Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 18-25
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144106

Hans汉斯

指数索赔下带有分红和随机保费相依模型的破产概率

王佳希

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年2月21日；录用日期：2024年3月12日；发布日期：2024年4月10日

摘 要

本文研究了具有随机保费和阈值分红的风险模型，其中保费收入为复合泊松过程，而索赔额和索赔间隔时间具有特殊的相依结构。利用平稳独立增量性质，得到了破产概率和破产前期望贴现红利的积分方程。此外，当随机保费和索赔额均服从指数分布时，可以得到破产概率特征方程以及破产前期望贴现红利特征方程的根。

关键词

随机保费，相依结构，分红策略，破产概率，积分方程

Ruin Probability of Dependent Risk Model with Stochastic Premiums and Threshold Divided under Exponential Claims

Jiaxi Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Feb. 21st, 2024; accepted: Mar. 12th, 2024; published: Apr. 10th, 2024

Abstract

The paper considers a risk model with stochastic premiums and threshold dividends, where premium income is a compound composite Poisson process and a specific dependent structure are assumed between claim sizes and inter-claim times. By utilizing the stationary and independent increment property, we derive the integral equation for ruin probability and the expected dis-

文章引用: 王佳希. 指数索赔下带有分红和随机保费相依模型的破产概率[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 18-25.
DOI: 10.12677/pm.2024.144106

counted dividend payments until ruin. In addition, when stochastic premium and claim amount are exponentially distributed, we can derive roots of the characteristic equation of ruin probability and the expected discounted dividend payments until ruin respectively.

Keywords

Stochastic Premiums, Dependence Structure, Threshold Strategy, Ruin Probability, Integral Equation

1. 引言

近年来，保险精算文献中研究的中心对象之一是破产概率，即保险公司的盈余在某个时间间隔内变为负的概率，这意味着保险公司不再能够偿还索赔。所以对破产概率的研究是极其重要的。在 Gerber 和 Shiu 提出 Gerber-Shiu 函数以来[1]，大部分文献经常把破产概率、破产前盈余以及破产后赤字统一在同一个 Gerber-Shiu 函数一起研究。而破产概率就是 Gerber-Shiu 函数的一个特例。

泊松过程是一种在实际中常被使用的计数随机过程，它所描述的是考虑特定现象的发生次数随时间变化的规律。而复合泊松过程是对泊松过程的每一点赋予一个独立同分布的随机变量的随机过程，所以大部分保险精算文献研究了复合泊松的风险模型。在经典复合泊松风险模型中，经常假设索赔额和索赔间隔时间是相互独立的。这简化了对破产测度的研究，但这样的假设有时是不符合实际的。例如，考虑自然灾害造成损害的情况时，灾难的强度与自上次灾害发生以来的时间是相依的。所以，一些文献开始考虑具有相依结构的风险模型，例如 Albrecher 和 Boxma 通过假设索赔额和索赔时间具有相依结构[2]，从而对经典复合泊松风险模型进行了扩展。在大部分文献的相依结构风险模型中，使用 Copula 函数描述相依结构的文献最为常见，参见文献[3] [4] [5]。

此外，红利支付策略在风险模型中也具有重要意义。红利支付策略最早是由 De Finetti 提出[6]。在多种红利策略中，阈值红利策略具有非常重要的意义。阈值红利策略是指当盈余低于阈值时，不支付红利。当盈余超过或等于阈值时，红利以固定的利率持续支付。Ragulina 研究了具有阈值红利策略和随机保费收入的相依风险模型，得到了 Gerber-Shiu 函数的积分方程以及破产前期望贴现红利支付的微积分方程，并且得到了特殊相依结构下的破产概率的显示公式[7]。

本文考虑[7]中的风险模型，但使用不同的相依结构。本文的相依结构简单，通过取特殊参数，可以得到破产概率的积分方程。本文的余下部分安排如下：在第 2 节中介绍模型的基本结构；在第 3 节中，得到了破产概率以及破产前的期望贴现红利支付满足的积分方程；在第 4 节中，给出了当随机保费和索赔额均服从指数分布时，破产概率特征方程以及破产前期望贴现红利特征方程的根。

