Pure Mathematics 理论数学, **2024, 14(5), 479-488**
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145202

Hans汉斯

基于对数先验的协方差矩阵的参数估计

余　晨

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年4月10日；录用日期：2024年5月11日；发布日期：2024年5月31日

摘　要

为了更好地估计股票收益协方差矩阵，提出了一种基于Black-Litterman思想的协方差矩阵估计方法。不同于传统方法对协方差矩阵添加Wishart先验分布的方法，考虑将先验信息概念应用在协方差矩阵的对数上，通过贝叶斯方法，得到协方差矩阵的参数估计。

关键词

协方差矩阵估计，Black-Litterman模型，投资者情绪，对数先验

Parameter Estimation of Covariance Matrix Based on Logarithmic Priors

Chen Yu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 10th, 2024; accepted: May 11th, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

In order to better estimate the covariance matrix of stock return, a method of covariance matrix estimation based on Black-Litterman idea is proposed. Different from the traditional method of adding Wishart prior distribution to the covariance matrix, the concept of prior information is applied to the logarithm of the covariance matrix, and the parameter estimation of the covariance matrix is obtained by Bayesian method.

Keywords

Covariance Matrix Estimation, Black-Litterman Model, Investor Sentiment, Logarithmic Prior

文章引用: 余晨. 基于对数先验的协方差矩阵的参数估计[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 479-488.
DOI: 10.12677/pm.2024.145202

1. 引言

投资组合优化的基础是由 Markowitz [1]在 20 世纪 50 年代提出的均值方差模型，该模型根据投资组合的预期收益和波动率来计算投资组合的资产配置。假设市场上有 n 种资产，这些资产收益的均值 $\mu \in \mathbb{R}^n$，协方差矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$，经典的投资组合优化问题可描述为：

$$\begin{aligned} \max_{w} \quad & w^{\mathrm{T}}\mu - \frac{\lambda}{2} w^{\mathrm{T}} \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w^{\mathrm{T}} \mathbf{1} = 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 λ 为投资者的风险规避系数。

Black-Litterman 模型(以下简称 BL 模型)是均值方差模型(1.1)的延伸。考虑市场上的 n 项资产，这些资产的收益 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_m)^{\mathrm{T}}$ 服从多元正态分布，即：$r_1, r_2, \cdots, r_m \sim N_n(\mu, \Sigma)$。根据资本资产定价模型(CAPM)，当市场处于均衡状态时，即当对资产组合的需求等于供给时，所有投资者都持有最优市场投资组合，此时资产配置的权重为市场均衡权重 w_{eq}。BL 模型想要得到市场均衡收益率为 π，则需要反向优化均值方差模型(1.1)，对模型求一阶导，并令其等于零，可得方程 $\pi = \lambda \Sigma w_{eq}$。BL 模型以这个市场均衡收益率为客观的市场先验收益分布，$\mu \sim N_m(\pi, \tau\Sigma)$，这里 τ 是反映对市场均衡不确定性的参数，τ 越小，表示先验 μ 越接近市场均衡收益 π，反之 τ 越大，则表示先验 μ 越背离市场均衡收益 π。另外再加入投资者主观观点，利用贝叶斯方法得到后验资产收益率，进而得出最优资产配置方案。假设投资者对收益均值向量 μ 有 k 个观点，他的观点可以用下面的公式表示：

$$q = P\mu + \varepsilon, \tag{1.2}$$

其中 P 是 $k \times n$ 维矩阵，即对 n 个资产有 k 个观点，例如考虑三种资产 A，B 和 C，当

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 4\% \\ 6\% \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

则 P 的第一行也就是投资者的第一个观点，是一个绝对观点，表示投资者认为资产 A 的预期收益率为 4%；P 的第二行为相对观点，表示投资者认为资产 B 与资产 C 的平均预期收益率的差为 6%。绝对观点行和为 1，相对观点行和为 0。ε 是观点的误差项，$\varepsilon \sim N(0, \Omega)$，$\Omega$ 是 $k \times k$ 的对角矩阵，为观点误差的协方差矩阵，表示投资者对单个预测的信心水平。因此投资者观点的分布为：$q|\mu \sim N_k(P\mu, \Omega)$。

