Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 9-17
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145155

Hans汉斯

一类复合型二阶线性偏微分方程边值问题解的相似构造法

钱　雪，郑鹏社

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月3日；录用日期：2024年3月29日；发布日期：2024年5月11日

摘　要

本文研究了一类复合型二阶线性偏微分方程边值问题，通过将此类复合型偏微分方程的解式进行整理和化简，发现其解式是由左区和右区的引解函数、衔接性条件以及内外区条件的系数组装成的，而引解函数是由微分方程的两个线性无关解构成，且其解具有相似结构的形式，于是提出了求解此类复合型偏微分方程边值问题的相似构造法。经研究发现：相似构造法不仅能够使得部分边值问题的解答过程更加精简、降低了求解此类方程的难度且解式优美，还进一步揭示了解的内在性质和规律，为解决相应的数学问题以及油气藏等方面的工程问题提供了相适合的工具，也为部分软件分析的理论知识打下了基础。

关键词

相似核函数，边值问题，复合微分方程，相似构造

A Similar Construction Method for Solving Boundary Value Problems of a Composite Second-Order Homogeneous Linear Partial Differential Equation

Xue Qian, Pengshe Zheng

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 3rd, 2024; accepted: Mar. 29th, 2024; published: May 11th, 2024

Abstract

In this paper, we study the boundary value problem of a class of composite second-order linear

文章引用: 钱雪, 郑鹏社. 一类复合型二阶线性偏微分方程边值问题解的相似构造法[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 9-17. DOI: 10.12677/pm.2024.145155

partial differential equations, and by sorting out and simplifying the solutions of such composite partial differential equations, it is found that the solution is composed of the induction function of the left and right regions, the cohesive condition and the coefficient of the inner and outer region conditions, and the induction function is composed of two linear independent solutions of the differential equation, and the solutions have a similar structure. It is found that the similarity construction method can not only simplify the solution process of some boundary value problems, reduce the difficulty of solving such equations and solve them beautifully, but also further reveal the intrinsic properties and laws of understanding, provide suitable tools for solving corresponding mathematical problems and engineering problems in oil and gas reservoirs, and also lay a foundation for the theoretical knowledge of some software analysis.

Keywords

Similar Kernel Functions, Boundary Value Issues, Compound Differential Equations, Similar Construction

1. 引言

任何实数均可表示为连分式[1]，数论对此进行了广泛深入的研究。对于一些边值问题，早有学者对其解的表达式进行了研究和整理，发现其解具有类似于实数的连分数表达式的形式，如李顺初先对二阶常系数齐次线性微分方程边值问题[2]进行了研究，接着又对二阶齐次线性微分方程边值问题[3]的解式进行了研究整理，得到了它们的解式的相似结构形式，并说明了其解式可以写成连分式的形式。随后，李顺初[4]对以前得出的有关于微分方程的边值问题解的相似结构的研究成果进行了综述和评论，并提出了相似构造法。基于此，许多学者对一些特殊复合型微分方程的边值问题进行了研究，如复合扩展变型 Bessel 方程[5]、复合型第二种 Weber 方程[6]、复合型 Tschebycheff 方程一类[7]等边值问题。近年来，许多学者利用相似构造理论不断的发掘和完善一些微分方程的边值问题的求解，更深入地研究了三区复合型微分方程[8]、三区间复合型第一、种与二种 Weber 方程[9] [10]、三区复合型 Tschebycheff 方程[11]、三区间复合型超几何方程[12]、三区复合型连带 Legendre 方程[13]和三区间复合 Laguerre 方程[14]等边值问题，得出了具有统一形式的解式的相似结构形式，并总结出相应类型的相似构造步骤。

微分方程广泛应用于电磁学[15]、海洋学[16]、图像的去噪和增强[17]以及油气藏[18] [19] [20]等领域。在油气藏工程中，1966 年，Chatas [21]建立了油气藏球向渗流模型，其数学模型经过无量纲化及拉普拉斯等变换，变成了求解一类简单的二阶微分方程的边值问题。2013 年，王芙蓉等[22]利用相似构造法求解了三种不同内边界下的球状基双孔介质不稳定渗流模型中，其求解过程是经过变量替换及拉普拉斯等变换后，将所求解的渗流模型问题变成了一类二阶微分方程的边值问题，结果表明相似结构法可以避免复杂的求解过程。随着研究者们对油气储层边界条件的不断优化，为建立更加符合油气储层的渗流模型，研究者引入了弹性外边界条件[23]。随后唐娅等[24]建立了具有弹性外边界条件(弹性系数为常数)的双孔油藏球向非线性渗流模型，根据渗流模型的求解需要，对一类二阶线性微分方程的边值问题进行了求解和相似构造，最后表明微分方程解的相似构造不仅可以简化模型的求解过程，还为更为复杂的油气藏渗流模型的求解提供了新思路。

