Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 122-129
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145168

Hans汉斯

时间周期双稳型反应扩散方程解的长时间行为

陈　卓

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月9日；录用日期：2024年4月11日；发布日期：2024年5月23日

摘　要

本文研究以下一类时间周期反应扩散方程 $u_t = u_{xx} + u_x + f(t,u), x \in R, t > 0.$ 的解的长时间渐近行为，其中，$f(t,u)$ 是满足双稳型条件且t具有周期性。将通过引入辅助函数，构造适当的上下解，再运用比较原理，可以得到方程解在无穷远处的性质。

关键词

时间周期，长时间渐近行为，比较原理

Long-Time Behavior of Solutions to the Time-Periodic Bistable Reaction-Diffusion Equation

Zhuo Chen

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 9th, 2024; accepted: Apr. 11th, 2024; published: May 23rd, 2024

Abstract

This paper focuses on a class of time-periodic reaction-diffusion equations $u_t = u_{xx} + u_x + f(t,u)$, $x \in R, t > 0.$ of solutions with long time asymptotic behaviour, where $f(t,u)$ satisfies the bistable condition and t is periodic. The properties of the solutions of the equation at infinity will be obtained by introducing auxiliary functions, constructing appropriate upper and lower solutions, and then applying the comparison principle.

文章引用: 陈卓. 时间周期双稳型反应扩散方程解的长时间行为[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 122-129.
DOI: 10.12677/pm.2024.145168

Keywords

Time-Periodic, Long Time Asymptotic Behaviour, Comparison Principle

1. 引言

反应扩散方程行波解是反应扩散方程中一种特殊的解析解，展示了在空间中持续传播的波动性质。行波解在自然界的各种动态过程中起着关键作用，例如在生态学、化学和物理学领域等。这些解具有一定的空间和时间结构，在空间中以恒定速度传播。行波解的形式通常是 $u(t,x)=\phi(x-ct)$，其中 $\phi(\xi)$ 是关于 $\xi=x-ct$ 的特定函数，而 c 则代表波速。行波解一直是人们研究的重要课题之一，具体可参看文献[1] [2] [3]。行波解的特殊性质使其在方程中具有重要的意义，因为它们展示了物质传播的稳定性和动态行为。

就反应扩散方程而言，较为基础性的问题是研究方程行波解的存在性，通常证明解的存在性的方法为上下解结合不动点定理或者相平面分析法，具体可参看文献[4] [5] [6] [7] [8]。关于双稳型反应扩散方程解的稳定性，通常运用半群理论、最大值原理与能量方法，相关结果可参看文献[9] [10]。

1997 年，文献[11]研究了一维情形的双稳型反应扩散方程

$$u_t=\Delta u+f(u), t\in R, x\in R,$$

其中，$\mu\in(0,1)$ 且满足 $f(0)=f(1)=f(\mu)=0$，他们证明了方程存在唯一行波解 $\phi(x-ct)$ 满足

$$\begin{cases}\phi''+c\phi'+f(\phi)=0,\\ \phi(-\infty)=1, \phi(+\infty)=0,\end{cases}$$

并且行波解 $\phi(x-ct)$ 具有渐近稳定性。

文献[12]研究了在具有变漂移系数的半线性反应扩散方程，漂移系数对解的长时间行为的影响。她的研究结果表明，当反应项 f 满足 $f(0)=f(1)=f(\mu)=0$ 和 $\limsup\limits_{x\to+\infty}u_0(x)<\mu$ 时，则下列方程

$$u_t=u_{xx}+k(x)u_x+f(u),\quad t>0, x\in R,$$

的解 $u(t,x)$ 是增长的，那么对一些辅助函数 $m(t)$ 和常数 x_0，有以下的渐近行为

$$\sup_{x>0}\left|u(t,x)-\varphi(x-ct+m(t)+x_0)\right|\to 0,\quad t\to+\infty.$$

文献[13]证明了对于不带有漂移系数的时间周期反应扩散方程

$$u_t=\Delta u+f(u), t\in R, x\in R,$$

解的存在性、唯一性与稳定性，证明了其时间周期行波解 $\phi(t,x-ct)$ 满足

$$\begin{cases}\phi_t-c\phi_\xi-\phi_{\xi\xi}-f(t,\phi)=0,\ \ t\in R, \xi\in R,\\ \phi(t+T,\xi)=\phi(t,\xi), \phi(t,-\infty)=1, \phi(t,+\infty)=0,\ \ t\in R.\end{cases}$$

