**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(5), 1-8
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145154

# 干扰、恐惧效应和Holling II型的捕食模型的稳定性

**蒋唐唐，张　睿**

兰州交通大学数理学院，甘肃　兰州

收稿日期：2024年3月2日；录用日期：2024年3月28日；发布日期：2024年5月11日

## 摘　要

本文研究一类具有相互干扰、恐惧效应和Holling II型的Lotka-Volterra捕食模型，分析了解非负性、有界性和系统平衡点的存在性以及平衡点的稳定性，并给出系统持续性的充分条件。还得出恐惧水平的改变对边界平衡点的稳定性没有影响，但对正平衡点有影响的结论；当恐惧因子满足定理时，系统在正平衡点处出现Hopf分支。

## 关键词

捕食系统，相互干扰，恐惧效应，平衡点，稳定性

# Disturbance, Fear Effect and Stability of Predator Model of Holling II

**Tangtang Jiang, Rui Zhang**

College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 2nd, 2024; accepted: Mar. 28th, 2024; published: May 11th, 2024

## Abstract

**In this paper, a class of Lotka-Volterra predation models with mutual interference, fear effect and Holling II type are studied, and the existence of non-negativity, boundedness, and system equilibrium points and the stability of equilibrium points are analyzed, and sufficient conditions for system persistence are given. It is also concluded that the change of fear level has no effect on the stability of the boundary equilibrium point, but has an effect on the positive equilibrium point. When the fear factor satisfies the theorem, the system appears a Hopf branch at the positive equilibrium point.**

文章引用: 蒋唐唐, 张睿. 干扰、恐惧效应和 Holling II 型的捕食模型的稳定性[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 1-8.
DOI: 10.12677/pm.2024.145154

**Keywords**

**Predator System, Mutual Interference, Fear Effect, Equilibrium Point, Stability**



## 1. 引言

捕食模型长期以来都是生物数学的重要课题之一，其原因在于食饵与捕食者之间相互作用关系的普遍性和重要性。自从经典的 Lotka-Volterra 模型被提出以来，已有许多学者对其进行了研究，为了使模型更加符合实际情况，一些学者在经典的 Lotka-Volterra 模型的基础上引入了一些可能影响模型动力学行为的因素，例如相互干扰、恐惧效应、食饵避难所、时滞等。通过比较原理、Routh-Hurwitz 判据、李雅普诺夫第二方法、Dulac 定理等可以得到模型的动力学。

相互干扰的概念首先由 Hassell 在 1971 年提出[1]，相互干扰所描述的是当捕食者与捕食者相遇时，捕食者都有离开相遇地方的趋势。此外，Freedman 在文献[2]提出了一个具有相互干扰常数 $m\left(0<m<1\right)$ 的一般 Lotka-Volterra 模型，并且分析了相互干扰系统的稳定性，其模型如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xg\left(x\right)-y^{m}p\left(x\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-d+cby^{m-1}-ey\right) \end{cases} \tag{1}$$

而当干扰常数 $m=1$ 时，模型就变成了一般的 Lotka-Volterra 捕食模型。傅金波、陈兰荪在文献[3]研究了一类具有相互干扰和非线性饱和功能性反应且食饵种群非线性增长的捕食模型的动力学行为，得出保证系统的边界平衡点和正平衡点全局渐近稳定的阀值条件。

在生态系统中，恐惧效应随处可见。恐惧是生物与生俱来的心理反应，与此同时恐惧也会对生物的生理状态、繁殖能力、觅食行为和迁入迁出率等造成一定的影响。恐惧不仅能够让生物提高警觉性，还可以帮助生物种群规避危险，特别是被捕食种群，以达到调节种群密度的作用。Wang 等人在文献[4] [5]将恐惧效应纳入捕食者－食饵模型，提出了如下二维常微分方程组的捕食者－食饵模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{r_0x}{1+ky}-dx-ax^2-g\left(x\right)y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-m+cg\left(x\right)\right) \end{cases} \tag{2}$$

