Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(12), 7-13
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.1412400

Hans汉斯

微分无穷小量的几点注记

姜亚琴，孙向荣*

南京邮电大学理学院，江苏 南京

收稿日期：2024年10月22日；录用日期：2024年11月22日；发布日期：2024年12月5日

摘 要

对比了牛顿和莱布尼兹的“以直代曲”的微分思想，本文从不同角度阐释微分求导法在求导过程中的应用，说明其在求导过程中能做到化繁为易。进而，从微分概念的角度阐述高阶微分一般不再具有形式的不变性。

关键词

微分，导数，无穷小量

Notes of Differential Infinitesimal

Yaqin Jiang, Xiangrong Sun*

College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu

Received: Oct. 22nd, 2024; accepted: Nov. 22nd, 2024; published: Dec. 5th, 2024

Abstract

In this paper, we compare Newton and Leibniz differential thinking of “replacing curve with straight lines”, describe the application of differential differentiation method in the process of differentiation from different perspectives to illustrate how differential differentiation can simplify the process. Furthermore, from the perspective of the concept of differentiation we explain that higher-order differentials generally no longer have form invariance.

Keywords

Differential, Derivatives, Infinitesimal

*通讯作者。

文章引用: 姜亚琴, 孙向荣. 微分无穷小量的几点注记[J]. 理论数学, 2024, 14(12): 7-13.
DOI: 10.12677/pm.2024.1412400

1. 引言

在巴罗、沃利斯等人工作的启发下，牛顿于 1669 年在题为《运用无穷多项方程的分析学》的论文中提出了求积分的方法，用了无穷小的方法，其中瞬是无限小的量，不可分的量，或者是微元。于 1671 年《流数法与无穷级数》中将变量看作是由点、线、面的连续运动所生成的，而不是无限小单元的集合，称变化率为流数，称变化的量为流量。于 1676 年《曲线求积术》淡化无限小的痕迹，对导数的实质作了更明确的论述：它的重点在于自变量的变化与函数的变化的比构成。于 1687 年出版的《自然哲学之数学原理》中用微积分的方法，采用综合几何证明的形式来描述速度、加速度、切线、曲率等命题。在同一时期，莱布尼茨在其笔记中研究了微积分的许多课题，在题为《关于极大和极小以及切线的一种新方法，它对分数或无理数也适用》中系统介绍了一个量的微分的定义以及和、积、商、幂、根的微分法则，并应用于切线和极大、极小、拐点等问题。他重视分析方法的一般化，意识到作为求和过程的积分是微分的逆，运用微分时遵循：在包括不同阶的微分的关系中，只要保留最低阶的微分就行了。于 1714 年，莱布尼茨于《微分学的历史和起源》阐述了一些思想的发展过程[1] [2]。

经过牛顿和莱布尼茨的工作，微积分已形成一门独立的科学，但一些基本概念并没有严谨的定义，特别的无穷小的概念，也就有了无穷小悖论。作为一门新的科学，微积分理论的发展经历了几代人的共同努力日臻完善。

极限概念的引入解决了微积分中的无穷小问题。例如，用极限来定义导数，它是个形式定义。但是，对于微积分的初学者来说，很多人会抓不住导数的内涵，复合函数求导也会是个难点。以致在求导数时偏离了导数定义，比如求分段函数在分段点的导数就是个易错点。面对复合函数求导的时候，有的同学理不清变量之间的逻辑关系，往往会求导不彻底。其实导数是微分的商，微分是一个无穷小量，讨论导数实质就是在无穷小空间考虑问题。如果我们从微分的角度理解并计算导数，不仅可以避免概念性错误，而且可以绕开复合函数求导的链式法则，无需考虑变量之间的多层复合关系。

现有的教材大多是把微分放在导数之后，如果初学者没有理解导数的概念，在导数的基础上理解和计算微分的确是个难点。有关微分的文献不是很多，其内容主要涉及微分在近似计算中的应用[3]，也有文献简述微分概念的历史发展[4]。

本文从历史起源中讨论导数和微分的概念，对比了牛顿和莱布尼兹的微分思想，利用莱布尼兹的“先微分再导数”的方法理解导数。举例说明微分求导法在求各类函数的导数时如何绕开复合函数求导的链式法则。尤其在处理复杂函数的高阶导数时，微分求导法可以做到化繁为简。最后本文避开导数的概念，仅从微分这个无穷小量的概念出发，分析了高阶微分一般不再具有形式的不变性。