其中，行波解 ϕ 和速度 c 仅依赖于反应项 f，并且 c 的符号与 $\int_0^T\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 的符号相同。且当 $t\to+\infty$ 时，

若初值 $u_0(x)$ 满足 $\limsup_{x\to+\infty} u_0(x)<\mu$ 和 $\liminf_{x\to+\infty} u_0(x)>\rho$，则对于一些常数 x_0，解 $u(t,x)$ 满足

$$\sup_{x\in R}\left|u(t,x)-\phi(x-ct+x_0)\right|\to 0,\quad t\to+\infty.$$

受到文献[12]和[13]的启发，本文主要研究如下时间周期反应扩散方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u_x+f(t,u), & x\in R, t>0,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in R, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0\le u_0(x)\le 1$。假设在 $f(t,u)$ 关于 t 是周期的，也就是说，存在 $T\in R$，使得 $f(t+T,u)=f(t,u)$。接下来，假设 $f(t,u)$ 在 $[0,1]$ 上是双稳型的，也就是说存在一个周期函数 T_t，使得

$$f(t,0)=f(t,1)=f(t,T_t)=0,$$

并且对于任意的 $t\in R$，函数 f 满足，在 $u\in(0,T_t)$ 上，$f(t,u)<0$；在 $u\in(T_t,1)$，$f(t,u)>0$ 且对于任意 $t\in R$，有

$$f_u(t,0)<0,\ f_u(t,1)>0,$$

即，0 和 1 是 $f(t,u)$ 的稳定零点。也就是说，存在 $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\mu>0$，使得，在任意 $t\in R$，有

$$-f_u(t,u)\ge\tau,\quad u\in[0,\rho]\cup[1-\rho,1], \tag{2}$$

现在，我们来做一些技术性的假设

$$\int_0^T\int_0^1 f(t,s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t>0$$

也就是说，$c>0$。并且，我们假设方程(1)的解 $u(t,x)$ 是增长的，即，当 $t\to+\infty$ 时，解 $u(t,x)$ 局部一致趋近于 1。

本文的工作是研究方程(1)的解的长时间行为。

2. 主要结论

定理 1.1 如果 $\limsup_{x\to+\infty} u_0(x)<\rho$，并且方程(1)的解 $u(t,x)$ 是增长的，那么对于一些常数 x_0，则有

$$\sup_{x>0}\left|u(t,x)-\phi(t,x-ct+x_0)\right|\to 0,\quad t\to+\infty,$$

其中 ϕ 是行波解，c 为传播速度。运用于$-x$ 轴方向上也有类似的结论。

为了更好的证明定理 1.1，本文将会引用文献[9]中的一个辅助函数，并且运用文献[13]的一个估计。现在给出

$$\eta(t)=\frac{2}{3}\ln^{\frac{2}{3}}(t+1),\ t>0,$$

可知，$\eta(t)$ 是递增函数，并且满足

$$\eta(0)=0,\quad \sup_{t\ge0}\eta'(t)\le1,$$

和

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\eta(t)}\mathrm{d}t<+\infty,\quad \forall a>0.$$

因为 $\phi(t,-\infty)=1$ 和 $\phi(t,+\infty)=0$，那么存在 $M>0$，使得

$$0<\phi(t,\xi)<\frac{\rho}{2},\ t\in R,\xi\geq M \tag{3}$$

和

$$1-\frac{\rho}{2}\leq\phi<1,\ t\in R,\xi\leq -M. \tag{4}$$

因为$\phi_{\xi}(t,\xi)<0$，则存在$a>0$，使得

$$-\phi_{\xi}(t,\xi)>a,\quad t\in R,-M\leq\xi\leq M. \tag{5}$$

我们从文献[13]中可知，存在常数$C_2>0$和$\beta>0$，使得

$$\left|\phi_{\xi}(t,\xi)\right|\leq C_2\mathrm{e}^{-\beta|\xi|},\ t\in R,\xi\in R.$$