2. 模型介绍

在随机现象中有很多样本点本身就是用数量表示的，由于样本点出现的随机性，其数量称为随机变量。设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是满足一般条件的概率空间，以下使用的随机变量都定义在这个概率空间上。

在本文所考虑的风险模型中，索赔额 $(Y_i)_{i\ge1}$ 是一个非负独立同分布($i.i.d$)的随机变量序列，其分布函数为 $F_Y(y)=P[Y_i\le y]$，概率密度函数为 $f_Y(y)$。索赔次数过程 $(N_t)_{t\ge0}$ 是一个参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程，

索赔间隔时间$(T_i)_{i\geq1}$为 $i.i.d$ 的参数为λ的指数分布。假设$(Y_i,T_i)_{i\geq1}$是 $i.i.d$ 的随机向量序列，但T_i,Y_i之间具有相依结构。具体的，令

$$f_{Y|T}(y\,|\,t)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\lambda_j t}f_j(y) \tag{1}$$

其中 n 是一个正整数，对于 $j=1,2,\cdots,n$，$\lambda_j>0$，$f_j(y)$是定义在$(0,\infty)$上的连续函数。

保费收入$(\bar{Y}_i)_{i\geq1}$是非负 $i.i.d$ 的随机变量序列，其分布函数为$F_{\bar{Y}}(y)=P\left[\bar{Y}_i\leq y\right]$，概率密度函数为$f_{\bar{Y}}(y)$。保费收入到达次数$(\bar{N}_t)_{t\geq0}$是参数$\bar{\lambda}>0$为的泊松过程并且与$(\bar{Y}_i)_{i\geq1}$相互独立，保费收入间隔时间$(\bar{T}_i)_{i\geq1}$为 $i.i.d$ 的参数为$\bar{\lambda}$的指数分布。假设在$[0,t]$上的总索赔额和总保费分别为$\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$和$\sum_{i=1}^{\bar{N}_t}\bar{Y}_i$。如果$N_t=0$，那么$\sum_{i=1}^{0}Y_i=0$。如果$\bar{N}_t=0$，那么$\sum_{i=1}^{0}\bar{Y}_i=0$。接下来，用 x 表示保险公司的非负初始盈余。设保险公司的盈余过程$(X_t(x))_{t\geq0}$遵循以下方程

$$X_t(x)=x+\sum_{i=1}^{\bar{N}_t}\bar{Y}_i-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i,t\geq0.$$

此外，我们假设保险公司根据以下阈值红利策略向股东支付红利。设$b>0$为阈值，当盈余低于 b 时，不支付红利。当盈余超过或等于 b 时，红利以$d>0$的利率持续支付。设$\left(X_t^b(x)\right)_{t\geq0}$表示在该阈值红利策略下的盈余过程，则

$$X_t^b(x)=x+\sum_{i=1}^{\bar{N}_t}\bar{Y}_i-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-d\int_0^t I\left(X_s^b(x)\geq b\right)\mathrm{d}s,t\geq0 \tag{2}$$

其中$I(\cdot)$是指示函数。

3. 破产概率以及破产前的期望贴现红利支付的积分方程

平稳独立增量过程是指在一些时间段内，过程在不同时间点的增量是相互独立的，并且过程的均值和方差在这个时间段内保持不变。泊松过程、布朗运动、随机游走等常见的随机过程都属于平稳独立增量过程。在大部分文献中，保险盈余和股票价格的变动通常都被建模为平稳独立增量模型，所以平稳独立增量性质对模型的研究至关重要。由第二部分的模型介绍我们知道，保费和索赔都是平稳独立增量过程。相应地，盈余与之前的收益情况无关。那么，盈余过程也是一个平稳独立的增量过程，所以可以运用全概率公式来计算破产概率以及破产前期望贴现红利支付的积分方程。