研究表明，恐惧效应不仅会影响到 Hopf 分支的存在性，还会改变 Hopf 分支的方向。

此外，不同的功能反应也会对捕食模型的动力学行为产生影响，继线性功能反应函数后，而在 18 世纪末，Holling 经过大量的研究，提出了一种新的函数关系。表示随着食饵种群的增加，捕食者的捕获率应该从开始的单调递增到最后达到一个极限，然后趋于相对稳定的状态，这类功能反应函数更加符合实际情况，更具有说服性。Holling 在文献[6]提出了经典的 Holling-II型功能反应函数，这类功能反应函数表明捕食者对食饵的功能反应依赖于食饵种群的密度。文献[7] [8] [9]是关于 Holling 型功能反应捕食模型的一些研究，具有较高的研究意义和参考价值。

以往对捕食者系统的研究，大多只考虑捕食者对食饵的直接捕杀或单独考虑某种影响，并不同时考虑捕食者对食饵的间接影响和捕食者种群自身相遇时所带来的影响。然而在生态系统中，当捕食者存在时，一方面食饵对捕食者的恐惧可以刺激食饵通过各种反捕食行为来避免被捕食；另一方面，捕食者相遇时都有离开相遇地方的趋势，即相互干扰。本文结合捕食者存在时，对捕食者种群产生的相互干扰现象以及食饵种群对捕食者种群产生恐惧现象，同时考虑功能反应为Holling-II型等因素，建立一类具有相互干扰和恐惧效应且功能反应函数为Holling-II型的捕食模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2-\dfrac{px}{1+qx}y^m\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta px}{1+qx}y^m-d_2y-cy^2\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x(t),y(t)$ 分别表示食饵和捕食者的密度，$r$ 为食饵的自然出生率，$a,c$ 分别表示食饵和捕食者由于种内竞争导致的死亡率，$d_1,d_2$ 分别表示食饵和捕食者的自然死亡率，$m(0<m<1)$ 为干扰常数，$\beta$ 为捕食者捕食食饵后转化为自身能量的转化率，恐惧因子 $f(k,y)=\dfrac{1}{1+ky}$ 并且满足：$f(0,y)=0$，$f(k,0)=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}f(k,y)=0$，$\lim\limits_{y\to\infty}f(k,y)=0$，$\dfrac{px}{1+qx}$ 表示 Holling-II型功能反应函数，表示捕食者的捕获率应该从开始的单调递增到最后达到一个极限，然后趋于相对稳定的状态，其中，假设 $r,d_1,d_2,a,p,q,\beta,c$ 均为正常数。

## 2. 平衡点的存在性

初始条件 $x\ge0,\ y\ge0$ 下，定义 $R_+^2=\{(x,y)\mid x\ge0,y\ge0\}$，模型(3)的右端的式子在第一象限内连续可微同时满足局部 Lipschitz 条件，故模型(3)的解局部存在。

引理 2.1：如果 $a>0,b>0,\ p>0,t\ge0,\ x(0)>0$ 且

(1) 若 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ge x(t)\left(a-bx^p(t)\right)$，则 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\ge\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$；

(2) 若 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\le x(t)\left(a-bx^p(t)\right)$，则 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\le\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$。

引理 2.2：如果 $a>0,b>0,0<p<1,t\ge0,\ x(0)>0$ 且

(1) 若 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ge x(t)\left(-a+bx^{p-1}(t)\right)$，则 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\ge\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-p}}$；

(2) 若 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\le x(t)\left(-a+bx^{p-1}(t)\right)$，则 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\le\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-p}}$。

**定理 2.1** 在初始条件 $x(0)\ge0,\ y(0)\ge0$ 下，$\forall t\ge0$，模型(3)的解是非负的，且有界的。

**证明：**对模型(3)两边积分，可得

$$\begin{cases}x(t)=x(0)\exp\left(\int_0^t\left(\dfrac{r}{1+ky(s)}-d_1-ax(s)-\dfrac{p}{1+qx(s)}y^m(s)\right)\mathrm{d}s\right)\\ y(t)=y(0)\exp\left(\int_0^t\left(\dfrac{\beta px(s)}{1+qx(s)}y^{m-1}(s)-d_2-cy(s)\right)\mathrm{d}s\right)\end{cases}$$

易知 $x(t), y(t)$ 在 $R_+^2$ 内非负，非负性得证。下面证明模型(3)的有界性，

由模型(3)的第一个式子进行放缩

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2-\frac{px}{1+qx}y^m\le rx-ax^2=x(r-ax)$$

