**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(5), 281-292
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145185

Hans汉斯

# 变指数中心Morrey空间上的分数次积分多线性交换子

**辛银萍**

兰州财经大学信息工程与人工智能学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年4月8日；录用日期：2024年5月9日；发布日期：2024年5月30日

## 摘 要

**该文借助分数次积分在变指数Lebesgue空间的有界性，通过应用函数的分层分解和实变技巧，得到了由分数次积分和$\lambda$-中心BMO函数生成的多线性交换子在变指数中心Morrey空间上的有界性。**

## 关键词

**分数次积分，多线性交换子，$\lambda$-中心BMO空间，变指数$\lambda$-中心Morrey空间**

# Multilinear Commutators of Fractional Integral Operator on Central Morrey Spaces with Variable Exponent

**Yinping Xin**

School of Information Engineering and Artificial Intelligence, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 8th, 2024; accepted: May 9th, 2024; published: May 30th, 2024

## Abstract

**With the help of the boundedness of the fractionalintegral operator on Lebesgue space with variable exponent, by applying hierarchical decomposition of function and real variable techniques, the boundedness of multilinear commutators generated by fractional singular integrals and with $\lambda$-central BMO symbols is obtained on central Morrey spaces with variable exponent.**

文章引用: 辛银萍. 变指数中心 Morrey 空间上的分数次积分多线性交换子[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 281-292.
DOI: 10.12677/pm.2024.145185

**Keywords**

**Fractional Integral Operator, Multilinear Commutators, $\lambda$-Central BMO Space, Variable Exponent $\lambda$-Central Morrey Space**



## 1. 引言

设 $0<\alpha<n$，分数次积分算子 $T_\alpha$ 定义为

$$T_\alpha(f)(x):=\int_{R^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y. \tag{1}$$

分数次积分算子是调和分析的重要组成部分，有着深刻的偏微分方程背景，该算子在调和分析中起着非常重要的作用，特别是在研究函数的可微性及光滑性时。近几十年对该算子的研究由着丰富的结果。其中最经典的是，1970 年 E.M. Stein 在文献[1]中给出了分数次积分是 $(p,q)$ 型的，该结果是 S. Sobolev 在 1938 年证明的，还给出了在 1950 年由 A. Zygmund 证明的分数次积分算子是弱 $(1,q)$ 型有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$。多线性算子在调和分析中也有很重要的地位，多线性算子理论在偏微分方程与多复变分析中都有广泛的应用。多线性算子理论的研究起源于 R. Coifmen [2]和 Y. Meyer [3]的工作。1999 年，C. Kenig 和 E.M. Stein 在文献[4]中给出了多线性分数次积分算子的定义，并证明了其在 $L^p(R^n)$ 空间上的有界性。

1991 年，Kováčik，Rákosnik [5]较系统地介绍了变指数 Lebesgue 空间、变指数 Sobolev 空间及其在偏微分方程中的应用。变指数函数空间与经典函数空间最重要的区别在于，在变指数函数空间中积分不等式不再成立。因此 Hardy-Littlewood 极大算子在变指数 Lebesgue 空间中的有界性不再成立。2004 年，Diening 在文献[6]中给出了使得上述有界性成立的充要条件，即 log-Hölder 条件。以此为基础，在研究变指数函数空间中的一些重要算子及其交换子的有界性问题上取得了一系列成果。Diening [7]证明了分数次积分算子从变指数空间 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 到变指数空间 $L^{q(\cdot)}(R^n)$ 的有界性，其中 $p(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 在有界区域中满足 log-Hölder 条件。2006 年，Cruz-Uribe，Fiorenza，Martell and Perez [8]证明了调和分析中的一些经典算子，如极大算子、奇异积分、分数积分及其交换子在变指数 Lebesgue 空间上的有界性。

1938 年，Morrey [9]在研究二阶椭圆偏微分方程解的局部正则性时首次引入了一类新的函数空间，即经典的 Morrey 空间，它是 Lebesgue 空间的一个自然推广。近年来，Morrey 空间算子的有界性引起学者们的广泛关注，并且研究发现偏微分方程的许多性质与 Morrey 空间一些算子的有界性相关。在 1987 年，Chiarenza 和 Frasca [10]研究了 Hardy-Littlewood 极大算子和 C-Z 奇异积分算子在 Morrey 空间上的有界性。2009 年，在 Morrey 空间研究的基础上，Komori 和 Shirai [11]定义了加权 Morrey 空间，并研究了一些调和分析中的经典算子的性质。此后，Alvarez，Guzman-Partida 和 Lakey [12]在研究中心 BMO 空间与 Morrey 空间的关系时，引入了 $\lambda$-中心 CBMO 空间和 $\lambda$-中心 Morrey 空间，这是有界中心平均振荡空间的推广。这些 $\lambda$-中心有界平均振动空间、Morrey 型空间和相关的泛函空间在研究算子(包括奇异积分和 Hausdorff 算子)的有界性方面有着广泛的应用。