定理 1. 设盈余过程$\left(X_t^b(x)\right)_{t\geq0}$服从(1)的假设。假设概率密度函数$f_Y(y)$和$f_{\bar{Y}}(y)$在$R_+$上有导函数，分别为$f_Y'(y)$和$f_{\bar{Y}}'(y)$，这些导函数在$R_+$上连续且有界，对于$x\in[0,b]$，破产概率$\psi(x)$满足下列方程

$$\begin{aligned}\psi(x)=&\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_j}\left(\int_0^x\psi(u)f_j(x-u)\mathrm{d}u+\int_0^\infty f_j(u+x)\mathrm{d}u\right)\\&+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\left(\int_x^b\psi(u)f_{\bar{Y}}(u-x)\mathrm{d}u\right),x\in[0,b]\end{aligned} \tag{3}$$

证明：我们讨论$x\in[0,b]$的情况，应用全概率公式得到

$$\begin{aligned}\psi(x)=&\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}\left(\lambda\int_0^x\psi(x-y)f_{Y|T}(y\,|\,t)\mathrm{d}y+\lambda\int_x^\infty f_{Y|T}(y\,|\,t)\mathrm{d}y\right.\\&\left.+\bar{\lambda}\int_0^\infty\psi(x+y)f_{Y|T}(y\,|\,t)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

将(2)代入上式，并且令 $u=x+y$ 或 $u=x-y$，整理得到

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int_0^\infty\sum_{j=1}^n \mathrm{e}^{-\left(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_j\right)t}\left(\lambda\int_0^x\psi(x-y)f_j(y)\mathrm{d}y+\lambda\int_x^\infty f_j(y)\mathrm{d}y\right)\\&\quad+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\lambda+\bar{\lambda}\right)t}\left(\bar{\lambda}\int_0^{b-x}\psi(x+y)f_{\bar{Y}}(y)\mathrm{d}y\right)\\&=\sum_{j=1}^n\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_j}\left(\int_0^x\psi(u)f_j(x-u)\mathrm{d}u+\int_0^\infty f_j(u+x)\mathrm{d}u\right)\\&\quad+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\left(\int_x^b\psi(u)f_{\bar{Y}}(u-x)\mathrm{d}u\right),x\in[0,b]\end{aligned}$$

定理 2. 设盈余过程 $\left(X_t^b(x)\right)_{t\geq0}$ 服从(1)的假设。假设概率密度函数 $f_Y(y)$ 和 $f_{\bar{Y}}(y)$ 在 R_+ 上有导函数，分别为 $f_Y'(y)$ 和 $f_{\bar{Y}}'(y)$，并且这些导函数在 R_+ 上连续且有界。对于 $x\in[0,b]$，则破产前的期望贴现红利支付 $v(x)$ 满足以下方程

$$\begin{aligned}v(x)&=\sum_{j=1}^n\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_j+\delta}\int_0^x v(u)f_j(x-u)\mathrm{d}u+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\left(\int_x^b v(u)f_{\bar{Y}}(u-x)\mathrm{d}u\right.\\&\quad\left.+\int_b^\infty\frac{d}{\delta}f_{\bar{Y}}(u-x)\mathrm{d}u\right),x\in[0,b]\end{aligned}\tag{4}$$

证明：证明过程类似定理 1，考虑 $x\in[0,b]$ 的情况，用全概率公式得到

$$v(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\lambda+\bar{\lambda}\right)t}\mathrm{d}t\left(\lambda\int_0^x \mathrm{e}^{-\delta t}v(x-y)f_{Y|T}(y\,|\,t)\mathrm{d}y+\bar{\lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}v(x+y)f_{\bar{Y}}(y)\mathrm{d}y\right)$$

将(2)代入上式，并且令 $u=x+y$ 或 $u=x-y$，整理得到(4)。

4. 特殊的相依结构

在本节中，我们考虑一个特殊情况，假设保费额和索赔额的密度函数服从指数分布，具体来说，令

$$f_{\bar{Y}}(y)=\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}y},\ f_1(y)=\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1 y},\ f_2(y)=\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2 y},\ y\geq0$$

则 T_i,Y_i 之间的相依结构为

$$f_{Y|T}(y\,|\,t)=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}f_1(y)+\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}f_2(y)=\mu_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t-\mu_1 y}+\mu_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t-\mu_2 y}$$

保险公司经营保险服务的同时也要承担着风险，因此，研究保险公司的破产概率是十分重要的。接下来通过计算破产概率特征方程的根，从而更加具体地研究破产概率。由(3)式得到，破产概率 $\psi(x)$ 在上述假设的相依条件下的积分方程为