2. 微分概念的注记

现有大部分微积分教材的导数引入还是沿袭了牛顿的思想，从运动的角度解释导数，即导数是一个变速运动的瞬时速度，是一个相对变化率的极限。尽管牛顿的那个年代还没有给出极限的严格定义，但是人们就这么用了。当我们学完牛顿的导数之后，又探讨理解了微分，从内容安排上看似先有导数再有微分。微分这个概念是莱布尼兹率先提出来的，它是一个无穷小量。莱布尼兹从空间的角度理解导数，在细微的空间上考虑问题，即导数是微分的商。所以从逻辑上，微分的确是出现在导数之前，只不过无

穷小是思维的虚构产物，并不存在于现实生活，所以牛顿在定义导数的时候回避了微分这个无穷小量[5]。

“以直代曲”是理解牛顿和莱布尼兹的微分思想共同点的最好的例子，我们不妨以一个简单的函数来说明。

考察函数 $y = x^2$ 在 $x = 0.1$ 附近的变化，尽管这种变化是抛物线的，但是在细微的空间上却像一条直线。作个类比，地球是圆的，但我们感觉不到；同样，住在抛物线附近的小动物也会对抛物线的弯曲毫无感觉，而把抛物线的一部分当成直线。

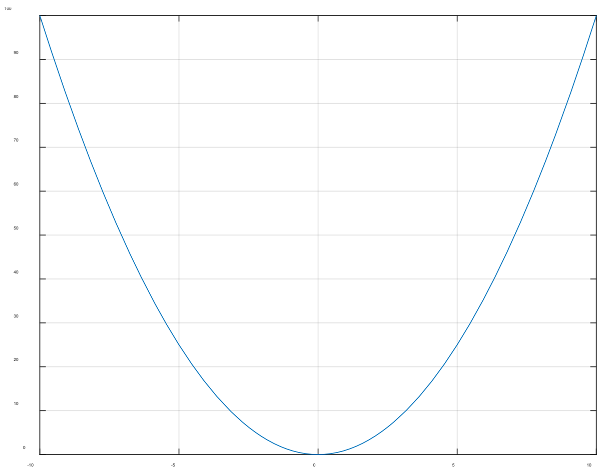

Figure 1. Diagram of $y = x^2$ with a scale of 5

图 1. 刻度为 5 的 $y = x^2$ 图像

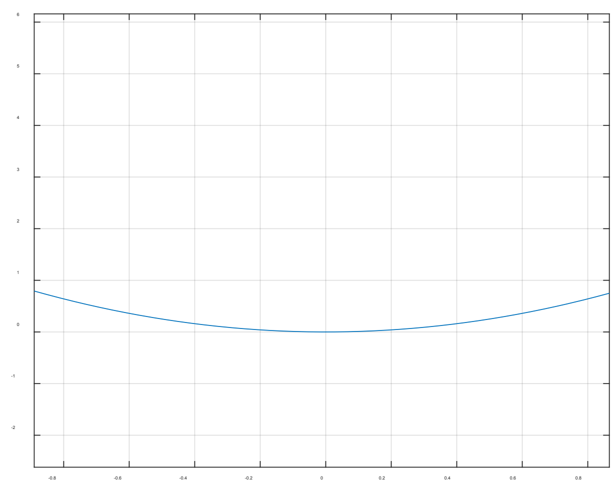

Figure 2. Diagram of $y = x^2$ with a scale of 0.2

图 2. 刻度为 0.2 的 $y = x^2$ 图像

如图 1 所示函数 $y = x^2$ 的全局走形是抛物线型的。当提高了放大镜倍率时，如图 2 从 0 到 0.2 之间的曲线走形近似于直线，所以 0.1 附近很小的领域内的曲线段可以近似看成直线段。

伯努利曾经说：“所有的曲线都是由无限多个无限小的直线构成”，这样的直线其实就是切线。即在无限小区域上的曲线与它的切线是重合的(如果切线存在)，可用微分 dy 来表示。这就是莱布尼兹的“以

直代曲”的微分思想。

现在我们从运动和时间的角度理解牛顿的微分思想。假设变速直线运动的位移为$s=t^2$，位移是速度产生的量，即速度是位移的变化率，我们用一组计算来显示它们之间的关系，假设是从 0.1 时刻开始计算，其中Δt和Δs分别表示时间和位移的改变量。