结合上述信息可知整个 BL 模型由以下三个分布构成：

$$\begin{aligned} r_1, r_2, \cdots, r_m &\sim N_n(\mu, \Sigma), \\ \mu &\sim N_n(\pi, \tau\Sigma), \\ q|\mu &\sim N_k(P\mu, \Omega). \end{aligned} \tag{1.4}$$

通过结合(1.4)中后两个先验分布，并以此作为收益均值 μ 的新的先验分布，根据文献[2]中给出的证明可以计算出收益的后验分布：

$$r \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL}). \tag{1.5}$$

其中

$$\mu_{BL}=\left(\left(\tau\Sigma\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left(\left(\tau\Sigma\right)^{-1}\pi+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right),$$

$$\Sigma_{BL}=M^{-1}+\Sigma,M^{-1}=\left(\left(\tau\Sigma\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}.$$

2. 模型建立

不同于传统 BL 模型对协方差矩阵引入逆 Wishart 分布的方法[3]，我们基于 Leonard 和 Hsu [4]关于协方差矩阵的不同先验的想法，将协方差矩阵的先验信息应用在协方差矩阵的对数，即 $\log(\Sigma)$ 上，这种先验分布不仅融合了市场参与者的实际观点，还增强了模型对于复杂金融环境的适应性。假设考虑市场上的 n 项资产，这些资产在一段时间 m 内的独立收益为 $r=\left(r_1,r_2,\cdots,r_m\right)^{\mathrm{T}}$，每个收益服从多元正态分布，其均值为 μ，协方差矩阵为 Σ，即：

$$r_1,r_2,\cdots,r_m\sim N_n\left(\mu,\Sigma\right) \tag{2.1}$$

我们假设收益的均值 μ 是已知的，无不确定性，则 Σ 的似然函数可以表示为：

$$L\left(\Sigma\middle|r_1,\cdots,r_m\right)=\left(2\pi\right)^{-\frac{nm}{2}}\left|\Sigma\right|^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(r_i-\mu\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\left(r_i-\mu\right)\right\}. \tag{2.2}$$

令 $A=\log(\Sigma)$，λ_{Ai} 和 λ_{Σ_i} 为 A 与 Σ 的特征值，因此 $\lambda_{Ai}=\log\left(\lambda_{\Sigma_i}\right)\Rightarrow\lambda_{\Sigma_i}=\mathrm{e}^{\lambda_{Ai}}$，利用矩阵行列式的性质可以得到 $det(\Sigma)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_{\Sigma i}=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_{Ai}}=\mathrm{e}^{Tr(A)}$。那么 Σ 的似然函数可以写为：

$$\begin{aligned}L\left(A\middle|r_1,\cdots,r_m,\Sigma\right)&=\left(2\pi\right)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Tr\left(\sum_{i=1}^{m}\left(r_i-\mu\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\left(r_i-\mu\right)\right)\right\}\exp\left\{-\frac{m}{2}Tr\left(A\right)\right\}\\&=\left(2\pi\right)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Tr\left(\sum_{i=1}^{m}\left(r_i-\mu\right)\left(r_i-\mu\right)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{m}{2}Tr\left(A\right)\right\}\\&=\left(2\pi\right)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{m}{2}Tr\left(A+S\mathrm{e}^{-A}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $S=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(r_i-\mu\right)^{\mathrm{T}}\left(r_i-\mu\right)$。Leonard 和 Hsu [4]的想法是通过近似 e^{-A} 来近似 Σ 的似然函数。Bellman [5]在他书中展示了一个更一般的结果：

$$\begin{aligned}&X\left(t\right)=\mathrm{e}^{\left(A_0+cB_0\right)t}=\mathrm{e}^{A_0t}+c\int_0^t\mathrm{e}^{A_0(t-s)}B_0X\left(s\right)\mathrm{d}s,0<t<\infty,\\&A_0=-\Lambda,B_0=\Lambda-A,c=1,\Lambda=\log\left(S\right),\\&X\left(t\right)=\mathrm{e}^{-At}=S^{-t}-\int_0^tS^{s-t}\left(A-\Lambda\right)X\left(s\right)\mathrm{d}s,0<t<\infty.\end{aligned} \tag{2.4}$$