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_1 x}\right)+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_2 x}\right)\\&\quad+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\left(\int_x^b\psi(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u\right),x\in[0,b]\end{aligned}\tag{5}$$

对上式关于 x 求导，得到下面的微积分方程

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}+\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}-\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}}\right)\psi(x)-\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_1 x}\right)\\&\quad-\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_2 x}\right)+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}}\left(\int_x^b\psi(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}\tag{6}$$

对上式继续求导，得到

$$\begin{aligned}\psi''(x)=&\left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}+\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}-\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}}\right)\psi'(x)-\left(\frac{\lambda\mu_1^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}+\frac{\lambda\mu_2^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}^2}{\lambda+\bar{\lambda}}\right)\psi(x)\\&+\frac{\lambda\mu_1^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_1x}\right)+\frac{\lambda\mu_2^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\left(\int_0^x\psi(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\mu_2x}\right)\\&+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}^2}{\lambda+\bar{\lambda}}\left(\int_x^b\psi(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}\tag{7}$$

对$\psi''(x)$关于x求导，并且根据(5)~(7)得到

$$\begin{aligned}\psi'''(x)=&\frac{A_1}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}\psi''(x)\\&+\frac{A_2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}\psi'(x)\\&+\frac{\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}\lambda_1\lambda_2-\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})^2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}\psi(x)\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}A_1=&\lambda\mu_1(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\mu_2(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda})-\bar{\lambda}\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)\\&+(-\mu_2-\mu_1+\bar{\mu})(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})\\A_2=&(\lambda\mu_1\mu_2-\lambda\mu_1\bar{\mu})(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})+(\lambda\mu_1\mu_2-\lambda\mu_2\bar{\mu})(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda})\\&+(-\lambda\mu_1\bar{\mu}-\bar{\lambda}\bar{\mu}\mu_2)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)\\&+(\bar{\mu}\mu_2+\bar{\mu}\mu_1-\mu_2\mu_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})\end{aligned}$$

(8)的特征方程为

$$\begin{aligned}z^3=&\frac{A_1}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}z^2+\frac{A_2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}z\\&+\frac{\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}\lambda_1\lambda_2-\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})^2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}\end{aligned}\tag{9}$$

可以看出特征方程有三个根，即z_1,z_2,z_3。因此$\psi(x)$有通解

$$\psi(x)=C_1\mathrm{e}^{z_1x}+C_2\mathrm{e}^{z_2x}+C_3\mathrm{e}^{z_3x},0\le x\le b\tag{10}$$

为了确定C_1,C_2,C_3，将(10)代入(5)得到

$$\begin{aligned}&C_1\mathrm{e}^{z_1x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\Delta_1+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\Lambda_1-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\Gamma_1-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}(-C_1\Delta_1-C_2\Delta_2-C_3\Delta_3+1)\mathrm{e}^{-\mu_1x}\\&C_2\mathrm{e}^{z_2x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\Delta_2+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\Lambda_2-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\Gamma_2-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}(-C_1\Lambda_1-C_2\Lambda_2-C_3\Lambda_3+1)\mathrm{e}^{-\mu_2x}\\&C_3\mathrm{e}^{z_3x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1}\Delta_3+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2}\Lambda_3-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}}\Gamma_3-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}}(C_1\Gamma_1+C_2\Gamma_2+C_3\Gamma_3)\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(b-x)}=0\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_i=\frac{\mu_1}{\mu_1+z_i},\Lambda_i=\frac{\mu_2}{\mu_2+z_i},\Gamma_i=\frac{\bar{\mu}}{z_i-\bar{\mu}}\mathrm{e}^{z_i b},i=1,2,3.$$

上式对所有 $0\le x\le b$ 都成立。因此，比较 $\mathrm{e}^{-\mu_1 x},\mathrm{e}^{-\mu_2 x},\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(b-x)}$ 的系数得到

$$\begin{cases}1-\left(C_1\Delta_1+C_2\Delta_2+C_3\Delta_3\right)=0\\1-\left(C_1\Lambda_1+C_2\Lambda_2+C_3\Lambda_3\right)=0\\C_1\Gamma_1+C_2\Gamma_2+C_3\Gamma_3=0\end{cases}\tag{11}$$