Δt	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$
Δs	0.03	0.0021	0.000201	0.00002001	$\cdots$
$\Delta s/\Delta t$	0.3	0.21	0.201	0.2001	$\cdots$

从以上数据我们可以观察到当$\Delta t \to 0$时，$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to 0.2$，即 0.1 时刻的瞬时速度为$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0.2$，事实上，它表示 0.1 处的微分$\mathrm{d}s$的相对变化率，即切线的斜率。

正是这一例子可以让我们进一步理解两者在微分思想上的角度差别，即：牛顿的导数的实质在于自变量的变化与函数的变化的比，莱布尼兹的包括不同阶的微分的关系中只要保留最低阶的微分。

因为教材按照先导数后微分的学习次序，所以很多同学在微分这个概念上理解不够透彻，其实导数就是微分这个无穷小量的一个相对变化率，即“导数是微分的商”。求导是除法运算，微分作为导数的分子是不变的，而改变这个除法运算的分母就会得到不同的导数。由导数求微分，首先要关注导数的分母，并不是随意在导数的基础上乘以$\mathrm{d}x$即可。同样，从微分的角度理解导数也会更加自然，可以避免概念性错误，因为其分母是容易被忽略的求导自变量。

3. 微分求导法的注记

为了讨论问题的方便，我们不妨假设下面涉及到的函数导数都存在。利用微分求导法可以克服求导运算中的常见错误，原因之一是微商从形式上体现了导数的本义，求导的自变量已经体现在分母上，从而可以避免求导运算的概念性错误；原因之二在于复合函数求导时，有的同学理不清复合函数的结构，往往在求导过程中不能求彻底，求干净，利用一阶微分形式的不变性，我们只要掌握基本初等函数的导数即可，即对于函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，$\mathrm{d}y=\underset{(1)}{f'(u)}\underset{(2)}{\mathrm{d}u}$，(1)可以是基本初等函数求导，我们只需保持(1)的求导自变量和(2)的微分变量的一致性即可，接下来只需要按类似的方法求$\mathrm{d}u$。

以下举例微分求导法处理几类函数的导数，探讨如何用微分求导法回避导数定义形式所带来的局限，克服常见的求导错误，做到化繁为简。

3.1. 分段函数的导数

例 1. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$，求$f'(0)$。

常见的错误是：当$x\ge 0$时，$f(x)=x$，$f'(x)=1$，所以$f'(0)=1$。这是利用常数函数的求导法则直接得出导数，忽略了导数的本义。

如果从微分入手，即考虑$x=0$处无穷小区间内函数的增量$\mathrm{d}f(x)$，自然就会考虑左右导数，从而得到$f'_-(0)=f'_+(0)=1$。

3.2. 显式复合函数的导数

例 2. $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$，求$f'(x)$，$f'(x^2)$。

因为$\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{\ln(\ln x)}\mathrm{d}(\ln(\ln x))=\frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x}$。

像这样我们每一步只需求函数 $f(t)=\ln t$ 的导数，并且导数 $f'(\ln x)$ 和 $f'(\ln(\ln x))$ 也是一目了然。而求 $f'(x^2)$ 时，无需换元以 x^2 为自变量求导，因为

$$f'(x^2)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x}{2x\mathrm{d}x}=\frac{1}{2x^2\ln(\ln x)\ln x}。$$

3.3. 隐函数的导数

例 3. 已知 $y\sin(xy)-\cos(x-y)=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

如果对等式两边直接求导，考虑到 y 是 x 的隐函数 $y(x)$，每一部分会涉及复合函数求导，但是从微分入手情况就会变得简单。如

$$\mathrm{d}(y\sin(xy))-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0，\quad \mathrm{d}y\sin(xy)+y\cos(xy)\mathrm{d}(xy)+\sin(x-y)\mathrm{d}(x-y)=0，$$

等式的每一部分各自微分，各自选择合适的自变量求微分，无需考虑到 y 是 x 的隐函数，因为无论把谁作为自变量，微分是不变的。

3.4. 参数方程确定的函数的导数

参数方程中，自变量和因变量是分离的，所以从微商的角度理解导数更为自然。尤其是求高阶导数时，利用微分可以回避复合函数的导数，如 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，因为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$，需要把 y 看成以 t 为中间变量的复合函数，即 $y=\psi(t)$，$t=\varphi^{-1}(x)$。而从微商的角度有 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(\psi'(t)/\varphi'(t))}{\varphi'(t)\mathrm{d}t}$，这样就绕开了复合函数求导。

