$，$v=\dfrac{1-A_1}{C_1}=0$，这里构造内区二元函数(引解函数)：

$$\phi_{0,0}^1(x,\xi,z)=K_v\left(\sqrt{z}x\right)I_v\left(\sqrt{z}\xi\right)-I_v\left(\sqrt{z}x\right)K_v\left(\sqrt{z}\xi\right)=\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{25}$$

其中

$$\psi_{m,n}(x,y,z)=K_m(xz)I_n(yz)+(-1)^{m-n+1}I_m(xz)K_n(yz)$$

$$\phi_{1,0}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi_{0,0}^1(x,\xi,z)=\sqrt{z}\psi_{v+1,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{26}$$

$$\phi_{0,1}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial \xi}\phi_{0,0}^1(x,\xi,z)=\sqrt{z}\psi_{v,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{27}$$

$$\phi_{1,1}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial \xi}\phi_{0,0}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi_{0,1}^1(x,\xi,z)=z\psi_{v+1,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{28}$$

外区定解方程的两个线性无关解为：

$$xI_v\left(\sqrt{z}x\right),xK_v\left(\sqrt{z}x\right),\ v=\frac{1-A_2}{C_2}=1,$$

这里构造以下外区二元函数：

$$\phi_{0,0}^2(x,\xi,z)=xK_v\left(\sqrt{z}x\right)\xi I_v\left(\sqrt{z}\xi\right)-xI_v\left(\sqrt{z}x\right)\xi K_v\left(\sqrt{z}\xi\right)=(x\xi)\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{29}$$

$$\phi_{1,0}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi_{0,0}^2(x,\xi,z)=(2\xi)\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-x\xi\sqrt{z}\psi_{v+1,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{30}$$

$$\phi_{0,1}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial \xi}\phi_{0,0}^2(x,\xi,z)=(2x)\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-x\xi\sqrt{z}\psi_{v,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right) \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,1}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi_{0,1}^2(x,\xi,z)&=4\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-2x\sqrt{z}\psi_{v+1,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)\\&+2\xi\sqrt{z}\psi_{v,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-x\xi z\psi_{v+1,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\phi_{0,1}^{*}(x,\xi,z)&=xK_{v}\left(\sqrt{z}x\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi I_{v}\left(\sqrt{z}\xi\right)\right)-xI_{v}\left(\sqrt{z}x\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi K_{v}\left(\sqrt{z}\xi\right)\right)\\&=\frac{x\xi}{2z}\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)+\frac{x\xi^{2}}{2\sqrt{z}}\psi_{v,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(xK_{v}\left(\sqrt{z}x\right)\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi I_{v}\left(\sqrt{z}\xi\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(xI_{v}\left(\sqrt{z}x\right)\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi K_{v}\left(\sqrt{z}\xi\right)\right)\\&=\frac{\xi}{z}\psi_{v,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)+\frac{\xi^{2}}{\sqrt{z}}\psi_{v,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-\frac{\xi}{2z}\psi_{v+1,v}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)-\frac{\xi^{2}}{2\sqrt{z}}\psi_{v+1,v+1}\left(x,\xi,\sqrt{z}\right)\end{aligned}\tag{34}$$

第二步：构造外区相似核函数

根据 $\phi_{i,j}^{2}(x,\xi,z)(i,j=0,1),\phi_{0,1}^{*}(x,\xi,z),\phi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)$ 和边值问题(24)中的外边界条件 $\left[(x+1)y_{2}(x,z)-\frac{\partial y_{2}(x,z)}{\partial z}+x\frac{\partial y_{2}(x,z)}{\partial x}\right]_{x=4}=0$ 的系数 $M=N=K=1$ 以及 $c=6$。

可得到区间 $x\in[2,6]$ 上的外区相似核函数：

$$\Phi^{*}(x,z)=\frac{(x+1)\phi_{0,0}^{2}(x,6,z)-\phi_{0,1}^{*}(x,6,z)-4\phi_{0,1}^{2}(x,6,z)}{(x+1)\phi_{1,0}^{2}(2,6,z)-\phi_{1,1}^{*}(2,6,z)-4\phi_{1,1}^{2}(2,6,z)},(2\le x\le 6)\tag{35}$$

第三步：构造内区相似核函数

根据 $\phi_{i,j}^{1}(x,\xi,z)(i,j=0,1),\Phi^{*}(2,z)$ 以及交界面条件 $y_{1}(x,z)\big|_{x=2}=y_{2}(x,z)\big|_{x=2},\frac{\partial y_{1}(x,z)}{\partial x}\Big|_{x=2}=\frac{\partial y_{2}(x,z)}{\partial x}\Big|_{x=2}$ 中的系数 $\alpha=1,\beta=3,b=2$ 可得到区间 $x\in[1,2]$ 上的内区相似核函数：

$$\Phi(x,z)=\frac{\Phi^{*}(2,z)\phi_{0,1}^{1}(x,2,z)-3\phi_{0,0}^{1}(x,2,z)}{\Phi^{*}(2,z)\phi_{1,1}^{1}(1,2,z)-3\phi_{1,0}^{1}(1,2,z)},(1\le x\le 2)\tag{36}$$

第四步：构造内区、外区的解

根据 $\phi_{i,j}^{1}(x,\xi,z)(i,j=0,1),\Phi(x,z),\Phi^{*}(x,z)$ 以及内边界条件 $\left[y_{1}(x,z)+3\frac{\partial y_{1}(x,z)}{\partial x}\right]_{x=1}=2$ 中的系数 $E=1,F=D=2,$ 以及 $a=1,b=2,c=6$ 可得到边值问题(24)有唯一解，则在区间 $x\in[1,2]$ 上的内区解可表示为如下连分式的形式：

$$y_{1}(x,z)=\frac{2}{1+\frac{1}{\Phi(1,z)+2}}\frac{1}{\Phi(1,z)+2}\Phi(x,z)\tag{37}$$