1995 年，Lu 和 Yang [13]定义了中心有界平均振荡空间，并且著名的 John-Nirenberg 不等式在此类中心有界平均振荡空间中将不再成立。1996 年，Fan 等[14]建立了一类算子交换子在齐次 Morrey 空间中的有界性，包括 Hardy-Littlewood 极大算子、Calderon-Zygmund 奇异积分算子和它们的交换子，并且研究了具有不连续系数的超抛物方程解的正则性。2008 年，Fu 等[15]证明了粗糙核奇异积分算子在 $\lambda$-中心 Morrey 空间上的有界性，同时也得到了粗糙核奇异积分与 $\lambda$-中心 CBMO 函数生成的交换子在 $\lambda$-中心 Morrey 空间上的有界性。2011 年，Tao 和 Shi [16]建立了 $\lambda$-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}\left(R^n\right)$ 上多线性交换子 $T_{\vec{b}}$ 的有界性，其中 $\vec{b}=\left(b_1,\cdots,b_m\right)$，每个 $b_i$ 都是一个 $\lambda$ 中心的 BMO 函数。2015 年，Mizuta、Ohno 和 Shimomura [17]引入了变指数的非齐次中心 Morrey 空间。2019 年，陶双平等[18]得到了分数次极大算子及交换子在 $\lambda$-中心 Morrey 空间上的加权估计。有关这类空间上其他的结果可参考文献([19] [20] [21])。2019 年，Fu 等[22]研究了具有粗糙核的奇异积分算子在变指标中心 Morrey 空间上的有界性。随后 Wang 和 Xu [23]进一步获得了多线性分数次积分算子及其交换子关于变指数中心 Morrey 空间。其他变指标 Morrey 空间上的结果可参考文献([24] [25])。受上述工作的启发，本文的目的是研究变指数 $\lambda$-中心 Morrey 空间上的分数次积分多线性交换子的有界性。分数次积分多线性交换子相比较分数次积分交换子而言是复杂的，结论的证明过程中需要用到分数次积分在变指数 Lebesgue 空间中的 $\left(L^{p(\cdot)},L^{q(\cdot)}\right)$ 有界性，因此多变量指标必须满足 $\frac{1}{q(\cdot)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s_i(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{\alpha}{n}$ 条件，复杂的指标计算及相关估计也是本文的一个难点。本文的结果是文献[22]的结果的推广，丰富和完善了分数次积分算子交换子的有界性估计。下面给出变指数函数空间的一些定义。

## 2. 预备知识

**定义 1** [26] 设 $p(x):R^n\to[1,\infty)$ 是可测函数，变指标 Lebesgue 空间定义为

$$L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)=\left\{f\ \text{是可测函数}:\text{对某个常数}\ \eta>0,\ \text{有}\ \int_{R^n}\left(\frac{f(x)}{\eta}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其范数为 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)}=\inf\left\{\eta>0:\int_{R^n}\left(\frac{f(x)}{\eta}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\le 1\right\}$。

当 $p(\cdot)=p_0$ 是常数时，则 $L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$ 即为标准的 Lebesgue 空间 $L^{p_0}\left(R^n\right)$。

用 $P\left(R^n\right)$ 表示 $R^n$ 上满足以下条件的所有可测函数 $p(\cdot):R^n\to[1,\infty)$ 构成的集合：

$$p^-=\operatorname{ess\,inf}\left\{p(x):x\in R^n\right\}>1,\ p^+=\operatorname{ess\,sup}\left\{p(x):x\in R^n\right\}<\infty.$$

其中 $p'(x)=\frac{p(x)}{p(x)-1}$。

令 $B\left(R^n\right)$ 为 $p(\cdot)\in P\left(R^n\right)$ 并使得 Hardy-Littlewood 极大算子 $M$ 满足 $L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$ 有界的指数函数 $p(\cdot)$ 的集合。

称可测函数 $p(\cdot)\in LH_0\left(R^n\right)$ 是指存在一个常数 $C_0$，满足

$$\left|p(x)-p(y)\right|\le\frac{-C_0}{\log|x-y|},\ |x-y|\le\frac{1}{2},\ x,y\in R^n \tag{2}$$

同理，可测函数 $p(\cdot)\in LH_\infty\left(R^n\right)$ 是指存在常数 $p_\infty,C_\infty>0$，使得

$$\left|p(x)-p_\infty\right|\le\frac{C_\infty}{\log\left(e+|x|\right)},\ x\in R^n \tag{3}$$