取

$$q=\min\left\{\frac{\tau}{2},\beta\right\}.$$

现在，我们给出解$u(t,x)$在初值条件下的上解与下解。

$$u^{+}(t,x)=\phi\left(t,x-ct-r\mathrm{e}^{-\omega t}-\alpha(t)\right)+r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},\ t>T_1,x\geq 1,$$

和

$$u^{-}(t,x)=\phi\left(t,x-ct+r\mathrm{e}^{-\omega t}+\alpha(t)\right)-r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},\ t>T_1,x\geq 1,$$

其中，

$$\alpha(t)=\int_0^t rC\mathrm{e}^{-q\eta(s)}\mathrm{d}s$$

并且，对于$T_1>0$和ω为常数时，有$\omega\mathrm{e}^{-\omega t}\leq 1,t>T_1$。

引理 2.1 对于任意$r\in\left(0,\frac{\rho}{2}\right)$，

(i) 如果有

$$u_0(x)\geq\phi(0,x+1)-r,x>0$$

和

$$u(t,1)\geq 1-r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},\ t>0,$$

则有

$$u(t,x)\geq\phi\left(t,x-ct+\mathrm{e}^{-\omega t}+\alpha(t)\right)-r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},\ t>T_1,x\geq 1. \tag{6}$$

(ii) 如果有

$$u_0(x)\leq\phi(0,x-1)+r,x>0$$

则有

$$u(t,x)\leq\phi\left(t,x-ct-\mathrm{e}^{-\omega t}-\alpha(t)\right)+r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},\ t>T_1,x\geq 1. \tag{7}$$

证明：(i) 当$t>0$和$x\in R$时，我们定义

$$u^{-}(t,x)=\max\left\{\phi\left(t,x-ct+\mathrm{e}^{-\omega t}+\alpha(t)\right)-r\mathrm{e}^{-q\eta(t)},0\right\}$$

现在，我们首先验证初值条件。将$t=0$代入$u^-(t,x)$，可以求出

$$u^-(0,x)=\phi(0,x+1)-r\le u_0(x),\quad x>0.$$

再验证边界条件，当$x=1$和$t>0$的时候，可以得出

$$u^-(t,1)=\phi\left(t,1-ct+e^{-\omega t}+\alpha(t)\right)-e^{-q\eta(t)}\le 1-re^{-q\eta(t)}\le u(t,1)$$

接下来，仅需要证明

$$Lu^-=u_t^--u_{xx}^--u_x^--f\left(t,u^-\right)\le 0.$$

当$t>0$和$x\ge1$时候，使得$u^-(t,x)>0$。

可以得到，

$$\begin{aligned}Lu^-&=\alpha'(t)\phi_\xi-\omega e^{-\omega t}\phi_\xi-\phi_\xi+rq\eta'(t)e^{-q\eta(t)}+f(t,\phi)-f\left(t,u^-\right)\\&=rCe^{-q\eta(t)}\phi_\xi-\omega e^{-\omega t}\varphi_\xi-\varphi_\xi+rq\eta'(t)e^{-q\eta(t)}+f(t,\phi)-f\left(t,u^-\right)\end{aligned}$$