由引理 2.1 得 $\limsup\limits_{t\to\infty}x(t)\le\frac{r}{a}=M_1$，那么 $\exists T_1>0,\varepsilon_1>0$ 对于 $\forall t>T_1$，有 $x(t)\le M_1+\varepsilon_1$。同理可得，由模型(3)的第二个式子可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\beta px}{1+qx}y^m-d_2y-cy^2\le\beta pxy^m-d_2y\le y\left(-d_2+\beta pM_1y^{m-1}\right)$$

根据引理 2.2 得到 $\limsup\limits_{t\to\infty}y(t)\le\left(\frac{\beta pM_1}{d_2}\right)^{m-1}=M_2$，那么 $\exists T_2>0,\varepsilon_2>0$，对于 $\forall t>T_2$，有 $y(t)\le M_2+\varepsilon_2$。

根据上述分析可得模型(3)的解时有界的。

定理 2.2 若 $R=\frac{r}{1+kM_2}-d_1-pM_2^m>0$ 时，模型(3)是持续的

证明：由定理 2.1 可知对于 $\forall t>T_2$，有 $y(t)\le M_2+\varepsilon_2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2-\frac{px}{1+qx}y^m\ge x\left(\frac{r}{1+kM_2}-d_1-pM_2^m-ax\right)$$

令 $R=\frac{r}{1+kM_2}-d_1-pM_2^m$，当 $R>0$ 时，由引理 2.1 得到 $\liminf\limits_{t\to\infty}x(t)\ge\frac{R}{a}=m_1$，那么 $\exists T_3>0,\varepsilon_3>0$，对于 $t>T_3$ 有 $x(t)\ge m_1+\varepsilon_3$。同理可知，当 $R>0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\beta px}{1+qx}y^m-d_2y-cy^2\ge\frac{\beta pm_1}{1+qm_1}y^m-d_2y-cy^2\ge y\left[-(d_2+cM_2)+\frac{\beta pm_1}{1+qm_1}y^{m-1}\right]$$

所以根据引理 2.2 可得 $\liminf\limits_{t\to\infty}y(t)\ge\frac{\beta pm_1}{(d_2+cM_2)(1+qm_1)}=m_2$。综上分析存在 $m_i,M_i>0,i=1,2$，使得下式成立：

$$0<m_1\le\liminf_{t\to+\infty}x(t)\le\limsup_{t\to+\infty}x(t)\le M_1$$
$$0<m_2\le\liminf_{t\to+\infty}y(t)\le\limsup_{t\to+\infty}y(t)\le M_2$$

根据文献[10]所述可以得到模型(3)是持续的。

**定理 2.2** (1) 模型始终存在一个平凡平衡点 $E_0(0,0)$；。

(2) 当 $r>d_1$ 时，模型存在一个边界平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{a},0\right)$ 和唯一的正平衡点 $E_2(x^*,y^*)$。

**证明：**模型的平衡点满足方程

$$\begin{cases}\frac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2-\frac{px}{1+qx}y^m=0\\ \frac{\beta px}{1+qx}y^m-d_2y-cy^2=0\end{cases}$$

显然，可以得到平凡平衡点 $E_0(0,0)$ 总存在，当 $r>d_1$ 时，存在一个边界平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{a},0\right)$ 和唯一

的正平衡点 $E_2\left(x^*,y^*\right)$。下面分析正平衡点的存在性。

$E_2\left(x^*,y^*\right)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{r}{1+ky}-d_1-ax-\dfrac{p}{1+qx}y^m=0\\ \dfrac{\beta px}{1+qx}y^{m-1}-d_2-cy=0\end{cases}\tag{4}$$