当 $t=1$ 时，通过迭代可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-A}&=X\left(1\right)=S^{-1}-\int_0^1S^{s-1}\left(A-\Lambda\right)S^{-s}\mathrm{d}s\\&=S^{-1}-\int_0^1S^{s-1}\left(A-\Lambda\right)\left(S^{-s}-\int_0^sS^{u-s}\left(A-\lambda\right)X\left(u\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\\&=S^{-1}-\int_0^1S^{s-1}\left(A-\Lambda\right)S^{-s}\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^sS^{s-1}\left(A-\Lambda\right)S^{u-s}\left(A-\Lambda\right)\cdot\left(S^{-u}-\int_0^uS^{v-u}\left(A-\lambda\right)X\left(v\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\approx S^{-1}-\int_0^1S^{s-1}\left(A-\Lambda\right)S^{-s}\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^sS^{s-1}\left(A-\Lambda\right)S^{u-s}\left(A-\Lambda\right)S^{-u}\mathrm{d}u\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.5}$$

这是一个近似因为我们忽略了三重及更高阶的积分。已知Σ的似然函数形式为：

$$L\left(A\middle|r_1,\cdots,r_m,\Sigma\right)=\left(2\pi\right)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{m}{2}Tr\left(A+Se^{-A}\right)\right\}. \tag{2.6}$$

因此我们计算

$$\begin{aligned}Tr\left(Se^{-A}\right)&\approx Tr\left(SS^{-1}\right)-\int_0^1 Tr\left(S^s\left(A-\Lambda\right)S^{-s}\right)\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^s Tr\left(S^s\left(A-\Lambda\right)S^{u-s}\left(A-\Lambda\right)S^{-u}\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\\&=n-Tr\left(A-\Lambda\right)\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^s Tr\left(\left(A-\Lambda\right)S^{u-s}\left(A-\Lambda\right)S^{-(u-s)}\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

对第一项积分有：$\int_0^1 Tr\left(A-\Lambda\right)\mathrm{d}s=Tr\left(A-\Lambda\right)$。
对第二项积分首先设S有谱分解$S=EDE^{\mathrm{T}}$，若 log 由泰勒展开定义，则有：

$$\begin{aligned}\log\left(S\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\left(I_n-S\right)^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\left(EE^{\mathrm{T}}-EDE^{\mathrm{T}}\right)^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}E\left(I_n-D\right)^{n+1}E^{\mathrm{T}}\\&=E\log\left(D\right)E^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

记$B=E^{\mathrm{T}}\left(A-\Lambda\right)E$，即$EBE^{\mathrm{T}}=A-\Lambda$，则第二项积分内部：

$$\begin{aligned}Tr\left(\left(A-\Lambda\right)S^{u-s}\left(A-\Lambda\right)S^{-(u-s)}\right)&=Tr\left[EBE^{\mathrm{T}}\left(EDE^{\mathrm{T}}\right)^{u-s}EBE^{\mathrm{T}}\left(EDE^{\mathrm{T}}\right)^{-(u-s)}\right]\\&=Tr\left(EBD^{u-s}BD^{-(u-s)}E^{\mathrm{T}}\right)\\&=Tr\left(BD^{u-s}BD^{-(u-s)}\right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

不妨设BD^{u-s}的标量形势为：

$$BD^{u-s}=\begin{bmatrix}ccccb_{11}d_1^{u-s} & b_{12}d_2^{u-s} & \dots & b_{1n}d_n^{u-s}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ b_{n1}d_1^{u-s} & b_{n2}d_2^{u-s} & \dots & b_{nn}d_n^{u-s}\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