其中，ϕ和ϕ_ξ的取值为$\left(t,x-ct+e^{-\omega t}+\alpha(t)\right)$。

当$t>T_1$和$x\ge1$时，使得$x-ct+e^{-\omega t}+\alpha(t)\le -M$，可以得到

$$1-\frac{\rho}{2}\le\phi\left(t,x-ct+e^{-\omega t}+\alpha(t)\right)<1,$$

和

$$1-\rho\le u^-(t,x)<1.$$

通过$r<\frac{\rho}{2}$，且根据(1.2)可得，

$$f(t,\phi)-f\left(t,u^-\right)\le-\tau re^{-q\eta(t)}.$$

根据$\phi_\xi<0,q\le\frac{\tau}{2},\eta'(t)\le1$和$qe^{-qt}\le1$，可以得到

$$Lu^-\le-\frac{\tau}{2}re^{-q\eta(t)}\le 0.$$

对于$t>T_1$和$x\ge1$，使得$-M\le x-ct+e^{-qt}+\alpha(t)\le M$，那么可以得到$-\phi_\xi\ge a$。

因此，现在取C充分大，使得

$$\begin{aligned}Lu^-&=rCe^{-q\eta(t)}\phi_\xi-\omega e^{-\omega t}\phi_\xi-\phi_\xi+rq\eta'(t)e^{-q\eta(t)}+f(t,\phi)-f\left(t,u^-\right)\\&\le arCe^{-q\eta(t)}+rq\eta'(t)e^{-q\eta(t)}-\omega e^{-\omega t}\phi_\xi-\phi_\xi+\left\|f_u(t,u)\right\|_{L^\infty}re^{-q\eta(t)}\\&\le 0.\end{aligned}$$

对于$t>T_1$和$x\ge1$，使得$x-ct+e^{-qt}+\alpha(t)\ge M$，有

$$0<\phi\left(t,x-ct+e^{-qt}+\alpha(t)\right)<\rho \text{ 和 } 0\le u^-(t,x)\le\rho,$$

现在，可以从(2)得到，

$$f(t,\phi)-f\left(t,u^-\right)\le-\tau re^{-q\eta(t)}.$$

根据$\phi_\xi<0,q\le\frac{\tau}{2},\eta'(t)\le1$和$rqe^{-qt}\le1$，可以得到

$$Lu^- \le rCe^{-q\eta(t)}\phi_\xi - \frac{\tau}{2}re^{-q\gamma(t)} \le 0.$$

因此，综上所述，$Lu^- \le 0$。

至此，完成了引理 2.1 (i)的证明。然后，可以从比较原理得出(6)。

对于(ii)的证明，与证明(i)的方法类似，可以证得 $Lu^+ \ge 0$。

引理 2.2 设 $u(t,x)$ 是(1)的解，且它是增长的。那么，对于任意 $0<c_1<c$，存在常数 λ，使得

$$\sup_{0<x\le c_1 t}\left(1-u(t,x)\right) = o\left(e^{-\lambda t}\right), \quad t\to+\infty.$$

证明： 令 $0<c_1<c$，并且 $c'=(c_1+c)/2$。可以根据比较论证和常数 $\lambda>0$，证得

$$1-u(t,c_1 t) = o\left(e^{-\lambda t}\right), \quad t\to+\infty. \tag{8}$$

现在取

$$\delta := c-c'-1>0.$$

然后取 $r\in(0,\rho)$，使得

$$r \le \frac{a\delta}{\left\|f_u(t,u)\right\|_{L^\infty}+\tau},$$

其中，ρ，τ 和 a 分别由(2)和(5)定义。现在取 $\gamma\in(0,\eta)$，使得

$$\gamma^2-\gamma\le\tau.$$

当 $t>0$ 和 $x\in R$ 时，定义

$$u_-(t,x) := \max\left\{\phi(t,x-c't)-re^{-\gamma x},0\right\}.$$

下面，将要证明 $u_-(t,x)$ 是(1)的一个下解。

根据(6)，并且由于 $\phi(0,x)=O\left(e^{-\mu\xi}\right), x\to+\infty$，所以存在 $T_1>0$，使得

$$u(T_1,x) \ge \phi(0,x)-re^{-\gamma x}, \quad x\ge 0$$

和

$$u(t,0)\ge 1-r, \quad t\ge T_1.$$

可知，当 $x\ge 0$ 时，则有 $u(T,x)\ge u_-(0,x)$ 和当 $t\ge T_1$ 时，有 $u(t,0)\ge u_-(t,0)$。那么，只需要证明当 $t\ge T_1$ 和 $x\ge 0$ 时，有 $u_->0$ 且

$$Lu_- := (u_-)_t-(u_-)_{xx}-(u_-)_x-f(t,u_-)\le 0.$$

通过计算，可以得出

$$\begin{aligned} Lu_- &= (c-c'-1)\phi_\xi + \left(r\beta^2-r\beta\right)e^{-\beta x}+f(t,\phi)-f(t,u_-) \\ &\le \alpha\phi_\xi + \tau re^{-\beta x}+f(t,\phi)-f(t,u_-), \end{aligned}$$

