Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(6), 9-14
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146221

给定最大度的补图的最小特征值

王东宜

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年3月21日；录用日期：2024年4月28日；发布日期：2024年6月11日

摘 要

假设G是一个简单连通图，其顶点集$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。图$G$的邻接矩阵表示为$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，其中如果两个顶点$v_i$和$v_j$在图$G$中相邻，则$a_{ij}=1$；否则$a_{ij}=0$。用$J_n$表示所有元素均为1的$n$阶矩阵，并且用$I_n$表示$n$阶单位矩阵，那么$A(G^c)$和$A(G)$之间有$A(G^c)=J_n-I_n-A(G)$。在这篇文章中，通过使用$A(G^c)$和$A(G)$的关系，确定了给定最大度$\Delta\geq\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$的所有简单图的补图中最小特征值达到最小的图。

关键词

最小特征值，最大度，补图

The Least Eigenvalue of the Complements of Graphs with Given Maximum Degree

Dongyi Wang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 21st, 2024; accepted: Apr. 28th, 2024; published: Jun. 11th, 2024

Abstract

Suppose G is a connected simple graph with the vertex set $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. The adjacency matrix of G is $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$, where $a_{ij}=1$ if two vertices v_i and v_j are adjacent in G and $a_{ij}=0$ otherwise. Let J_n be the matrix of order n whose all entries are 1 and I_n be the identity matrix of order n. Then we have $A(G^c)=J_n-I_n-A(G)$. In this paper using the relationship be-

文章引用: 王东宜. 给定最大度的补图的最小特征值[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 9-14.
DOI: 10.12677/pm.2024.146221

tween $A(G^c)$ and $A(G)$, we determine the graphs whose least eigenvalue is minimum among all complements of graphs with given maximum degree $\Delta \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Keywords

Least Eigenvalue, Maximum Degree, Complements of Graphs

1. 引言

图的最小特征值能够反映图的结构性质，所以近年来图的最小特征值的极图问题已经被广泛研究。Wang Y.和 Fan Y. Z. [1]得到了带有割点的最小特征值达到最小的图。Ye M. L.，Fan Y. Z.和 Liang D. [2]描述了给定连通度的最小特征值达到最小的图。Liu Z.和 Zhou B. [3]确定了给定悬挂点数的最小特征值达到最小的图。Hong Y.和 Shu J. L. [4]给出平面图最小特征值的下界。Wang Y.和 Fan Y. Z. [5]描述了带有割边的最小特征值达到最小的图。Zhu B. X. [6]描述了给定控制数的简单图的最小特征值达到最小的唯一图。

同样，补图的最小特征值也能够很好地反映图的结构性质，但目前为止，关于图的补图的最小特征值研究结果还不是很多。Fan Y. Z.，Zhang F. F.和 Wang Y. [7]给出了所有树的补图中最小特征值达到最小的图。Jiang G.，Yu G.和 Sun W. [8]确定了只有两个悬挂点的图中补图的最小特征值达到最小的图。Wang H.，Javaid M.，Akram S.等[9]研究了补图是仙人掌图的简单连通图的最小特征值。Chen X.，Wang G. [10]研究了带有两个悬挂点的补图的距离谱。相对来说，刻画带参数的补图的最小特征值的文章比较少，所以本文选择研究给定最大度的补图的最小特征值。

假定 G 是一个简单的连通图。图 $G=(V(G),E(G))$ 的补集可以表示为 $G^c=(V(G^c),E(G^c))$，其中 $V(G^c)=V(G)$ 和 $E(G^c)=\{xy: x,y\in V(G), xy\notin E(G)\}$。图 G 的邻接矩阵表示为 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，其中如果两个顶点 v_i 和 v_j 在图 G 中相邻，则 $a_{ij}=1$；否则 $a_{ij}=0$。由于 $A(G)$ 是一个非负的实对称矩阵，所以其特征值都是实数，可以排列为 $\lambda_1(G)\geq\lambda_2(G)\geq\cdots\geq\lambda_{\min}(G)$，其中 $\lambda_1(G)$ 和 $\lambda_{\min}(G)$ 分别称为图 G 的谱半径和最小特征值。$A(G)$ 的特征值也是图 G 的特征值。图 G 的最大度是指图中所有顶点的度的最大值，用 Δ 表示。用 $N_G(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的邻点集。J_n 表示所有元素均为 1 的 n 阶矩阵，并且 I_n 表示 n 阶单位矩阵，那么 $A(G^c)$ 和 $A(G)$ 之间有 $A(G^c)=J_n-I_n-A(G)$。在这篇文章中，主要通过补图的邻接矩阵 $A(G^c)$ 和原图的邻接矩阵 $A(G)$ 之间的关系，刻画出了给定最大度 $\Delta\geq\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 的所有简单图的补图中，其最小特征值达到最小的图。