例 4. 已知 $xy\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，令 $u=y^2$，$t=\ln x$，试以 u 为函数，以 t 为自变量变换上述方程。

看到这道题很多初学者无从下手，原因是不仅要更换自变量 x，还要更换因变量 y。如果从导数入手，则里面存在多重复合，即 $t\to x\to y\to u$，从计算的逻辑上也是个难点。如果从微分入手，分离 y 和 x，两者各自求微分，也不考虑 u 和 t 是怎样的复合函数，那么问题就会简化。如

先换 x，因为 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-2t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$，代入原方程，得

$$y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=0 \tag{1}$$

再换 y，因为 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2y}\mathrm{d}u$，

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2y}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2y}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2y}\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{2y}\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{4y^3}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dfrac{1}{2y}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$，

代入方程(1)式，得 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0$ 。

本题的方法没有涉及复合函数求导，采用的技巧就是一阶微分的形式结构，所以不需要理清四个变量之间的关系。

3.5. 反函数的导数

反函数的导数以及它的高阶导数也是初学者的难点，当自变量和因变量互换，导数作为相对变化率肯定是改变的，而微分不变，无需纠结自变量和因变量。

例 5. 已知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，求证 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$，$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$ 。

如果从导数入手，x 是 y 的函数 $x(y)$，而已知条件 $y'=y'(x)$，求导自变量却是 y，需把 y' 看成 y 的复合函数再求导，是个难点，如

因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，则 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)=-\frac{1}{(y')^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{(y')^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 得证。

但是从微分入手，顺应 $y'=y'(x)$ 的形式，把 x 看成自变量即可，仅是一个简单的计算，如

$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{-\frac{y''}{y'^2}\mathrm{d}x}{y'\mathrm{d}x}$ 得证。

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)}{y'\mathrm{d}x}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}\text{。}$$

4. 高阶微分的注记

利用一阶微分形式的不变性确实可以降低求导的难度，但是高阶微分一般不具有这个优势。下面我们以二阶微分为例，从微分概念的角度简单地阐述一下。

考虑函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果把 u 看成自变量，无穷小空间 $\mathrm{d}u$ 上的无穷小量 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$，其中 $\mathrm{d}y$ 和 d^2y 是 u 的函数。而 $\mathrm{d}u$ 是一个虚拟的量值，表示细小的空间，与 u 没有关系，所以

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(f'(u)\mathrm{d}u\right)=f''(u)(\mathrm{d}u)^2$$

如果把 x 看成自变量，u 是中间变量，那么无穷小量 $\mathrm{d}x$ 是虚拟的量值，$\mathrm{d}x$ 空间上的 $\mathrm{d}u$ 是 x 的函数(u 是 x 的线性函数除外)，所以

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}\left(f'(u)\mathrm{d}u\right)=\mathrm{d}\left(f'(u)\right)\mathrm{d}u+f'(u)\mathrm{d}(\mathrm{d}u)=f''(u)(\mathrm{d}u)^2+f'(u)\varphi''(x)(\mathrm{d}x)^2$$

比较两式，我们可以看出二阶微分一般不具有形式的不变性，对于其他高阶微分也有相同的结论。

5. 总结

本文将微分求导法应用于不同类型的函数求导过程，回避导数形式定义在求导过程的复杂性，做到化繁为易，阐述高阶微分一般不再具有形式的不变性。但化繁为简和精确性的矛盾性，高阶微分不再具有形式的不变性会产生新的问题，需要探索新的方法，正如前文所述任何理论都在不断发展完善中，就像泰勒公式之于一阶微分。

基金项目

国家自然科学基金(10926104)，南京邮电大学教改项目(JG00718JX93, JG00719JX85)，南京邮电大学通达学院教改项目(SZJG02113006)。

参考文献

[1] 托马斯·德·帕多瓦. 莱布尼茨、牛顿与发明时间[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2019.

[2] 卡尔·B·波耶. 微积分概念发展史[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2007.

[3] 黎金环, 李小斌, 朱佑彬. 关于微分在近似计算中应用的一个注记[J]. 高等数学研究, 2020, 23(5): 3-4.

[4] 王建, 张维忠. 微分概念的历史发展及教学启示[J]. 高等数学研究, 2017, 20(5): 52-55.

[5] 史蒂夫·斯托加茨. 微积分的力量[M]. 北京: 中信出版集团, 2021.