其中，ϕ 和 ϕ_ξ 取值于 $(t,x-c't)$。接下来，运用(3)中所定义的 M，可以得到，当 $t\ge T_1$ 和 $x\ge 0$ 时，使得 $x-c't\le -M$ 和 $x-c't\ge M$，有 $1-\rho\le u_-(t,x)\le 1$ 和 $0\le u_-(t,x)\le\rho$。

因此，

$$f(t,\phi)-f(t,u_-)\le -\tau re^{-\gamma x}$$

由于 $\phi_\xi < 0$，则可得 $Lu_- \le 0$。当 $r \ge T_1$ 和 $x \ge 0$ 时，使得 $-M \le x - c't \le M$，则有，$-\phi_\xi > a$。那么，可有(8)得出

$$L[u_-] \le -a\alpha + \left(\tau + \left\| f_u(t,u) \right\|_{L^\infty}\right) r\mathrm{e}^{-\gamma x} \le 0.$$

综上所述，由比较原理可知，当 $t \ge T_1$ 和 $x \ge 0$ 时，

$$u(t,x) \ge u_-(t,x) \ge \phi(t, x - c't) - r\mathrm{e}^{-\gamma x}.$$

由此可得，(8)成立。这就完成了证明。

现在准备证明定理 2.1。

证明：设 $u(t,x)$ 是(1)的解，固定 $r \in (0,\rho)$，因为 $\phi(t,-\infty) = 1$ 且 $\phi(t,+\infty) = 0$，使得当 $T_2 = k_1 T$，$k_1 \in Z$，其中 T 为周期且 $x \ge 0$ 时，

有

$$u(T_2, x) \le \phi(0, x+1) + r.$$

通过引理 2.1，可知，当 $t > T_1$ 和 $x > 0$ 时，有

$$u(T_1 + t, x) \le \phi\left(t, x - ct + r\mathrm{e}^{-qt} - \alpha(t)\right) + r\mathrm{e}^{-q\eta(t)}.$$

通过引理 2.2，可知，当 $T_3 = k_2 T > 0$，$k_2 \in Z$，使得

$$u(T_3, x) \ge \phi(0, x-1) - r, \quad x \ge 0$$

再根据引理 2.1，可知，当 $t > T_1$ 和 $x \ge 1$ 时，

$$u(T_3 + t, x) \ge \phi\left(t, x - ct + \mathrm{e}^{-qt} + \alpha(t)\right) - r\mathrm{e}^{-q\eta(t)}.$$

又因为 $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) < +\infty$，那么存在常数 α_1 和 α_2，使得当 $t \ge \max\{T_2, T_3\}$ 和 $x \ge 1$ 时，有

$$\phi\left(t, x - ct + \mathrm{e}^{-qt} + \alpha_1\right) - r\mathrm{e}^{-q\eta(t-T_2)} \le u(t,x) \le \phi\left(t, x - ct - \mathrm{e}^{-qt} + \alpha_2\right) + r\mathrm{e}^{-q\eta(t-T_1)}. \tag{9}$$

取序列 $\{t_n := nT\}_{n\in N}$，使得 $t_n \to +\infty, n \to +\infty$。再令

$$u_n(t,x) = u(t + t_n, x + ct_n - t_n).$$

通过(9)，可得，当 $t \ge -t_n + \max\{T_2, T_3\}$ 和 $x \ge 1 - ct_n + \mathrm{e}^{-qt_n}$ 时，

$$\phi\left(t, x - ct + \mathrm{e}^{-q(t+t_n)} + \alpha_1 - \mathrm{e}^{-qt_n}\right) - r\mathrm{e}^{-q\eta(t+t_n-T_2)} \le u_n(t,x) \le \phi\left(t, x - ct - \mathrm{e}^{-q(t+t_n)} + \alpha_2 - \mathrm{e}^{-qt_n}\right) + r\mathrm{e}^{-q\eta(t+t_n-T_1)},$$