记 $LH(R^n)=LH_0(R^n)\cap LH_\infty(R^n)$。

如果 $p(\cdot)\in P(R^n)\cap LH(R^n)$，则 $p'(\cdot)\in P(R^n)\cap LH(R^n)$，并且 Hardy--Littlewood 极大函数 $M$ 在 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 上是有界的。

**定义 2** [21] 设 $q(\cdot)\in B(R^n)$，$\lambda<\frac{1}{n}$，则变指数 $\lambda$ 中心 BMO 空间 $\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)$ 定义为

$$\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{q(\cdot)}(R^n):\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)}<\infty\right\},$$

这里 $\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)}=\sup\limits_{R>0}\frac{\left\|\left(f-f_{B(0,R)}\right)\chi_{B(0,R)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}}{|B(0,R)|^{\lambda}\left\|\chi_{B(0,R)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}}$。

**定义 3** [21] 设 $q(\cdot)\in B(R^n)$，$\lambda\in R$，则变指数 $\lambda$ 中心 Morrey 空间定义为

$$\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{q(\cdot)}(R^n):\|f\|_{\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)}<\infty\right\},$$

这里 $\|f\|_{\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)}=\sup\limits_{R>0}\frac{\left\|f\chi_{B(0,R)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}}{|B(0,R)|^{\lambda}\left\|\chi_{B(0,R)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}}$。

**注 1** 当 $\lambda=0$ 时，$\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)$ 即为文献[25]中的 $\mathrm{CBMO}^{q(\cdot)}(R^n)$。

**注 2** 记 $\mathrm{CBMO}^{q(\cdot)}(R^n)$ 和 $B^{q(\cdot),\lambda}(R^n)$ 齐次的变指数 $\lambda$ 中心 BMO 空间和变指数 $\lambda$-中心 Morrey 空间，这俩个定义是在上述俩个定义中取 $R\geq 1$ 的上确界。很明显，对 $q(\cdot)\in B(R^n)$，$\lambda<\frac{1}{n}$，$\mathrm{CBMO}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)\subset \mathrm{CMO}^{q(\cdot)}(R^n)$；对 $q(\cdot)\in B(R^n)$，$\lambda\in R$，$\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)\subset B^{q(\cdot),\lambda}(R^n)$，关于非齐次变指数 $\lambda$ 中心 BMO 空间和变指数 $\lambda$-中心 Morrey 空间的研究见文献[17]。

本文中出现的 $C$ 是一个绝对正常数，在不同的地方可取不同的值。

## 3. 主要结论及证明

设 $\Omega\in L^s(S^{n-1}), s\geq 1$ 是零次齐次函数，且在单位球面上的平均值为零。带粗糙核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 定义为，对任意的 $f\in L_{\mathrm{loc}}^1(R^n)$，$x\in R^n$

$$T_{\Omega,\alpha}(f)(x):=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

带粗糙核的多线性交换子定义为

$$T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}(f)(x):=\int_{R^n}\prod_{i=1}^{m}\left(b_i(x)-b_i(y)\right)\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y. \tag{5}$$

当 $m=1$ 时，(5)即为文献[21]中的交换子 $\left[b,T_{\Omega,\alpha}\right]$。下面给出带粗糙核的分数次积分多线性交换子在变指数 $\lambda$-中心 Morrey 空间上的有界性。

**定理 1** 设 $0\leq\alpha<n$，$\Omega\in L^s(S^{n-1})$，$s>\frac{n}{n-\alpha}$，$T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}$ 是由(5)式定义的交换子，$\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$，$b_i\in \mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}(R^n)$，设 $0<u_i<\frac{1}{n}$，$p(\cdot),q(\cdot),s_i(\cdot)\in P(R^n)\cap LH(R^n)$，$p'(\cdot)<s_i(\cdot)$，且 $\frac{1}{q(\cdot)}=\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{s_i(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{\alpha}{n}$，$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{m}u_i+v+\frac{\alpha}{n}<0$，则 $T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}$ 是从 $\dot{B}^{p(\cdot),v}$ 到 $\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}$ 上是有界的，且满足

$$\left\|T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}(f)\right\|_{\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}} \le C\prod_{i=1}^{m}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}(R^n)}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}.$$

要证明定理 1，需要以下引理。

**引理 1** [5] 设 $p(\cdot)\in B(R^n)$，若 $f\in L^{p(\cdot)}(R^n)$ 且 $g\in L^{p'(\cdot)}(R^n)$，则 $fg$ 在 $R^n$ 上可积并且

$$\int_{R^n}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(R^n)}$$

其中 $r_p=1+\frac{1}{p^-}-\frac{1}{p^+}$。上述不等式称为广义 Hölder 不等式。

**引理 2** [27] 设 $q(\cdot)\in B(R^n)$，则存在常数 $C>0$，使对所有 $R^n$ 中的球 $B$，有

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}\|\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(R^n)}\le C.$$