根据上式得食饵等倾线 $l_1:\dfrac{r}{1+ky}-d_1-ax-\dfrac{p}{1+qx}y^m=0$，当 $y=0$ 时，得 $x=\dfrac{r-d_1}{a}$，若 $r>d_1$，则 $x=\dfrac{r-d_1}{a}>0$。当 $x=0$ 时，令 $f\left(y\right)=\dfrac{r}{1+ky}-d_1-py^m$，$f\left(0\right)=r-d>0$，$\lim\limits_{y\to\infty}f\left(y\right)=-\infty$，$f'\left(y\right)=-\dfrac{-rk}{\left(1+ky\right)^2}-pmy^{m-1}<0$，所以必定 $\exists y_0>0$，使得 $f\left(y_0\right)=0$。因此，$l_1$ 是从正 $y$ 轴一点 $\left(0,y_0\right)$ 连续单调递减到正 $x$ 轴上一点 $\left(\dfrac{r-d_1}{a},0\right)$。

捕食等倾线 $l_2:\dfrac{\beta px}{1+qx}y^{m-1}-d_2-cy=0$，当 $c=0$ 即捕食者是非密度制约的，此时捕食者等倾线 $l_3:\dfrac{\beta px}{1+qx}y^{m-1}-d_2=0$，可得 $y^{1-m}=\dfrac{\beta px}{c\left(1+qx\right)}$，显然 $l_3$ 过原点 $\left(0,0\right)$，又 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{\left(1-m\right)\left(1+qx\right)x}>0$，所以，$l_3$ 经过原点 $\left(0,0\right)$ 且单调递增。根据文献[11]可知 $c\neq 0$ 时，捕食者等倾线 $l_2$ 也是经过原点单调递增的曲线。

综上分析可知，$l_1$ 和 $l_2$ 在第一象限内有唯一的一个交点，因此，模型存在唯一的正平衡点 $E_2\left(x^*,y^*\right)$。

## 3. 平衡点的稳定性

模型在点 $E\left(x,y\right)$ 处的雅可比矩阵

$$J_E=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}$$

其中

$$J_{11}=\frac{r}{1+ky}-d_1-2ax-\frac{p}{\left(1+qx\right)^2}y^m$$

$$J_{12}=-\frac{rkx}{\left(1+ky\right)^2}-\frac{mpx}{1+qx}y^{m-1}$$

$$J_{21}=\frac{\beta p}{\left(1+qx\right)^2}y^m$$

$$J_{22}=\frac{m\beta px}{1+qx}y^{m-1}-d_2-2cy$$

根据文献[12]可以分析计算得到平衡点的局部稳定性

**定理 3.1** 当 $r<d_1$，平衡点 $E_0\left(0,0\right)$ 全局渐近稳定；当 $r>d_1$ 时，平衡点 $E_0\left(0,0\right)$ 不稳定。

**证明：** 模型在处 $E_0\left(0,0\right)$ 的雅可比矩阵 $J_{E_0}=\begin{pmatrix}r-d_1 & 0\\ 0 & -d_2\end{pmatrix}$，矩阵所对应的特征 $\lambda_1=r-d_1$，$\lambda_2=-d_2<0$，当 $r<d_1$ 时，$\lambda_1<0$，平衡点 $E_0\left(0,0\right)$ 局部渐近稳定；$r>d_1$ 时，$\lambda_1>0$，平衡点 $E_0\left(0,0\right)$ 不稳定。

下面证明平衡点 $E_0\left(0,0\right)$ 的全局稳定性，构造 Lyapunov 函数 $V\left(x,y\right)=x\left(t\right)+\beta^{-1}y\left(t\right)$，易得

$$V'(t)=\frac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2-\frac{d_2}{\beta}y-\frac{c}{\beta}y^2\le(r-d_1)x-ax^2-\frac{d_2}{\beta}$$

当 $r>d_1$ 时，$V'(t)\le 0$；当且仅当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$V'(t)=0$，再结合 $E_0(0,0)$ 的局部渐近稳定性可知，$E_0(0,0)$ 是全局渐近稳定的。

**定理 3.2** 当 $r>d_1$ 时，平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{a},0\right)$ 是局部渐近稳定的

**证明：**模型在处 $E_1\left(\frac{r-d_1}{a},0\right)$ 的雅可比矩阵 $J_{E_1}=\begin{pmatrix} d_1-r & -rk\frac{r-d_1}{a} \\ 0 & -d_2 \end{pmatrix}$，其矩阵对应的特征值为 $\lambda_1=d_1-r<0$，$\lambda_2=-d_2<0$，所以平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{a},0\right)$ 是局部渐近稳定的。