解方程组(11)得到

$$\begin{cases}C_1=-\dfrac{\left(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2\right)\left(\Lambda_2-\Delta_2\right)+\Gamma_2\left(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2\right)}{\left(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2\right)\left(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2\right)-\left(\Gamma_2\Delta_1-\Gamma_1\Delta_2\right)\left(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2\right)}\\C_2=-\dfrac{\left(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1\right)\left(\Lambda_1-\Delta_1\right)+\Gamma_1\left(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1\right)}{\left(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1\right)\left(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1\right)-\left(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1\right)\left(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1\right)}\\C_3=-\dfrac{\left(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1\right)\left(\Lambda_1-\Delta_1\right)+\Gamma_1\left(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1\right)}{\left(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1\right)\left(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1\right)-\left(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1\right)\left(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1\right)}\end{cases}$$

通过对相关系数 λ_1,λ_2 和阈值 b 的取值，注意取值要满足净保费条件。从而可以计算出系数 C_1,C_2,C_3 以及破产概率特征方程的根。因此，可以得到破产概率 $\psi(x)$ 的函数，从而可以更加直观地研究破产概率。

接下来，继续考虑上述特殊的相依结构。我们知道，股东们有义务在破产时弥补赤字。因此，股东希望最大化期望贴现股息的差额，直到破产和贴现赤字处于崩溃状态。所以研究破产前期望贴现红利支付特征方程的根是很有必要的。由(4)式得到破产前的期望贴现红利支付 $v(x)$ 在特殊相依条件下的积分方程为

$$\begin{aligned}v(x)=&\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\int_0^x v(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\int_0^x v(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u\\&+\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\left(\int_x^b v(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u+\frac{d}{\delta}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(b-x)}\right),x\in[0,b]\end{aligned}\tag{12}$$

对(12)求导得到

$$\begin{aligned}v'(x)=&-\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\int_0^x v(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u-\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\int_0^x v(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u\\&+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\left(\int_x^b v(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u+\frac{d}{\delta}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(b-x)}\right)\\&+\left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}+\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}-\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\right)v(x)\end{aligned}\tag{13}$$

对(13)求导得到

$$\begin{aligned}v''(x)=&\frac{\lambda\mu_1^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\int_0^x v(u)\mu_1\mathrm{e}^{-\mu_1(x-u)}\mathrm{d}u+\frac{\lambda\mu_2^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\int_0^x v(u)\mu_2\mathrm{e}^{-\mu_2(x-u)}\mathrm{d}u\\&+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\left(\int_x^b v(u)\bar{\mu}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(u-x)}\mathrm{d}u+\frac{d}{\delta}\mathrm{e}^{-\bar{\mu}(b-x)}\right)\\&-\left(\frac{\lambda\mu_1^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}+\frac{\lambda\mu_2^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}+\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}^2}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\right)v(x)\\&+\left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}+\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}-\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\right)v'(x)\end{aligned}\tag{14}$$

对 $v''(x)$ 求导并且根据(12)~(14)得到

$$\begin{aligned}v'''(x)=&\frac{A_1}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)}v''(x)\\&+\frac{A_2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)}v'(x)\\&+\frac{\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}\lambda_1\lambda_2-\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)^2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}v(x)\end{aligned}\tag{15}$$

则特征方程为

$$\begin{aligned}z^3=&\frac{A_1}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)}z^2\\&+\frac{A_2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)}z\\&+\frac{\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}\lambda_1\lambda_2-\lambda\mu_1\mu_2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)^2}{(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1)(\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2)(\lambda+\bar{\lambda})}\end{aligned}\tag{16}$$