**引理 3** [26] 设 $p(\cdot)\in B(R^n)$ 满足(2)、(3)式，则使对所有 $R^n$ 中的球(或方体) $Q$，有

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}=\begin{cases}|Q|^{\frac{1}{p(x)}} & |Q|\le 2^n,\ x\in Q\\ |Q|^{\frac{1}{p(\infty)}} & |Q|\ge 1.\end{cases}$$

这里 $p(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}p(x)$。

**引理 4** [26] 设变指数 $p(\cdot),q(\cdot),s(\cdot)\in P(R^n)$，满足 $\frac{1}{s(x)}=\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}(x\in R^n)$，则有

$$\|fg\|_{L^{s(\cdot)}(R^n)}\le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}\|g\|_{L^{q(\cdot)}(R^n)}.$$

**引理 5** [27] 设 $p(\cdot)\in B(R^n)$，则存在常数 $C>0$ 使得对所有 $R^n$ 中的球 $B$ 和所有的可测子集 $S\subset B$，都有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}}\le C\frac{|B|}{|S|},\ \frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}}\le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1},\ \frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(R^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(R^n)}}\le C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}.$$

其中 $\delta_1,\delta_2$ 是常数且满足 $0<\delta_1,\delta_2<1$。

**引理 6** [28] 设 $p(\cdot),\tilde{q}(\cdot)\in P(R^n)$，若 $q\in(p^+,\infty)$ 且 $\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{\tilde{q}(x)}+\frac{1}{q}$，则对任意的可测函数 $f,g$ 有

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}\le C\|f\|_{L^{\tilde{q}(\cdot)}(R^n)}\|g\|_{L^{q}(R^n)}.$$

**定理 1 的证明：**

不失一般性，设 $m=2$，$B(0,R)$ 简记为 $B$。$2B$ 表示 $B(0,2R)$。$L^{q(\cdot)}(R^n)$ 简记为 $L^{q(\cdot)}$，$\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}(R^n)$ 简记为 $\dot{B}^{q(\cdot),\lambda}$，设 $\chi_E$ 为集合 $E$ 的特征函数。$(b)_B$ 表示函数 $b$ 对球 $B$ 的积分平均值。对任意的 $f\in\dot{B}^{p(\cdot),v}$，$x\in R^n$，将函数 $f(x)$ 分成两部分，一部分靠近原点的记为 $f_1(x)$，一部分远离原点的记为 $f_2(x)$，即 $f(x)=f(x)\chi_{2B}+f(x)(1-\chi_{2B}):=f_1(x)+f_2(x)$，要证

$$\left\|\chi_B T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}}\le C|B|^{\lambda}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}. \tag{6}$$

由 Minkowski 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
\left\|\chi_B T_{\Omega,\alpha,\vec{b}}(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \le & \left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)T_{\Omega,\alpha}(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}}+\left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\
&+\left\|\chi_B\left(b_2-(b_2)_B\right)T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1-(b_1)_B\right)f\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}}+\left\|\chi_B T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)f\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\
:=& I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

首先估计 $I_1$。

$$
\begin{aligned}
I_1 \le & \left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)T_{\Omega,\alpha}(f_1)\right\|_{L^{q(\cdot)}}+\left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)T_{\Omega,\alpha}(f_2)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\
:=& I_{11}+I_{12}.
\end{aligned}
$$

对于 $I_{11}$，设 $\frac{1}{t(\cdot)}=\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{\alpha}{n}$，$\frac{1}{q(\cdot)}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{s_i(\cdot)}+\frac{1}{t(\cdot)}$，这里 $1<p(\cdot)<\frac{\alpha}{n}$，由引理 2、引理 3、引理 4 及 $T_{\Omega,\alpha}$ 的 $\left(L^{p(\cdot)},L^{t(\cdot)}\right)$ 有界性，可得

$$
\begin{aligned}
I_{11} &\le \left\|\chi_B T_{\Omega,\alpha}(f_1)\right\|_{L^{t(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|\left(b_i-(b_i)_B\right)\chi_B\right\|_{L^{s_i(\cdot)}} \\
&\le \left\|f\chi_{2B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left(\left\|b_i\right\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}|B|^{u_i}\left\|\chi_B\right\|_{L^{s_i(\cdot)}}\right) \\
&\le \left\|f\right\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}|B|^{v}\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left(\left\|b_i\right\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}|B|^{u_i}\left\|\chi_B\right\|_{L^{s_i(\cdot)}}\right) \\
&\le C|B|^{\lambda}\left\|f\right\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|\chi_B\right\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}.
\end{aligned}
$$