则同样的$BD^{-(u-s)}$的标量形势为：

$$BD^{u-s}=\begin{bmatrix}ccccb_{11}\frac{1}{d_1^{u-s}} & b_{12}\frac{1}{d_2^{u-s}} & \dots & b_{1n}\frac{1}{d_n^{u-s}}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ b_{n1}\frac{1}{d_1^{u-s}} & b_{n2}\frac{1}{d_2^{u-s}} & \dots & b_{nn}\frac{1}{d_n^{u-s}}\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

下面计算$BD^{u-s}BD^{-(u-s)}$的对角元素：

$$diag\left(BD^{u-s}BD^{-(u-s)}\right)=\begin{bmatrix} b_{11}^2+b_{12}b_{21}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{u-s}+\cdots+b_{1n}b_{n1}\left(\frac{d_n}{d_1}\right)^{u-s} \\ b_{21}b_{12}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{u-s}+b_{22}^2+\cdots+b_{2n}b_{n2}\left(\frac{d_n}{d_2}\right)^{u-s} \\ \vdots \\ b_{n1}b_{1n}\left(\frac{d_1}{d_n}\right)^{u-s}+b_{n2}b_{2n}\left(\frac{d_2}{d_n}\right)^{u-s}+\cdots+b_{nn}^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

由于 B 是对称阵，因此

$$\int_0^1\int_0^s Tr\left(BD^{u-s}BD^{-(u-s)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_0^s b_{ij}^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\sum_{i\neq j}\int_0^1\int_0^s b_{ij}^2\left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{u-s}\mathrm{d}u\mathrm{d}s \tag{2.13}$$

其中第一项积分

$$\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_0^s b_{ii}^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_0^s b_{ii}^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^n\frac{b_{ii}^2}{2}, \tag{2.14}$$

第二项积分

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}^n\int_0^1\int_0^s b_{ij}^2\left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{u-s}\mathrm{d}u\mathrm{d}s&=\sum_{i\neq j}^n\int_0^1 b_{ij}^2\left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{u-s}\frac{1}{\log(d_i)-\log(d_j)}\Bigg|_0^s\mathrm{d}s\\&=\sum_{i\neq j}\frac{b_{ij}^2}{\log(d_i)-\log(d_j)}\int_0^1 1-\left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{-s}\mathrm{d}s\\&=\sum_{i\neq j}\frac{b_{ij}^2}{\log(d_i)-\log(d_j)}\left(1-\left(\frac{d_j}{d_i}\right)^s\frac{1}{\log(d_j)-\log(d_i)}\right)\Bigg|_0^1\\&=\sum_{i\neq j}\frac{b_{ij}^2}{\log(d_i)-\log(d_j)}+\sum_{i\neq j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}-1}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\\&=\sum_{i<j}\left(\frac{b_{ij}^2}{\log(d_i)-\log(d_j)}+\frac{b_{ji}^2}{\log(d_j)-\log(d_i)}\right)+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\\&=0+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

综上可得

$$Tr\left(Se^{-A}\right)=n-Tr(A-\Lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^n b_{ii}^2+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}. \tag{2.16}$$

因此Σ的似然函数可以改写为：

$$\begin{aligned}
L(\alpha|r_1,\cdots,r_m) &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{m}{2}Tr\left(A+Se^{-A}\right)\right\} \\
&= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}}\exp\left\{-\frac{m}{2}\left(Tr(A)+n-Tr(A-\Lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}b_{ii}^2+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\right)\right\} \\
&= (2\pi e)^{-\frac{mn}{2}}e^{\left(-\frac{m}{2}Tr(A)\right)}\exp\left\{-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}b_{ii}^2+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\right)\right\} \\
&= (2\pi e)^{-\frac{mn}{2}}det(S)^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}b_{ii}^2+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

定义：

$$M=\begin{cases}\dfrac{m}{2}, i=j, \\ \dfrac{m\left(d_i-d_j\right)^2}{d_id_j\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}, i\neq j.\end{cases}, \tag{2.18}$$

$$Vec^*(A)=\left[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{nn}\right]^{\mathrm{T}}.$$

则Σ似然函数指数内部：

$$-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}b_{ii}^2+\sum_{i<j}b_{ij}^2\frac{\frac{d_j}{d_i}+\frac{d_i}{d_j}-2}{\left(\log(d_i)-\log(d_j)\right)^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left(Vec(B)\right)^{\mathrm{T}}Vec(B\odot M)\right), \tag{2.19}$$