基于前面的研究，可以看到油藏工程中微分方程的边值问题的相似构造类型地在不断地扩充，但在页岩气藏方面，尤其是对于更为复杂的页岩气藏渗流的数学模型的求解及分析参数，少有研究者考虑更贴合页岩储层外边界的真实状况，并建立更符合实际情况的页岩气藏渗流模型。故基于多重页岩气藏渗流模型[25]，复合型微分方程的边值问题[26]的相似构造过程，为研究和分析具有弹性外边界条件(弹性系数为函数)的多重页岩气藏渗流模型，本文探索了如下一类复合型二阶线性偏微分方程的边值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 y_1(x,z)}{\partial^2 x} - A_1 y_1(x,z) = 0, (a < x < c) \\
\dfrac{\partial^2 y_2(x,z)}{\partial^2 x} - A_2 y_2(x,z) = 0, (c < x < b) \\
\left[E y_1(x,z) + (1+EF) \dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x} \right]_{x=a} = Q, \\
y_1(x,z)\big|_{x=c} = \alpha y_2(x,z)\big|_{x=c}, \\
\left. \dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x} \right|_{x=c} = \beta \left. \dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x} \right|_{x=c}, \\
\left[(Mx+K) y_2(x,z) + N \dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial z} + x \dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x} \right]_{x=b} = 0.
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $y_i = y(x,z), (i=1,2)$ 是关于 x,z 的二元函数， A_1, A_2 是关于 z 的函数，且 $A_1(z), A_2(z) > 0$ a,b,c,Q,E,F,M,N,K,β 均为已知的实常数，且 $0 \le a < c < b, \beta \ne 0, D \ne 0, M^2 + N^2 \ne 0$。

为方便探索这一类复合型二阶线性偏微分方程的边值问题，本文先做以下的准备工作。

2. 预备知识

本小节先给出二阶齐次线性偏微分方程(2)的通解，再构造引解函数。

$$
\frac{\partial^2 y_i(x,z)}{\partial^2 x} - A_i y_i(x,z) = 0, (i=1,2) \tag{2}
$$

引理 1 二阶齐次线性偏微分方程(2)的通解为

$$
\begin{cases}
y_1 = C_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{A_1}} + C_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{A_1}} \\
y_2 = C_3 \mathrm{e}^{x\sqrt{A_2}} + C_4 \mathrm{e}^{-x\sqrt{A_2}}
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 是关于 z 的待定函数系数。

证明 对二阶齐次线性偏微分方程(2)的求解，本质上是求形如 $y'' - A_i y = 0$ （A_i 此时可视为常系数)的二阶齐次线性微分方程的解。由于 $A_i > 0$，故方程一定有个线性无关解，且其通解[27]为(3)式。

由方程(2)的两个线性无关解 $\mathrm{e}^{x\sqrt{A_i}}, \mathrm{e}^{-x\sqrt{A_i}}$ $(i=1,2)$ 构造如下的三元函数。

引理 2 构造三元函数(称为引解函数)