有三个根 z_1,z_2,z_3。因此 $v(x)$ 的通解为

$$v(x)=D_1e^{z_1x}+D_2e^{z_2x}+D_3e^{z_3x},0\le x\le b\tag{17}$$

为了确定 D_1,D_2,D_3，将(17)代入(12)得到

$$\begin{aligned}&D_1e^{z_1x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\Delta_1+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\Lambda_1-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\Gamma_1-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}(-D_1\Delta_1-D_2\Delta_2-D_3\Delta_3)e^{-\mu_1x}\\&+D_2e^{z_2x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\Delta_2+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\Lambda_2-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\Gamma_2-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}(-D_1\Lambda_1-D_2\Lambda_2-D_3\Lambda_3)e^{-\mu_2x}\\&+D_3e^{z_3x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_1+\delta}\Delta_3+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\lambda_2+\delta}\Lambda_3-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\Gamma_3-1\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\left(D_1\Gamma_1+D_2\Gamma_2+D_3\Gamma_3+\frac{d}{\delta}\right)e^{-\bar{\mu}(b-x)}=0\end{aligned}$$

上式对所有 $0\le x\le b$ 都成立。因此，比较 $e^{-\mu_1x},e^{-\mu_2x},e^{-\bar{\mu}(b-x)}$ 的系数得到

$$\begin{cases}D_1\Delta_1+D_2\Delta_2+D_3\Delta_3=0\\D_1\Lambda_1+D_2\Lambda_2+D_3\Lambda_3=0\\D_1\Gamma_1+D_2\Gamma_2+D_3\Gamma_3+\dfrac{d}{\delta}=0\end{cases}\tag{18}$$

解方程组(18)得到

$$
\begin{cases}
D_1 = \dfrac{d\Delta_2\left(\Delta_2\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_2\right)}{\delta\left\{\left(\Gamma_3\Delta_2 - \Gamma_2\Delta_3\right)\left(\Delta_2\Lambda_1 - \Delta_1\Lambda_2\right) - \left(\Gamma_1\Delta_2 - \Gamma_2\Delta_1\right)\left(\Delta_2\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_2\right)\right\}} \\
D_2 = \dfrac{d\Delta_1\left(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1\right)}{\delta\left\{\left(\Gamma_3\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_3\right)\left(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1\right) - \left(\Gamma_2\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_2\right)\left(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1\right)\right\}} \\
D_3 = \dfrac{d\Delta_1\left(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1\right)}{\delta\left\{\left(\Gamma_2\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_2\right)\left(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1\right) - \left(\Gamma_3\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_3\right)\left(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1\right)\right\}}
\end{cases}
$$

通过对相关系数 λ_1,λ_2 和利率 d 的取值，注意取值要满足净保费条件，可以计算出系数 D_1,D_2,D_3 以及破产前的期望贴现红利支付的特征方程的根。因此，可以得到破产前的期望贴现红利支付 $v(x)$ 的函数，从而可以更加具体地研究破产前的期望贴现红利支付。

本节通过假设保费额和索赔额的密度函数服从指数分布，计算出了破产概率函数与破产前期望贴现函数的具体表达式，可以作为现有文献中关于相依风险模型结论的补充，在保险行业实际应用领域具有一定的研究价值。

参考文献

[1] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1998) On the Time Value of Ruin. *North American Actuarial Journal*, **2**, 48-72. https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671

[2] Albrecher, H. and Boxma, O.J. (2004) A Ruin Model with Dependence between Claim Sizes and Claim Intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**, 245-254. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.09.009

[3] Cossette, H., Marceau, E. and Marri, F. (2008) On the Compound Poisson Risk Model with Dependence Based on a Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **43**, 444-445. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.08.009

[4] Cossette, H., Marceau, E. and Marri, F. (2010) Analysis of Ruin Measures for the Classical Compound Poisson Risk Model with Dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**, 221-245. https://doi.org/10.1080/03461230903211992

[5] Chadjiconstantinid, S. and Vrontos, S. (2014) On a Renewal Risk Process with Dependence under a Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2014**, 125-158. https://doi.org/10.1080/03461238.2012.663730

[6] De Finetti, B. (1957) Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio. *Transactions of the XV International Congress of Actuaries*, **2**, 433-443.

[7] Ragulina, O. (2017) The Risk Model with Stochastic Premiums, Dependence and a Threshold Dividend Strategy. *Modern Stochastics*: *Theory and Applications*, **4**, 315-351. https://doi.org/10.15559/17-VMSTA89