这里

$$
\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\chi_B\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}\left\|\chi_B\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\approx|B|^{\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{s_1(\cdot)}+\frac{1}{s_2(\cdot)}}=|B|^{\frac{1}{q(\cdot)}+\frac{\alpha}{n}}=|B|^{\frac{\alpha}{n}}\left\|\chi_B\right\|_{L^{q(\cdot)}}.
$$

对于 $I_{12}$，将区域分解为 $R^n$ 中的球层 $2^{k+1}B\setminus 2^kB$，然后在每一层进行估计。设 $\frac{1}{p_1(\cdot)}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p'(\cdot)}$。由此可得 $1-\frac{1}{s}-\frac{1}{p(\cdot)}>0$。由广义 Hölder 不等式和引理 2、引理 6，得

$$
\begin{aligned}
\left|T_{\Omega,\alpha}(f_2)(x)\right| &= \left|\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)f_2(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\right| \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\left|\Omega(x-y)\right|\left|f_2(y)\right|\mathrm{d}y \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left\|\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left\|\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s}(R^n)}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}
\end{aligned}
$$

设 $x\in B$ 且 $y\in 2^{k+1}B$，$x-y\in 2^{k+2}B$。由于 $\Omega$ 是零次齐次函数，且 $\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)$，可得

DOI: 10.12677/pm.2024.145185

$$\begin{aligned}\left\|\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^s(R^n)} &= \left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\le \left(\int_{2^{k+2}B}|\Omega(z)|^s\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\int_0^{2^{k+2}R}\int_{S^{n-1}}|\Omega(z')|^s\,\mathrm{d}\sigma(z')r^{n-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= C\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}\left|2^kB\right|^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

当 $\left|2^{k+1}B\right|\le 2^n$ 且 $x\in 2^{k+1}B$，由引理 3 和 $\frac{1}{p_1(\cdot)}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p'(\cdot)}$，可

$$\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\approx\left|2^{k+1}B\right|^{\frac{1}{p_1(x)}}\approx\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left|2^{k+1}B\right|^{-\frac{1}{s}}.$$

当 $\left|2^{k+1}B\right|\ge 1$ 时，有

$$\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\approx\left|2^{k+1}B\right|^{\frac{1}{p_1(\infty)}}\approx\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left|2^{k+1}B\right|^{-\frac{1}{s}}.$$

因此，

$$\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\approx\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left|2^{k+1}B\right|^{-\frac{1}{s}}.$$

因为 $\lambda=\sum_{i=1}^{2}u_i+v+\frac{\alpha}{n}<0$，则 $v+\frac{\alpha}{n}<0$，由引理 2 可得

$$\begin{aligned}\left|T_{\Omega,\alpha}(f_2)(x)\right| &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}\left|2^kB\right|^{\frac{1}{s}}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\left|2^kB\right|^{v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left|2^kB\right|^{v}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left|2^kB\right|^{-\frac{1}{s}} \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{q(\cdot)}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{s_i(\cdot)}+\frac{1}{t(\cdot)}$，由引理 3 和引理 4，得

$$\begin{aligned}I_{12} &= \left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)T_{\Omega,\alpha}(f_2)(x)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\ &\le C\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+v}\|\chi_B\|_{L^{t(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i-(b_i)_B\right\|_{L^{s_i(\cdot)}} \\ &\le C\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+v}\|\chi_B\|_{L^{t(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left(\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}|B|^{u_i}\|\chi_B\|_{L^{s_i(\cdot)}}\right) \\ &\le C\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}|B|^{\lambda}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}\end{aligned}$$

下面估计 $I_2$。

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f_1\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}}+\left\|\chi_B\left(b_1-(b_1)_B\right)T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f_2\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}}\\
&:=I_{21}+I_{22}.
\end{aligned}
$$

对 $I_{21}$，设 $\frac{1}{q_1(\cdot)}=\frac{1}{l(\cdot)}-\frac{\alpha}{n}$，$\frac{1}{l(\cdot)}=\frac{1}{s_2(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}$，则 $\frac{1}{q(\cdot)}=\frac{1}{q_1(\cdot)}+\frac{1}{s_1(\cdot)}$，由引理 3、引理 4、引理 5 和 $T_{\Omega,\alpha}$ 的 $\left(L^{l(\cdot)},L^{q_1(\cdot)}\right)$ 有界性，得