由 $B=E^{\mathrm{T}}(A-\Lambda)E$，得

$$Vec(B)=Vec\left[E^{\mathrm{T}}(A-\Lambda)E\right]=\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)Vec(A-\Lambda)=\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)(\alpha-\lambda). \tag{2.20}$$

因此指数内部：

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\left(Vec(B)\right)^{\mathrm{T}}Vec(B\odot M)\right) &= -\frac{1}{2}\left(Vec(B)\right)^{\mathrm{T}}diag\left(Vec(M)\right)Vec(B) \\
&= -\frac{1}{2}\left((\alpha-\lambda)^{\mathrm{T}}\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}diag\left(Vec(M)\right)\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)(\alpha-\lambda)\right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

令 $Q=\left(\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}diag\left(Vec(M)\right)\left(E^{\mathrm{T}}\otimes E^{\mathrm{T}}\right)\right)^{-1}$，则Σ的似然函数可以写为：

$$L(\alpha|r_1,\cdots,r_m)=(2\pi e)^{-\frac{mn}{2}}det(S)^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\alpha-\lambda)^{\mathrm{T}}Q(\alpha-\lambda)\right)\right\}. \tag{2.22}$$

注意这里的 Q 不同于 Andrei 和 Hsu [3]中给出的结构，而是一种显示的表示。可以看到 α 的近似似然函数是服从均值为 λ，协方差矩阵为 Q^{-1} 的多元正态分布，维数 $d=\frac{1}{2}m(m+1)$，根据这一函数形式我们可以给出协方差矩阵的共轭先验：

$$\alpha|\theta,\Delta \sim N(\theta,\Delta), \tag{2.23}$$

其中 θ 与 Δ 由历史数据获得。此外在许多实际情况下，专家对投资组合的协方差往往有强烈的意见[6]，他们想用这些意见信息来确定他们的最优投资组合，这种信息可以是对个别资产的任何绝对或相对的意见，数学形式表示为 $q=P\alpha+\epsilon$，因此投资者观点的分布为：

$$q|\mu \sim N(P\alpha,\Omega). \tag{2.24}$$

因此整个模型由以下 3 个分布表示：

$$\begin{gathered} r_1,\cdots,r_m|\Sigma \sim N(\mu,\Sigma) \\ \alpha \sim N(\theta,\Delta) \\ q|\mu \sim N(P\alpha,\Omega) \end{gathered} \tag{2.25}$$

3. 模型求解

3.1. $\alpha|q$ 的联合先验

首先将 α 的先验分布与投资者观点分布联合得到 α 新的先验分布：

$$\begin{aligned} f(\alpha,q) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\alpha-\theta)^{\mathrm{T}}(\Delta)^{-1}(\alpha-\theta)+(q-P\alpha)^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}(q-P\alpha)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha-\theta \\ q-P\alpha\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}cc\Delta & 0 \\ 0 & \Omega\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha-\theta \\ q-P\alpha\end{bmatrix}\right\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

令 $V=\begin{bmatrix}\Delta & 0 \\ 0 & \Omega\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}\alpha-\theta \\ q-P\alpha\end{bmatrix}$，则 $f(\alpha,q)\propto\exp\left\{-\frac{1}{2}b^{\mathrm{T}}V^{-1}b\right\}$。考虑构建矩阵 A，计算 $b'=Ab$ 和 $V'=AVA^{\mathrm{T}}$，得到新的分布 $f(\alpha,q)\propto\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha'^{\mathrm{T}}V'^{-1}\alpha'\right\}$ 来分隔 α 与 q。因此令

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} I_n & -\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1} \\ 0 & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_k\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n-\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P & -\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1} \\ P & I_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

由于 $I_n=\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)$，有

$$A=\begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}(\Delta)^{-1} & -\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1} \\ P & I_k \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} det(A) &= det\left\{\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}(\Delta)^{-1}+\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right\} \\ &= det\left\{\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)\right\} \\ &= det(I)=1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