$$
\begin{aligned}
\varphi^i(x,\xi,z) = \varphi^i_{0,0}(x,\xi,z) &= \mathrm{e}^{x\sqrt{A_i}} \mathrm{e}^{-\xi\sqrt{A_i}} - \mathrm{e}^{\xi\sqrt{A_i}} \mathrm{e}^{-x\sqrt{A_i}} \\
&= 2\sinh\left[\sqrt{A_i}(x-\xi) \right],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}^{i}(x,\xi,z) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{0,0}^{i}(x,\xi,z) \\ &= -\sqrt{A_i}\left[e^{x\sqrt{A_i}}e^{-\xi\sqrt{A_i}} + e^{\xi\sqrt{A_i}}e^{-x\sqrt{A_i}}\right] \\ &= -2\sqrt{A_i}\cosh\left[\sqrt{A_i}(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0}^{i}(x,\xi,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^{i}(x,\xi,z) \\ &= \sqrt{A_i}\left[e^{x\sqrt{A_i}}e^{-\xi\sqrt{A_i}} + e^{\xi\sqrt{A_i}}e^{-x\sqrt{A_i}}\right] \\ &= 2\sqrt{A_i}\cosh\left[\sqrt{A_i}(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^{i}(x,\xi,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{0,0}^{i}(x,\xi,z) \\ &= -A_i\left[e^{x\sqrt{A_i}}e^{-\xi\sqrt{A_i}} - e^{\xi\sqrt{A_i}}e^{-x\sqrt{A_i}}\right] \\ &= -2A_i\sinh\left[\sqrt{A_i}(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}^{*}(x,\xi,z) &= e^{x\sqrt{A_2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\xi\sqrt{A_2}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\xi\sqrt{A_2}}\right)e^{-x\sqrt{A_2}} \\ &= -\xi\left(\sqrt{A_2}\right)'\left[e^{x\sqrt{A_2}}e^{-\xi\sqrt{A_2}} + e^{\xi\sqrt{A_2}}e^{-x\sqrt{A_2}}\right] \\ &= -2\xi\left(\sqrt{A_2}\right)'\cosh\left[\sqrt{A_2}(x-\xi)\right],\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^{*}(x,\xi,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x\sqrt{A_2}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\xi\sqrt{A_2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x\sqrt{A_2}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\xi\sqrt{A_2}}\right) \\ &= -\xi\sqrt{A_2}\left(\sqrt{A_2}\right)'\left[e^{x\sqrt{A_2}}e^{-\xi\sqrt{A_2}} - e^{\xi\sqrt{A_2}}e^{-x\sqrt{A_2}}\right] \\ &= -2\xi\left(\sqrt{A_2}\right)'\sinh\left[\sqrt{A_2}(x-\xi)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

证明 通过直接计算即可得到。

通过后面的证明和计算，可整理出复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)的相似构造解式及一些推论。

3. 主要定理及其证明

定理 1 若复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)有唯一解，那么其左区解$(a<x<c)$为：

$$y_1 = Q\frac{1}{E+\dfrac{1}{F+\Phi(a)}}\frac{1}{F+\Phi(a)}\Phi(x) \tag{10}$$

其右区解$(c<x<b)$为：

$$y_2 = Q\frac{1}{E+\dfrac{1}{F+\Phi(a)}}\frac{1}{F+\Phi(a)}\frac{\varphi_{0,1}^{1}(c,c)}{\Phi^{*}(c)\varphi_{1,1}^{1}(a,c)-\beta\varphi_{1,0}^{1}(a,c)}\Phi^{*}(x) \tag{11}$$

其中$\Phi^{*}(x)$是右相似核函数，且为：

$$\Phi^*(x)=\frac{(Mb+K)\varphi_{0,0}^2(x,b)+N\varphi_{0,1}^*(x,b)+b\varphi_{0,1}^2(x,b)}{(Mb+K)\varphi_{1,0}^2(c,b)+N\varphi_{1,1}^*(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)},(c<x<b) \tag{12}$$

$\Phi(x)$ 是左相似核函数，且为：

$$\Phi(x)=\frac{\alpha\Phi^*(c)\varphi_{0,1}^1(x,c)-\beta\varphi_{0,0}^1(x,c)}{\alpha\Phi^*(c)\varphi_{1,1}^1(a,c)-\beta\varphi_{1,0}^1(a,c)},(a<x<c) \tag{13}$$

证明 由引理 1 可知边值问题(1)的左、右区通解可表示为

$$y_1=C_1\mathrm{e}^{x\sqrt{A}}+C_2\mathrm{e}^{-x\sqrt{A}} \tag{14}$$

$$y_2=C_3\mathrm{e}^{x\sqrt{B}}+C_4\mathrm{e}^{-x\sqrt{B}} \tag{15}$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 是关于 z 的待定函数系数。