**定理 3.3** 若 $r>d_1$ 且 $ax^*>\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 时，正平衡点判据 $E_2(x^*,y^*)$ 局部渐近稳定；$ax^*<\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 时，正平衡点 $E_2(x^*,y^*)$ 不稳定。

**证明：**模型在 $E_2(x^*,y^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J_{E_2}=\begin{pmatrix} \frac{r}{1+ky^*}-d_1-2ax^*-\frac{py^{*m}}{(1+qx^*)^2} & -\frac{rkx^*}{(1+ky^*)^2}-\frac{mpx^*y^{*m-1}}{1+qx^*} \\ \frac{\beta py^{*m}}{(1+qx^*)^2} & \frac{m\beta px^*y^{*m-1}}{1+qx^*}-d_2-2cy^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+B\lambda+C=0 \tag{5}$$

其中

$$B=ax^*-\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}+(1-m)d_2+(2-m)cy^*$$

$$C=\left[\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}-ax^*\right]\left[(m-1)d_2+(m-2)cy^*\right]+\frac{\beta py^{*m}}{(1+qx^*)^2}\left[\frac{rkx^*}{(1+ky^*)^2}+\frac{mpx^*y^{*m-1}}{1+qx^*}\right]$$

当 $ax^*>\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 时，$B>0,C>0$，特征方程的特征值 $\lambda_1,\lambda_2$ 的实部均小于零，根据 Hurwitz 判据，正平衡点判据 $E_2(x^*,y^*)$ 局部渐近稳定；当 $ax^*<\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 且 $C>0$ 时，特征方程的特征值 $\lambda_1,\lambda_2$ 的实部均大于零，正平衡点 $E_2(x^*,y^*)$ 不稳定。

**定理 3.4** 若 $0<r-d_1<\frac{a}{q}$ 时，模型(3)在第一象限无正周期解

**证明：**对模型(3)作替换，令 $\mathrm{d}t=(1+qx)\mathrm{d}\tau$，仍用 $\mathrm{d}t$ 表示 $\mathrm{d}\tau$，则模型(3)变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1+qx)\left(\frac{rx}{1+ky}-d_1x-ax^2\right)-pxy^m=P(x,y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta pxy^m-(d_2y+cy^2)(1+qx)=Q(x,y) \end{cases}$$

设 Dulac 函数为 $D(x,y)=x^{-1}y^{-1}$，对于模型(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(DP)}{\partial x}+\frac{\partial(DQ)}{\partial u}\\&=\frac{\frac{rq}{1+ky}-d_1q-a-2aqx}{y}+\beta p(m-1)y^{m-2}-\frac{c}{x}-cq\\&\le\frac{rq-d_1q-a}{y}+\beta p(m-1)y^{m-2}-\frac{c}{x}-cq<0\end{aligned}$$

故模型(3)在第一象限无正周期解。

## 4. Hopf 分支的存在性

以模型(3)中的恐惧水平 $k$ 或干扰常数 $m$ 作为分支参数，其余参数均保持不变，因恐惧水平和干扰常数的情况类似，故只需考虑恐惧水平作为分支参数的情形，探究模型(3)在正平衡点处出现 hopf 分支的可能性。

**定理 4.1** 当 $ax^*>\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 时，若 $\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}\neq 0$，则当 $k=k_H$ 时，正平衡点 $E_2(x^*,y^*)$ 处出现 Hopf 分支。

**证明：** 设 $\lambda(k)=\lambda_r(k)+i\lambda_i(k)$ 为特征方程(4)的特征值，代入方程(5)中，分离实部与虚部得

$$\begin{cases}\lambda_r^2-\lambda_i^2-(J_{11}+J_{22})\lambda_r+J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}=0\\2\lambda_r\lambda_i-(J_{11}+J_{22})\lambda_i=0\end{cases}\tag{6}$$

在 Hopf 分支点时应有 $\lambda_r(k)=0$，设 $k=k_H$ 时 $\lambda_r(k_H)=0$，代入(6)式，得

$$\begin{cases}-\lambda_i^2+J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}=0\\(J_{11}+J_{22})\lambda_i=0\end{cases}$$