得到新的b'与V'：

$$
\begin{aligned}
b' = Ab &= A\begin{bmatrix} \alpha-\theta \\ q-P\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}(\Delta)^{-1}(\alpha-\theta)-\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}(q-P\alpha) \\ P\alpha-P\theta+q-P\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left[\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)\alpha-(\Delta)^{-1}\theta-P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right] \\ q-P\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha-\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}\theta+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right) \\ q-P\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha-\bar{\alpha}) \\ q-P\theta \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

其中$\bar{\alpha}=\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}\theta+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right)$。下面计算$V'$：

$$
V' = AVA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1} & -\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}P^{\mathrm{T}} \\ P\Delta & \Omega \end{bmatrix} A^{\mathrm{T}}. \tag{3.5}
$$

已知Δ与Σ均为对称阵，因此

$$
\begin{aligned}
A^{T} &= \begin{bmatrix} (\Delta)^{-1}\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1} & P^{\mathrm{T}} \\ -\Omega^{-1}P\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1} & I_k \end{bmatrix}, \\
V' &= \begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega+P\Delta P^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega+P\Delta P^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

可将α与q的联合分布分离为：$f(\alpha,q)=f(\alpha|q)f(q)$，得到$\alpha$基于投资者观点的新的先验：

$$
\begin{aligned}
&\alpha|q \sim N\left(\bar{\alpha},\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\right), \\
&\bar{\alpha}=\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}\theta+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

3.2. α的后验分布

在上一节中我们得到了α基于投资者观点的新的先验，结合第一部分α的近似似然函数，我们可以得到α的后验分布密度函数

$$\begin{aligned}
P\left(\alpha \middle| r_1,\cdots,r_m,q\right) &= \frac{P\left(r_1,\cdots,r_m,q,\alpha\right)}{P\left(r_1,\cdots,r_m,q\right)} \\
&= \frac{P\left(r_1,\cdots,r_m \middle| q,\alpha\right)P\left(q\middle|\alpha\right)P\left(\alpha\right)}{P\left(r_1,\cdots,r_m,q\right)} \\
&\propto P\left(r_1,\cdots,r_m \middle| q,\alpha\right)P\left(\alpha\middle|q\right) \\
&= L\left(\alpha \middle| r_1,\cdots,r_m\right)P\left(\alpha\middle|q\right) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\alpha-\lambda)^{\mathrm{T}}Q(\alpha-\lambda)+(\alpha-\bar{\alpha})^{\mathrm{T}}\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\right)(\alpha-\bar{\alpha})\right\},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $\bar{\alpha}=\left((\Delta)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left((\Delta)^{-1}\theta+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}q\right)$。在进行下一步计算之前首先引入定理 3.1。

定理 3.1. 对任意正定矩阵 $A\in\mathbb{R}^{p\times p}$，半正定矩阵 $B\in\mathbb{R}^{p\times p}$ 与 $a,b\in\mathbb{R}^{p}$ 有

$$(y-a)^{\mathrm{T}}A(y-a)+(y-b)^{\mathrm{T}}B(y-b)=\left(y-y^{*}\right)^{\mathrm{T}}(A+B)\left(y-y^{*}\right)+(a-b)^{\mathrm{T}}H(a-b),$$

其中 $y^{*}=(A+B)^{-1}(Aa+Bb)$ 且 $H=A(A+B)^{-1}B$，若 B 为正定矩阵，则 $H=\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$。

证明： 以一元二次函数配方 $ax^2+bx+c=a\left(x-x^{*}\right)+d$ 为例，首先计算左式最小值点，对左式求导可得 $2A(y-a)+2B(y-b)=0$，$y^{*}=(A+B)^{-1}(Aa+Bb)$。由于左右两式二次项系数相同，接下来只要验证常数项是否相等。将 $y=y^{*}$ 代入左式可得：