将通解带入边值问题中的左边界条件、交界点条件和右边界条件有

$$C_1\mathrm{e}^{a\sqrt{A}}\left[E+(1+EF)\sqrt{A}\right]+C_2\mathrm{e}^{-a\sqrt{A}}\left[E-(1+EF)\sqrt{A}\right]=Q \tag{16}$$

$$C_1\mathrm{e}^{c\sqrt{A}}+C_2\mathrm{e}^{-c\sqrt{A}}-C_3\mathrm{e}^{c\sqrt{B}}-C_4\mathrm{e}^{-c\sqrt{B}}=0 \tag{17}$$

$$C_1\sqrt{A}\mathrm{e}^{c\sqrt{A}}-C_2\sqrt{A}\mathrm{e}^{-c\sqrt{A}}-C_3\beta\sqrt{B}\mathrm{e}^{c\sqrt{B}}+C_4\beta\sqrt{B}\mathrm{e}^{-c\sqrt{B}}=0 \tag{18}$$

$$C_3\mathrm{e}^{b\sqrt{B}}\left[(Mb+K)+Nb\left(\sqrt{B}\right)'+b\sqrt{B}\right]+C_4\mathrm{e}^{-b\sqrt{B}}\left[(Mb+K)-Nb\left(\sqrt{B}\right)'-b\sqrt{B}\right]=0 \tag{19}$$

联立方程(16)~(19)，因为边值问题有唯一解，所以联立的线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，结合引理 2，经计算可得

$$\begin{aligned}D=&\left[E\varphi_{0,0}^1(a,c)+(1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,c)\right](-1)\beta\left[(Mb+K)\varphi_{1,0}^2(c,b)+N\varphi_{1,1}^*(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)\right]\\&+\left[E\varphi_{0,1}^1(a,c)+(1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,c)\right]\alpha\left[(Mb+K)\varphi_{0,0}^2(c,b)+N\varphi_{0,1}^*(c,b)+b\varphi_{0,1}^2(c,b)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}D_1=Q\Big\{&(-1)\beta\mathrm{e}^{-c\sqrt{A}}\left[(Mb+K)\varphi_{1,0}^2(c,b)+N\varphi_{1,1}^*(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)\right]\\&-\alpha\sqrt{A}\mathrm{e}^{-c\sqrt{A}}\left[(Mb+K)\varphi_{0,0}^2(c,b)+N\varphi_{0,1}^*(c,b)+b\varphi_{0,1}^2(c,b)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}D_2=Q\Big\{&\beta\mathrm{e}^{c\sqrt{A}}\left[(Mb+K)\varphi_{1,0}^2(c,b)+N\varphi_{1,1}^*(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)\right]\\&-\alpha\sqrt{A}\mathrm{e}^{c\sqrt{A}}\left[(Mb+K)\varphi_{0,0}^2(c,b)+N\varphi_{0,1}^*(c,b)+b\varphi_{0,1}^2(c,b)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

$$D_3=Q\mathrm{e}^{-b\sqrt{B}}\left[(Mb+K)-Nb\left(\sqrt{B}\right)'-b\sqrt{B}\right]\varphi_{0,1}^1(c,c) \tag{23}$$

$$D_4=-Q\mathrm{e}^{b\sqrt{B}}\left[(Mb+K)+Nb\left(\sqrt{B}\right)'+b\sqrt{B}\right]\varphi_{0,1}^1(c,c) \tag{24}$$

根据 Cramer 法则可求出 $C_1=\frac{D_1}{D},C_2=\frac{D_2}{D},C_3=\frac{D_3}{D},C_4=\frac{D_4}{D}$，然后整理计算可以得出边值问题(1)的左区解和右区解。

经过简单计算和观察，可得以下几个推论。

推论 1 在复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)中，若右边界条件 $y_2(b)=0$ (即 $M^2+K^2\neq 0$，$N=0$，$\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=0$)，则右相似核函数为

$$\Phi^*(x)=\frac{(Mb+K)\varphi_{0,0}^2(x,b)+b\varphi_{0,1}^2(x,b)}{(Mb+K)\varphi_{1,0}^2(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)}, \tag{25}$$

推论 2 在复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)中，若右边界条件 $\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}\right|_{x=b}=0$ (即 $M,K=0$，$N\neq 0$，$\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=0$)，则右相似核函数为

$$\Phi^*(x)=\frac{N\varphi_{0,1}^*(x,b)+b\varphi_{0,1}^2(x,b)}{N\varphi_{1,1}^*(c,b)+b\varphi_{1,1}^2(c,b)} \tag{26}$$