再通过抛物线估计，当 $t \in R$ 和 $x \in R$ 时，序列 $u_n(t,x)$ 局部一致收敛到方程

$$(u_\infty)_t = (u_\infty)_{xx} + f(t, u_\infty)$$

的整体解 $u_\infty(t,x)$，可以得到，当 $t \in R$ 和 $x \in R$ 时，有

$$\phi(t, x - ct + \alpha_1) \le u_\infty(t,x) \le \phi(t, x - ct + \alpha_2).$$

那么，从文献[13]所得的关于 $\phi(t, x - ct)$ 的稳定性结果可以知道，存在 $x_0 \in R$，

使得

$$u_\infty(t,x) \equiv \phi(t, x - ct + x_0).$$

所以，对任意 $r > 0$，存在 $N > 0$，有

$$\left| u\left(t_N, x + ct_N - \mathrm{e}^{-qt_N}\right) - \phi(0, x + x_0) \right| < r,$$

通过引理 2.1，可以得到对 $t>t_N$ 和 $x\ge 1$，有

$$\phi\left(t,x-ct+\mathrm{e}^{-qt_N}+\alpha_N\left(t\right)+x_0\right)-r\mathrm{e}^{-q\gamma\left(t-t_N\right)}\le u\left(t,x\right)\le\phi\left(t,x-ct-\mathrm{e}^{-qt_N}-\alpha_N\left(t\right)+x_0\right)+r\mathrm{e}^{-q\gamma\left(t-t_N\right)},$$

其中，$\alpha_N\left(t\right)=\int_{t_N}^{t} rC\mathrm{e}^{-q\gamma(s)}\mathrm{d}s$。那么，当 t_N 充分大时，$\alpha_N\left(t\right)$ 可以任意小，并且由于 r 可以任意小和 $\left|\phi_\xi\right|$ 有界，可得，当 $t>t_N$ 且 t_N 充分大，有

$$\sup_{x\ge 1}\left|u\left(t,x\right)-\phi\left(t,x-ct+x_0\right)\right|$$

足够小。故，可得

$$\sup_{x\ge 1}\left|u\left(t,x\right)-\phi\left(t,x-ct+x_0\right)\right|\to 0,\quad t\to+\infty.$$

这就完成了证明。

参考文献

[1] Britton, N.F. (1986) Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. Academic Press, London.

[2] Fife, P.C. (2013) Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. Vol. 28. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg.

[3] Ma, S. and Zou, X. (2005) Existence, Uniqueness and Stability of Travelling Waves in a Discrete Reaction-Diffusion Monostable Equation with Delay. *Journal of Differential Equations*, **217**, 54-87. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.05.004

[4] Berestycki, H. and Nirenberg, L. (1992) Travelling Fronts in Cylinders. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **9**, 497-572. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30229-3

[5] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

[6] 王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[7] Guo, H. and Monobe, H. (2021) V-Shaped Fronts around an Obstacle. *Mathematische Annalen*, **379**, 661-689. https://doi.org/10.1007/s00208-019-01944-y

[8] Hamel, F., Monneau, R. and Roquejoffre, J.M. (2005) Existence and Qualitative Properties of Multidimensional Conical Bistable Fronts. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, **13**, 1069-1096. https://doi.org/10.3934/dcds.2005.13.1069

[9] Xin, J.X. (1992) Multidimensional Stability of Traveling Waves in a Bistable Reaction-Diffusion Equation, I. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 1889-1899. https://doi.org/10.1080/03605309208820907

[10] Levermore, C.D. and Xin, J.X. (1992) Multidimensional Stability of Traveling Waves in a Bistable Reaction-Diffusion Equation, II. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 1901-1924. https://doi.org/10.1080/03605309208820908

[11] Fife, P.C. and McLeod, J.B. (1977) The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **65**, 335-361. https://doi.org/10.1007/BF00250432

[12] Uchiyama, K. (1985) Asymptotic Behavior of Solutions of Reaction-Diffusion Equations with Varying Drift Coefficients. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **90**, 291-311. https://doi.org/10.1007/BF00276293

[13] Alikakos, N., Bates, P. and Chen, X. (1999) Periodic Traveling Waves and Locating Oscillating Patterns in Multidimensional Domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, **351**, 2777-2805. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02134-0