有 $J_{11}(k_H)+J_{22}(k_H)=0$；$\lambda_i(k_H)=\sqrt{J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}}$；

$ax^*>\frac{pqx^*y^{*m}}{(1+qx^*)^2}$ 时，$\det(J_{E^*})=J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}>0$，对方程(6)求导，并代入 $\lambda_r(k_H)=0$，

$$\begin{cases}-2\lambda_i\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}-(J_{11}+J_{22})\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}+\left.\frac{\mathrm{d}(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21})}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}=0\\2\lambda_i\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}-\lambda_i\left.\frac{\mathrm{d}(J_{11}+J_{22})}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}-(J_{11}+J_{22})\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}=0\end{cases}$$

得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}=\left.\frac{2\lambda^2\frac{\mathrm{d}(J_{11}+J_{22})}{\mathrm{d}k}+(J_{11}+J_{22})\frac{\mathrm{d}(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21})}{\mathrm{d}k}}{4\lambda^2+(J_{11}+J_{22})^2}\right|_{k=k_H}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}(J_{11}+J_{22})}{\mathrm{d}k}}{2}\right|_{k=k_H}$$，当

$\left.\frac{\mathrm{d}(J_{11}+J_{22})}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}\neq 0$ 时，$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_H}\neq 0$，证毕。

## 5. 结论

本文研究了一类具有相互干扰和恐惧效应且功能反应为 Holling-II型的捕食模型，分析了平衡点的存

在性和局部稳定性，并给出了模型持续性的充分条件。通过计算分析表明：当食饵的死亡率大于出生率时，系统最终会走向灭绝；当食饵的死亡率小于出生率时，边界平衡点和正平衡点能够局部渐近稳定，并且模型在第一象限不存在正的周期解。系统的恐惧水平的变化对边界平衡点的稳定性没有影响，但对正平衡点有影响；当恐惧水平满足定理 4.1 中的条件时时，系统在正平衡点处出现 Hopf 分支。

## 参考文献


[1] Hassell, M.P. (1971) Mutual Interference between Searching Insect Parasites. *The Journal of Animal Ecology*, **40**, 473-486. https://doi.org/10.2307/3256

[2] Freedman, H.I. (1979) Stability Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Density-Dependent Death Rates. *Bulletin of Mathematical Biology*, **41**, 67-78. https://doi.org/10.1016/S0092-8240(79)80054-3

[3] 傅金波, 陈兰荪. 一类具有相互干扰的食饵-捕食者模型的定性分析[J]. 系统科学与数学, 2017, 37(4): 1166-1178.

[4] Wang, X., Zanette, L. and Zou, X. (2016) Modelling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions. *Journal of Mathematical Biology*, **73**, 1179-1204. https://doi.org/10.1007/s00285-016-0989-1

[5] Wang, X. and Zou, X. (2017) Modeling the Fear Effect in Predator-Prey Interactions with Adaptive Avoidance of Predators. *Bulletin of Mathematical Biology*, **79**, 1325-1359. https://doi.org/10.1007/s11538-017-0287-0

[6] Holling, C.S. (1965) The Functional Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population Regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, **97**, 5-60. https://doi.org/10.4039/entm9745fv

[7] Jiang, X., Zu, L., Jiang, D., *et al*. (2020) Analysis of a Stochastic Holling Type II Predator-Prey Model under Regime Switching. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 2171-2197. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00798-6

[8] Antwi-Fordjour, K., Parshad, R.D. and Beauregard, M.A. (2020) Dynamics of a Predator-Prey Model with Generalized Holling Type Functional Response and Mutual Interference. *Mathematical Biosciences*, **326**, 108407. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2020.108407

[9] Wang, S., Yu, H., Dai, C., *et al*. (2020) The Dynamical Behavior of a Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response and Allee Effect. *Applied Mathematics*, **11**, 407-425. https://doi.org/10.4236/am.2020.115029

[10] Zhang, X., Huang, G. and Dong, Y. (2020) Dynamical Analysis on a Predator-Prey Model with Stage Structure and Mutual Interference. *Journal of Biological Dynamics*, **14**, 200-221. https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1737740

[11] 吴培霖. 具有相互干扰的 Volterra 模型的稳定性[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 1986(2): 42-45.

[12] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2014.