推论 3 在复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)中，若右边界条件 $\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=b}=0$ (即 $M,K=0$，$N=0$)，则右相似核函数为

$$\Phi^*(x)=\frac{\varphi_{0,1}^2(x,b)}{\varphi_{1,1}^2(c,b)} \tag{27}$$

推论 4 复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)的第一个连分式与其导数有如下关系

$$\left[y_1(x,z)+Fy_1'(x,z)\right]_{x=a}=\cfrac{Q}{E+\cfrac{1}{F+\Phi(a)}} \tag{28}$$

4. 相似构造法步骤

通过上述求解复合型二阶齐次线性偏微分方程的边值问题(1)的过程，可整理并归纳出相似构造法的具体步骤：

第一步由边值问题(1)中的左区定解方程和右区定解方程可得它们各自的两个线性无关解 $\mathrm{e}^{x\sqrt{A_i}},\mathrm{e}^{-x\sqrt{A_i}}\ (i=1,2)$，再通过线性无关解 $\mathrm{e}^{x\sqrt{A_i}},\mathrm{e}^{-x\sqrt{A_i}}\ (i=1,2)$ 构造三元函数 $\varphi_{0,0}^i(x,\xi,z)(i=1,2)$。

第二步由 $\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)(j,k=0,1),\varphi_{0,1}^*(x,\xi,z),\varphi_{1,1}^*(x,\xi,z)$ 和右边界条件 $\left[(Mx+K)y_2(x,z)+N\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}+x\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=b}=0$ 的系数 M,N,K 及 $x=b$ 进行组装，可以得到右相似核函数 $\Phi^*(x)$ 的表达式。

第三步 $\varphi_{0,0}^1(x,\xi,z)(j,k=0,1)$、$\Phi^*(c)$ 以及边值问题(1)中交界点 $x=c$ 处的交界条件 $\left.y_1(x,z)\right|_{x=c}=\alpha\left.y_2(x,z)\right|_{x=c},\left.\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right|_{x=c}=\beta\left.\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right|_{x=c}$ 的系数 α,β 来组装左相似核函数 $\Phi(x)$，即(13)式。

第四步由左边界条件 $\left[Ey_1(x,z)+(1+EF)\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=a}=Q$ 中的系数 Q,E,F 和 $\Phi(x)$ 可组装得边值问题(1)的左 $(a<x<c)$、右 $(c<x<b)$ 区解 y_1,y_2，即(10)、(11)式。

5. 举例

根据以上相似构造法，求解边值问题(如 $A_1=z^2,A_2=4z^2,a=1,c=2,b=4,E=1,F=2,Q=1,M=N=K=1$)：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_1(x,z)}{\partial^2 x}-z^2 y_1(x,z)=0,(1<x<2)\\ \dfrac{\partial^2 y_2(x,z)}{\partial^2 x}-4z^2 y_2(x,z)=0,(2<x<4)\\ \left[y_1(x,z)+3\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=1}=1,\\ y_1(x,z)\big|_{x=2}=y_2(x,z)\big|_{x=2},\\ \dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2}=\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2},\\ \left[(x+1)y_2(x,z)+\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=4}=0.\end{cases} \tag{29}$$

第一步由(29)中的左区定解方程可知它的两个线性无关解为 e^{xz},e^{-xz}，并构造三元函数

$$\varphi_{0,0}^1(x,\xi,z)=2\sinh\left[z(x-\xi)\right] \tag{30}$$

且

$$\varphi_{0,1}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^1(x,\xi,z)=-2z\cosh\left[z(x-\xi)\right] \tag{31}$$

$$\varphi_{1,0}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^1(x,\xi,z)=2z\cosh\left[z(x-\xi)\right] \tag{32}$$

$$\varphi_{1,1}^1(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^1(x,\xi,z)=-8z^2\sinh\left[z(x-\xi)\right] \tag{33}$$

左区定解方程可得到线性无关解 e^{2xz},e^{-2xz}，构造函数

$$\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)=2\sinh\left[2z(x-\xi)\right] \tag{34}$$