$$
\begin{aligned}
I_{21} &\le \left\|\left(b_1-(b_1)_B\right)\chi_B\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}\left\|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f_1\right)\right\|_{L^{q_1(\cdot)}}\\
&\le \left\|\left(b_1-(b_1)_B\right)\chi_B\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}\left\|\left(b_2-(b_2)_B\right)f_1\right\|_{L^{l(\cdot)}}\\
&\le \left\|\left(b_1-(b_1)_B\right)\chi_B\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}\left\|\left(b_2-(b_2)_B\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\left\|f_1\right\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\le \left\|b_1\right\|_{\mathrm{CBMO}^{s_1(\cdot),u_1}}|B|^{u_1}\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}|B|^{v}\left\|f\right\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\quad\times\left(\left\|\left(b_2-(b_2)_{2B}\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}+\left\|\left((b_2)_{2B}-(b_2)_B\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\right)\\
&\le C\left\|f\right\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}|B|^{\lambda}\left\|\chi_B\right\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\left|(b_2)_{2B}-(b_2)_B\right| &\le \frac{1}{|B|}\left\|\left(b_2-(b_2)_{2B}\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2'(\cdot)}}\\
&\le \left\|\left(b_2-(b_2)_{2B}\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\frac{1}{\left\|\chi_{2B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}}
\end{aligned}
$$

对 $I_{22}$，类似 $I_{12}$ 的分解。设 $\frac{1}{p'(\cdot)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s_2(\cdot)}$，则由 Minkowski 不等式和广义 Hölder 不等式及引理 3、引理 6，得

$$
\begin{aligned}
&\left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f_2\right)(x)\right|=\left|\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)f_2(y)\left(b_2-(b_2)_B\right)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\right|\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\left|\Omega(x-y)\right|\left|b_2-(b_2)_B\right|\left|f_2(y)\right|\mathrm{d}y\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left\|\left(b_2-(b_2)_B\right)\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left\|\left(b_2-(b_2)_B\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\left\|\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s}(R^n)}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}}\left\|\Omega\right\|_{L^{s}(S^{n-1})}\left|2^{k+1}B\right|^{v}\left\|f\right\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|\chi_B\right\|_{L^{p(\cdot)}}\\
&\quad\times\left(\left\|\left(b_2-(b_2)_{2^{k+1}B}\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}+\left\|\left((b_2)_{2^{k+1}B}-(b_2)_B\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\right)
\end{aligned}
$$

对于 $u_2>0$，有

$$\begin{aligned}
\left|(b_2)_{2^{k+1}B}-(b_2)_B\right| &\le \sum_{i=0}^{k}\left|(b_2)_{2^{i+1}B}-(b_2)_{2^iB}\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\int_{2^iB}\left|b_2(y)-(b_2)_{2^{i+1}B}\right|\mathrm{d}y \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\left|2^iB\right|}\left\|\left(b_2(\cdot)-(b_2)_{2^{i+1}B}\right)\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\left\|\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2'(\cdot)}} \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\left|2^iB\right|}\left\|\left(b_2(\cdot)-(b_2)_{2^{i+1}B}\right)\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\frac{\left|2^{i+1}B\right|}{\left\|\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}} \\
&\le C\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\sum_{i=0}^{k}\left|2^{i+1}B\right|^{u_2}\left\|\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}\frac{1}{\left\|\chi_{2^{i+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}}} \\
&\le C\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}(k+1)\left|2^{k+1}B\right|^{u_2}
\end{aligned}$$

由引理 3 得

$$\begin{aligned}
&\left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2-(b_2)_B\right)f_2\right)(x)\right| \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}+v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}(k+1)\left|2^{k+1}B\right|^{u_2}\left\|\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_2(\cdot)}} \\
&\le C\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\sum_{k=1}^{\infty}k\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}+v+u_2+1-\frac{1}{s}} \\
&\le C|B|^{u_2+\frac{\alpha}{n}+v}\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\sum_{k=1}^{\infty}k2^{kn\left(u_2+\frac{\alpha}{n}+v\right)} \\
&\le C|B|^{u_2+\frac{\alpha}{n}+v}\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
I_{22} &\le C|B|^{u_2+\frac{\alpha}{n}+v}\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|b_1-(b_1)_B\chi_B\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\
&\le C|B|^{u_2+\frac{\alpha}{n}+v}\|b_2\|_{\mathrm{CBMO}^{s_2(\cdot),u_2}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\left\|b_1-(b_1)_B\right\|_{L^{s_1(\cdot)}}\|\chi_B\|_{L^{q_1(\cdot)}} \\
&\le C|B|^{u_1+u_2+\frac{\alpha}{n}+v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{q_1(\cdot)}}\|\chi_B\|_{L^{s_1(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}} \\
&\le C\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}|B|^{\lambda}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}
\end{aligned}$$

类似于 $I_2$ 的估计。可得

$$I_3 \le C\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}|B|^{\lambda}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}.$$

下面估计 $I_4$。

$$\begin{aligned}
I_4 &\le \left\|\chi_BT_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)f_1\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}}+\left\|\chi_BT_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)f_2\right)\right\|_{L^{q(\cdot)}} \\
&:= I_{41}+I_{42}.
\end{aligned}$$