$$\begin{aligned}
&\left(y^{*}-a\right)^{\mathrm{T}}A\left(y^{*}-a\right)+\left(y^{*}-b\right)^{\mathrm{T}}B\left(y^{*}-b\right) \\
&=\left[(A+B)^{-1}(Aa+Bb)-(A+B)^{-1}(Aa+Ba)\right]^{\mathrm{T}}A\left(y^{*}-a\right) \\
&\quad+\left[(A+B)^{-1}(Aa+Bb)-(A+B)^{-1}(Ab+Bb)\right]^{\mathrm{T}}B\left(y^{*}-b\right) \\
&=(b-a)^{\mathrm{T}}B(A+B)^{-1}A(A+B)^{-1}B(b-a)+(a-b)^{T}A(A+B)^{-1}B(A+B)^{-1}A(a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}\left[(A+B-A)(A+B)^{-1}A(A+B)^{-1}B+A(A+B)^{-1}B(A+B)^{-1}A\right](a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}A(A+B)^{-1}B+A(A+B)^{-1}\left[B(A+B)^{-1}A-A(A+B)^{-1}B\right](a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}A(A+B)^{-1}B+A(A+B)^{-1}\left[(A+B-A)(A+B)^{-1}A-A(A+B)^{-1}B\right](a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}A(A+B)^{-1}B+A(A+B)^{-1}\left[A-A(A+B)^{-1}(A+B)\right](a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}\left[A(A+B)^{-1}B\right](a-b) \\
&=(a-b)^{\mathrm{T}}H(a-b).
\end{aligned}$$

左右两式相等。当 B 为正定矩阵时：

$$H=A(A+B)^{-1}B=\left[B^{-1}(A+B)A^{-1}\right]^{-1}=\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}.$$

□

因此在定理 3.1 中代入 $y=\alpha,a=\bar{\alpha},b=\lambda,A=\left((\Delta)^{-1}+P^{T}\Omega^{-1}P\right)^{-1},B=Q$，可将 α 的后验分布密度函数改写为：

$$
\begin{aligned}
P\left(\alpha \mid r_1,\cdots,r_m,q\right) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\lambda\right)^{\mathrm{T}} Q\left(\alpha-\lambda\right)+\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)^{T}\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}\right)\left(\alpha-\bar{\alpha}\right)\right\} \\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha-\alpha^{*}\right)^{\mathrm{T}}\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P+Q^{-1}\right)\left(\alpha-\alpha^{*}\right)\right\} \\
&\cdot\exp\left\{\left(\lambda-\bar{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}\left[\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)^{-1}+Q^{-1}\right]^{-1}\left(\lambda-\bar{\alpha}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

其中 $\alpha^{*}=\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P+Q\right)\left[\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)+Q^{-1}\bar{\alpha}+Q\lambda\right]$。继而可以得到 α 的后验分布参数：

$$
\alpha \sim N\left(\alpha^{*},\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P+Q^{-1}\right)^{-1}\right). \tag{3.10}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}&=\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P+Q\right)\left[\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right)+Q^{-1}\bar{\alpha}+Q\lambda\right], \\
\hat{\Sigma}&=\left(\left(\Delta\right)^{-1}+P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P+Q^{-1}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

4. 总结

本文在传统 BL 分布模型的基础上，进一步深入探讨了协方差矩阵的估计问题，通过引入基于投资者观点的协方差矩阵的对数先验分布，并运用贝叶斯方法，得到了协方差矩阵的后验参数估计，为实际投资决策提供了有力的数据支持。

参考文献

[1] Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] Black, F. and Litterman, R. (1992) Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts*, **48**, 28-43. https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28

[3] Andrei, M.S. and Hsu, J. (2020) A Bayesian Approach for Asset Allocation. *International Journal of Statistics and Probability*, **9**,1-14. https://doi.org/10.5539/ijsp.v9n4p1

[4] Leonard, T. and Hsu, J. (1992) Bayesian Inference for a Covariance Matrix. *The Annals of Statistics*, **20**, 1669-1696. https://doi.org/10.1214/aos/1176348885

[5] Bellman, R. (1997) Introduction to Matrix Analysis. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1137/1.9781611971170

[6] Satchell, S. and Scowcorft, A. (2007) A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction. *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, 39-53. https://doi.org/10.1016/B978-075068321-0.50004-2