且

$$\varphi_{0,1}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)=-4z\cosh\left[2z(x-\xi)\right] \tag{35}$$

$$\varphi_{1,0}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)=4z\cosh\left[2z(x-\xi)\right] \tag{36}$$

$$\varphi_{1,1}^2(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)=-8z^2\sinh\left[2z(x-\xi)\right] \tag{37}$$

$$\varphi_{0,1}^*(x,\xi,z)=e^{2zx}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-2z\xi}\right)-e^{-2zx}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{2z\xi}\right)=-4\xi\cosh\left[2z(x-\xi)\right] \tag{38}$$

$$\varphi_{1,1}^*(x,\xi,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x\sqrt{T}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\xi\sqrt{T}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x\sqrt{T}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\xi\sqrt{T}}\right)=-8\xi z\sinh\left[2z(x-\xi)\right], \tag{39}$$

第二步由 $\varphi_{0,0}^2(x,\xi,z)(j,k=0,1),\varphi_{0,1}^*(x,\xi,z),\varphi_{1,1}^*(x,\xi,z)$ 和右边界条件 $\left[(x+1)y_2(x,z)+\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\right]_{x=4}=0$ 的系数 $M=N=K=1$ 以及 $x=4$ 组装可得右相似核函数

$$\Phi^*(x)=\frac{5\varphi_{0,0}^2(x,b)+\varphi_{0,1}^*(x,b)+4\varphi_{0,1}^2(x,b)}{5\varphi_{1,0}^2(c,b)+\varphi_{1,1}^*(c,b)+4\varphi_{1,1}^2(c,b)},(2<x<4) \tag{40}$$

第三步 $\varphi_{0,0}^{1}(x,\xi,z)(j,k=0,1)$、$\Phi^{*}(2)$ 以及边值问题(29)中交界点 $x=2$ 处的交界条件 $y_1(x,z)\big|_{x=2}=y_2(x,z)\big|_{x=2}, \dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2}=\dfrac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=2}$ 的系数 $\alpha=\beta=1$ 来组装左相似核函数

$$\Phi(x)=\frac{\Phi^{*}(2)\varphi_{0,1}^{1}(x,c)-\varphi_{0,0}^{1}(x,c)}{\Phi^{*}(2)\varphi_{1,1}^{1}(a,c)-\varphi_{1,0}^{1}(a,c)},(1<x<2) \tag{41}$$

第四步由左边界条件 $\left[y_1(x,z)+3\dfrac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\right]_{x=1}=1$ 中的系数 $Q=E=1, F=2$ 和 $\Phi(x)$ 可组装得边值问题(29)的左 $(1<x<2)$ 解

$$y_1=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\Phi(1)}}\frac{1}{2+\Phi(1)}\Phi(x) \tag{42}$$

右 $(2<x<4)$ 区解

$$y_2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\Phi(1)}}\frac{1}{2+\Phi(1)}\frac{\varphi_{0,1}^{1}(2,2)}{\Phi^{*}(2)\varphi_{1,1}^{1}(1,2)-\varphi_{1,0}^{1}(1,2)}\Phi^{*}(x) \tag{43}$$

6. 结论

复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)的左区解和右区解是由左区相似核函数、右区相似核函数、左边界条件和交界点的衔接条件中的系数进行组装而成的，都具有相似结构。

复合型二阶线性偏微分方程的边值问题(1)的左、右相似核函数是由引解函数、右边界条件和交界点的衔接条件中的系数组装的。

相似构造法提供了一种可以通过利用方程的两个线性无关解构造引解函数，并观察边值条件系数，进而达到快速组装解的表达式的方法。该方法避免了复杂的推导过程，能更加方便、快捷地解决实际问题。

致　谢

作者感谢所有认真阅读并对这篇文章提出宝贵意见的审稿人。

基金项目

这项工作被四川省科技厅科技计划项目(2015JY0245)和西华大学研究生教育质量工程项目资助(YJSKC202204)所支持。

参考文献

[1] 闵嗣鹤，严士健．初等数论[M]．第 3 版．北京：高等教育出版社, 2003: 149-162.

[2] 李顺初．二阶常系数齐次线性微分方程边值问题的解的相似结构[J]．西华大学学报(自然科学版)，2007，26(1): 84-85.

[3] 李顺初．二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]．西华大学学报(自然科学版)，2009，28(5): 40-41+90.