对 $I_{41}$，设 $\frac{1}{t(\cdot)}=\frac{1}{s_1(\cdot)}+\frac{1}{s_2(\cdot)}+\frac{1}{p(\cdot)}$，则 $\frac{1}{q(\cdot)}=\frac{1}{t(\cdot)}-\frac{\alpha}{n}$，由 $T_{\Omega,\alpha}$ 的 $\left(L^{q(\cdot)},L^{t(\cdot)}\right)$ 有界性，得

$$
\begin{aligned}
I_{41} &\le C\left\|\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)f_1\right\|_{L^{t(\cdot)}} \\
&\le C\|f_1\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|\left(b_i-(b_i)_B\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_i(\cdot)}} \\
&\le C|2B|^{v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left(\left\|\left(b_i-(b_i)_{2B}\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_i(\cdot)}}+\left\|\left((b_i)_{2B}-(b_i)_B\right)\chi_{2B}\right\|_{L^{s_i(\cdot)}}\right) \\
&\le C|2B|^{v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}|2B|^{u_i}\|\chi_{2B}\|_{L^{s_i(\cdot)}} \\
&\le C|2B|^{\lambda}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}
\end{aligned}
$$

对 $I_{42}$，设 $\frac{1}{p'(\cdot)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{p_1(\cdot)}$，$\frac{1}{p_1(\cdot)}=\frac{1}{s_1(\cdot)}+\frac{1}{s_2(\cdot)}$，由广义 Hölder 不等式和引理 2、引理 3，得

$$
\begin{aligned}
&\left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)f_2\right)(x)\right| \\
&\le\left|\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)f_2(y)\left(b_1-(b_1)_B\right)\left(b_2-(b_2)_B\right)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\right| \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)|\left|b_1-(b_1)_B\right|\left|b_2-(b_2)_B\right||f_2(y)|\mathrm{d}y \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\left\|\left(b_i-(b_i)_B\right)\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left\|\Omega(x-\cdot)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^s(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\left\|\left(b_i-(b_i)_B\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}}\left\|f\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}\left|2^{k+1}B\right|^{v}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\left\|\left(b_i-(b_i)_B\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_i(\cdot)}} \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}\left|2^{k+1}B\right|^{v}\|f\|_{\dot{B}^{q(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\quad\times\prod_{i=1}^{2}\left(\left\|\left(b_i-(b_i)_{2^{k+1}B}\right)\chi_{2^{k+1}B}\right\|_{L^{s_i(\cdot)}}+\left|(b_i)_{2^{k+1}B}-(b_i)_B\right|\|\chi_B\|_{L^{s_i(\cdot)}}\right) \\
&\le C|B|^{\lambda}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}\sum_{k=1}^{\infty}k2^{kn\lambda} \\
&\le C|B|^{\lambda}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}.
\end{aligned}
$$

由以上估计可得

$$
I_{42}\le C|B|^{\lambda}\|f\|_{\dot{B}^{q(\cdot),v}}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}.
$$

综合上述对 $I_1$，$I_2$，$I_3$，$I_4$ 的估计，可得

$$
\left\|\chi_BT_{\Omega,\alpha,\vec{b}}(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}}\le C|B|^{\lambda}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i(\cdot),u_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p(\cdot),v}}.
$$

这就证明了定理 1。

## 4. 结论

本文主要研究分数次积分和 $\lambda$-中心 BMO 函数生成的多线性交换子在变指数中心 Morrey 空间上的有

界性，本文得到的结论是文献[13]中一阶交换子有界性的推广，当$b_1(x)=\cdots=b_n(x)$，$b_1(y)=\cdots=b_n(y)$，我们也可以得到分数次积分高阶交换子的有界性。因此，本文的结论丰富了变指数中心 Morrey 空间上多线性算子理论。


## 致　谢

感谢审稿人对本文提出的修改意见！

## 基金项目

兰州财经大学青年项目(Lzufe2022D-002)；甘肃自然科学基金(22JR5RA556)；甘肃省高等学校创新能力提升资助项目(2020B-142)。


## 参考文献


[1] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883882

[2] Coifman, R.R. and Meyer, Y. (1975) On Commutators of Singular Integrals and Bilinear Singular Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **212**, 315-331. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1975-0380244-8

[3] Coifmann, R. and Meyer, Y. (1978) Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque.

[4] Kenig, C.E. and Stein, E.M. (1999) Multilinear Estimates and Fractional Integration. *Mathematical Research Letters*, **6**, 1-15. https://doi.org/10.4310/MRL.1999.v6.n1.a1

[5] Kováčik, O. and Rákosnik, J. (1991) On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **41**, 592-618. https://doi.org/10.21136/CMJ.1991.102493

[6] Diening, L. (2004) Maximal Function on Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(\cdot)}(R^n)$. *Mathematical Inequalities & Applications*, **7**, 245-253. https://doi.org/10.7153/mia-07-27

[7] Diening, L. (2004) Riesz Potential and Sobolev Embeddings on Generalized Lebesgueand Sobolev Spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$. *Mathematische Nachrichten*, **268**, 31-43. https://doi.org/10.1002/mana.200310157

[8] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Martell, J.M., *et al.* (2006) The Boundedness of Classical Operators on Variable Lp Spaces. *Annales Fennici Mathematici*, **31**, 239-264.