在区间 $x\in[2,6]$ 上的外区解可以表示为如下连分式的形式：

$$y_{2}(x,z)=\frac{2}{1+\frac{1}{\Phi(1,z)+2}}\frac{1}{\Phi(1,z)+2}\cdot\frac{\Phi^{*}(x,z)}{\frac{\Phi^{*}(2,z)\phi_{0,1}^{1}(1,2,z)}{\phi_{0,1}^{1}(2,2,z)}-\frac{3\phi_{1,0}^{1}(1,2,z)}{\phi_{0,1}^{1}(2,2,z)}}\tag{38}$$

6. 结论

利用相似构造法求解微分方程的初边值问题时，能够极大地简化求解过程，便于试井软件的编写。主要步骤包括：首先计算出方程的线性无关解，构造引解函数；再利用引解函数和外边界条件、交界面条件构造相似核函数；最后由左边界条件系数和相似核函数得到方程组的解。

复合变型 Bessel 方程边值问题的解都可以表示成连分式的形式，结构特别，每一步的步骤都简洁清

晰，便于求解。

在具体工程所涉及的方程求解过程中，相似构造法发挥着很大的作用，尤其是在油藏方面的应用更为广泛。因此，相似构造法的利用为很多油藏渗流模型的求解提供了一种简便的方法，具有重要的理论和应用价值。

基金项目

西华大学研究生教育质量工程项目资助(YJSKC202204)；四川省科技厅科技计划项目(2015JY0245)。

参考文献

[1] 张红丽. 弹性外边界下均质球向流油藏问题解的相似结构[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2020.

[2] 孙彩云. 弹性外边界下非牛顿-牛顿复合油藏渗流模型研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2024.

[3] 杨雨. 弹性外边界下的分形双孔油藏球向渗流模型解的相似结构[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.

[4] 汤杰. 弹性外边界下的复合双孔渗流模型的解[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.

[5] 何荣娇. 基于弹性外边界的双孔合采油藏渗流模型解的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2024.

[6] 李顺初, 刘平礼, 赵立强. 复合油藏中不同边界条件下的井底压力分析[J]. 西南石油学院学报, 2002(5): 32-33.

[7] 严娟. Kummer 方程的一类边值问题解的相似结构研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2010.

[8] 王芙蓉, 李顺初, 许东旭. Airy 方程的一类边值问题的解的相似构造法[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版), 2013, 33(1): 79-85.

[9] Dong, X., Li, S., Liu, Z. and Wang, H. (2021) Similar Constructing Method and Gaver-Stehfest Numerical Inversion Equation for Solving the Composite Reservoir Models under Three Outer Boundary Conditions. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **47**, 11239-11253. https://doi.org/10.1007/s13369-021-05896-x

[10] Li, S., Zhang, D., Zheng, P. and Gui, Q. (2017) Similar Structure of Solution for Triple Media Shale Gas Reservoir. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **152**, 67-80. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.02.008

[11] Li, W., Li, S., Zhang, S., Dong, X. and Fan, Q. (2022) Application of a Constructive Method in Solving the Composite Reservoir Model of Dual-Porosity Media with Fractal Characteristics. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **208**, Article 109702. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109702

[12] 罗静. 弹性外边界下分形复合油藏渗流模型解的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.

[13] 何家欢, 张苏, 刘生国, 等. 关于 Laplace 数值反演 Stehfest 算法适用性的一点思考[J]. 油气井测试, 2015(4): 22-24+79-80.

[14] Marshall, A. (1920) Principles of Economics. Macmillan and Co. Publisher, 102-116.

[15] Woods, J.H. and Sauro, H.M. (1997) Elasticities in Metabolic Control Analysis: Algebraic Derivation of Simplified Expressions. *Bioinformatics*, **13**, 123-130. https://doi.org/10.1093/bioinformatics/13.2.123

[16] Luo, J., Zheng, P., Li, S., Dong, X. and Gui, Q. (2023) Research on Nonlinear Spherical Seepage Model Solution of Fractal Composite Reservoir Considering Quadratic Pressure Gradient under Elastic Outer Boundary. *Petroleum Science and Technology*, **42**, 2886-2913. https://doi.org/10.1080/10916466.2023.2179068

[17] Li, S., He, Q., Dong, X., Xia, X. and Gui, Q. (2022) The Elasticity of the Outer Boundary and the Solution of Two-Region Composite Reservoir Seepage Model. *Petroleum Science and Technology*, **40**, 2773-2791. https://doi.org/10.1080/10916466.2022.2048015

[18] Li, S., Zhao, C., Zheng, P. and Gui, Q. (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **175**, 280-285. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042

[19] Zheng, P., Zheng, Y., Li, S., Leng, L. and Xia, X. (2021) Analysis of Flow Characteristics of the Dual Media Shale Gas Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *SN Applied Sciences*, **3**, Article No. 800. https://doi.org/10.1007/s42452-021-04787-y

[20] Li, S., Guo, H., Zheng, P., Dong, X., Zhao, C. and Gui, Q. (2020) The Elastic Boundary Value Problem of Extended Modified Bessel Equation and Its Application in Fractal Homogeneous Reservoir. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 63. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1104-1

[21] Sun, C., Zheng, P., Qian, X. and Leng, L. (2023) Similar Construction Method for Non-Newtonian Power-Law Fluid

Seepage Models with Elastic Outer Boundary Conditions. *Archive of Applied Mechanics*, **93**, 3609-3624. https://doi.org/10.1007/s00419-023-02456-7

[22] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 第 2 版. 北京: 气象出版社, 2002.