[4] 李顺初．微分方程解的相似结构初探与展望[J]．西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226+238.

[5] 陈宗荣．复合扩展变型 Bessel 方程边值问题的相似构造解法[J]．凯里学院学报, 2012, 30(3): 5-8.

[6] 白丽霞，李顺初，桂东冬．复合型第二种 Weber 方程边值问题的新解法[J]．中北大学学报(自然科学版), 2014(6):

633-637
[7] 夏文文, 李顺初, 桂东冬. 求解复合型 Tschebycheff 方程一类边值问题的相似构造法[J]. 陕西理工学院学报(自然科学版), 2015(2): 69-72.
[8] 董晓旭. 三区复合型微分方程边值问题解的构造及其应用[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2015.
[9] 李顺初, 何签, 夏星, 桂钦民. 三区间复合型第二种 Weber 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2021, 36(4): 1-9.
[10] 何签, 李顺初, 董晓旭, 夏星, 彭春. 三区间复合型第一种 Weber 方程边值问题求解的新方法[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2022, 51(1): 59-67.
[11] 郑鹏社, 杨雨, 李顺初, 桂钦民. 三区复合型 Tschebycheff 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2022, 37(4): 8-14.
[12] 郑鹏社, 汤杰. 三区间复合型超几何方程边值问题解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2023, 42(2): 103-110.
[13] 郑鹏社, 杨雨, 李顺初. 三区复合型连带 Legendre 方程边值问题的相似构造法[J]. 温州大学学报(自然科学版), 2023, 44(3): 11-19.
[14] 李顺初, 付雪倩, 范林, 邵东凤, 刘盼. 三区间复合 Laguerre 方程边值问题的解的相似结构[J]. 陕西理工大学学报(自然科学版), 2023, 39(4): 69-75.
[15] 叶云志, 陈伟华. 勒让德函数在电磁场求解中的应用[J]. 中外企业家, 2012(16): 180.
[16] 刘巍, 肖汶斌, 程兴华, 等. 提高近场精度的海洋声学快速场改进模型[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(6): 168-174.
[17] 董婵婵, 武怀彬, 张芳, 高小帆, 桂志国. 一种改进的基于偏微分方程图像的降噪算法[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2014(6): 745-749.
[18] Li, S., Zhang, D., Zheng, P. and Gui, Q. (2017) Similar Structure of Solution for Triple Media Shale Gas Reservoir. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **152**, 67-80. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.02.008
[19] Luo, J., Zheng, P., Li, S., Dong, X. and Gui, Q. (2023) Research on Nonlinear Spherical Seepage Model Solution of Fractal Composite Reservoir considering Quadratic Pressure Gradient under Elastic Outer Boundary. *Petroleum Science and Technology*, 1-28. https://doi.org/10.1080/10916466.2023.2179068
[20] Zheng, P.-S., Zheng, Y.-S., Li, S.-C., Leng, L.-H. and Xia, X. (2021) Analysis of Flow Characteristics of the Dual Media Shale Gas Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *SN Applied Sciences*, **3**, Article No. 800. https://doi.org/10.1007/s42452-021-04787-y
[21] Chatas, A.T. (1966) Unsteady Spherical Flow in Petroleum Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, **6**, 102-114. https://doi.org/10.2118/1305-PA
[22] Wang, F.R , Li, S.C., Zheng, P.S., *et al*. (2013) Similar Constructive Method for Solving the Solution of Unstable Seepage Flow Model in the Spherical Shaped Matrix of Dual-Porosity Reservoir. In: Sung, W.-P., Kao, J.C.M. and Chen, R., Eds., *Environment, Energy and Sustainable Development*, CRC Press, Boca Raton, 725-729.
[23] Li, S., Zhao, C., Zheng, P. and Gui, Q. (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, **175**, 280-285. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042
[24] 唐娅. 基于弹性外边界的双孔油藏球向非线性渗流模型解的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2023.
[25] 李冬冬. 页岩气藏多重介质渗流规律研究[D]: [博士学位论文]. 青岛: 中国石油大学(华东), 2020.
[26] 李顺初. 复合型微分方程的边值问题的相似构造解法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013(4): 27-31.
[27] Bronson, R. (1994) Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Equations. McGraw-Hill, New York, 77-78.