[9] Morrey, C.B. (1938) On the Solutions of Quasilinear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactuons of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[10] Chiarenza, F. and Frasca, M. (1987) Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function. *Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni*, **7**, 273-297.

[11] Komori, Y. and Shirai, S. (2009) Weighted Morrey Spaces and Singular Integral Operators. *Mathematische Nachrichten*, **282**, 219-231. https://doi.org/10.1002/mana.200610733

[12] Alvarez, J., Lakey, J. and Guzmán-Partida, M. (2000) Spaces of Bounded Lambda-Central Mean Oscillation, Morrey Spaces, and Lambda-Central Carleson Measures. *Collectanea Mathematica*, **51**, 1-47.

[13] Lu, S.Z. and Yang, D.C. (1995) The Central BMO Spaces and Littlewood-Paley Operators. *Approximation Theory and Its Applications*, **11**, 72-94. https://doi.org/10.1007/BF02836580

[14] Fan, D.S., Lu, S.Z. and Yang, D.C. (1996) Boundedness of Operators in Morrey Spaces on Homogeneous Spaces and Its Applications. *Acta Mathematica Sinica*, **42**, 625-634.

[15] Fu, Z.W., Lin, Y. and Lu, S.Z. (2008) $\lambda$-Central BMO Estimates for Commutators of Singular Integral Operators with Rough Kernels. *Acta Mathematica Applicatae Sinica*, **24**, 373-386. https://doi.org/10.1007/s10114-007-1020-y

[16] Tao, X.X. and Shi, Y.L. (2011) Multilinear Commutators of Calderón-Zygmund Operator on $\lambda$-Central Morrey Spaces. *Advances in Mathematics* (*China*), **40**, 47-59.

[17] Mizuta, Y., Ohno, T. and Shimomura, T. (2015) Boundedness of Maximal Operators and Sobolev's Theorem for Non-Homogeneous Central Morrey Spaces of Variable Exponent. *Hokkaido Mathematical Journal*, **44**, 185-201. https://doi.org/10.14492/hokmj/1470053290

[18] 陶双平，杨雨荷. 分数次极大算子及交换子在$\lambda$-中心 Morrey 空间上的加权估计[J]. 山东大学学报(理学版),

2019, 54(8): 68-75.

[19] Yu, X. and Tao, X.X. (2013) Boundedness for a Class of Generalized Commutators on $\lambda$-Central Morrey Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **29**, 1917-1926. https://doi.org/10.1007/s10114-013-2174-4

[20] Yu, X., Zhang, H.H. and Zhao, G.P. (2016) Weighted Boundedness of Some Integral Operators on Weighted $\lambda$-Central Morrey Spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, **31**, 331-342. https://doi.org/10.1007/s11766-016-3348-5

[21] Fu, Z.W., Lu, S.Z., Wang, H.B., *et al.*(2019) Singular Integral Operators with Rough Kernels on Central Morrey Spaces with Variable Exponent. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **44**, 505-522. https://doi.org/10.5186/aasfm.2019.4431

[22] Wang, H.B. and Xu, J.S. (2019) Multilinear Fractional Integral Operators on Central Morrey Spaces with Variable Exponent. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, Article No. 311. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2264-7

[23] Wang, H.B., Xu, J.S. and Tan, J. (2020) Boundedness of Multilinear Singular Integrals on Central Morrey Spaces with Variable Exponents. *Frontiers of Mathematics in China*, **15**, 1011-1034. https://doi.org/10.1007/s11464-020-0864-7

[24] 辛银萍. 参数型 Marcinkiewicz 积分交换子在变指数 Herz-Morrey 空间的加权有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(4): 66-75, 85.

[25] Wang, D.H., Liu, Z.G., Zhou, J., *et al.* (2018) Central BMO Spaces with Variable Exponent. *Acta Mathematica Sinica*, **61**, 641-650.

[26] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Růžička, M. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer, Heidelberg, 69-97. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8

[27] Izuki, M. (2010) Boundedness of Sublinear Operators on Herz Spaces with Variable Exponent and Application to Wavelet Characterization. *Analysis Mathematica*, **36**, 33-50. https://doi.org/10.1007/s10476-010-0102-8

[28] Nakai, E. and Sawano, Y. (2012) Hardy Spaces with Variable Exponents and Generalized Campanato Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **262**, 3665-3748. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.01.004