2. 预备知识

假定 G 是 n 阶简单连通图其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为邻接矩阵 $A(G)$ 的单位特征向量，其中 $x(v_i)=x_i\,(i=1,\cdots,n)$，则有

$$x^{\mathrm{T}}A(G)x=2\sum_{v_iv_j\in E(G)}x_ix_j \tag{1}$$

令 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $A(G)$ 的特征值 $\lambda(G)$ 对应的单位特征向量，则有

$$\lambda(G)x_i=\sum_{v_j\in N_G(x_i)}x_j \tag{2}$$

引理 2.1 (瑞利定理)假定 $\lambda_1(G)$ 为图 G 的谱半径，$\lambda_{\min}(G)$ 为图 G 的最小特征值，若 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为邻接矩阵 $A(G)$ 的单位特征向量，那么有

$$\lambda_{\min}(G)\le x^{\mathrm{T}}A(G)x\le\lambda_1(G)$$

第一个等号成立当且仅当 x 是 $A(G)$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}(G)$ 对应的单位特征向量和第二个等号成立当且仅当 x 是 $A(G)$ 的谱半径 $\lambda_1(G)$ 对应的单位特征向量。

引理 2.2 [11] 假定简单图 G 的最小特征值用 $\lambda_{\min}(G)$ 表示，则 $\lambda_{\min}(G)\ge-\sqrt{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$，等号成立当且仅当 $G\cong K_{\lfloor n\rfloor\lceil n\rceil}$。

引理 2.3 [12] 假设 G 是一个最大度为 Δ 简单连通图，其谱半径用 $\lambda_1(G)$ 表示，那么有 $\sqrt{\Delta}\le\lambda_1(G)\le\Delta$。

□

3. 主要结论

设 G 是一个顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的 n 阶简单图，将其补图记为 G^c，有 $V\left(G^c\right)=V(G)$。令 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $A\left(G^c\right)$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)$ 对应的单位特征向量，其中 $x(v_i)=x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$。记 $V^+=\left\{v_i\in V\left(G^c\right):x_i>0\right\}$，$V^-=\left\{v_i\in V\left(G^c\right):x_i<0\right\}$ 和 $V^0=\left\{v_i\in V\left(G^c\right):x_i=0\right\}$。接下来，通过补图的邻接矩阵 $A\left(G^c\right)$ 和原图的邻接矩阵 $A(G)$ 之间的关系，刻画出了给定最大度 $\Delta\ge\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 的所有简单图的补图中，其最小特征值达到最小的图。

令二部图 $B(p,q)$ 具有两部分顶点集 (V_1,V_2)，其中 $V_1=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_p\right\}$ 且 $V_2=\left\{v_{p+1},v_{p+2},\cdots,v_{p+q}\right\}$。令 V_1 中所有的顶点相邻，并令 V_2 中的所有顶点也相邻，删除所有 V_1 与 V_2 相连的边。添加一个新的顶点 u，将顶点 u 与 V_1 中的 s 个顶点和 V_2 中的 t 个顶点连接。这样得到的图记为 $H_{p,q}^{s,t}$。

定理 3.1 假设 G 是一个给定最大度 $\Delta\ge\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 的 n 阶简单连通图，那么 $\lambda_{\min}\left(H^c\left(_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\Delta-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right)\right)<\lambda_{\min}\left(G^c\right)$。

证明： 下面先分是否存在零分量两种情况进行讨论。

情况 1：假设 $\left|V^0\right|=0$。若 $\left|V^0\right|=0$，则一定有 $n-\Delta\le\left|V^-\right|,\left|V^+\right|\le\Delta$。否则，根据引理 2.1 和 2.2 有

$$\lambda_{\min}\left(G^c\right)=x^{\mathrm{T}}A\left(G^c\right)x=2\sum_{v_i,v_j\in E\left(G^c\right)}x_ix_j\ge2\sum_{v_i\in\left|V^-\right|,v_j\in\left|V^+\right|}x_ix_j>\lambda_{\min}\left(K_{\left|V^-\right|,\left|V^+\right|}\right)$$
$$=-\sqrt{\left|V^-\right|\left|V^+\right|}>-\sqrt{\Delta(n-\Delta)}=\lambda_{\min}\left(K_{\Delta,n-\Delta}\right)$$

这与 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)$ 是极小的产生矛盾。所以接下来我们只需讨论 $n-\Delta\le\left|V^-\right|,\left|V^+\right|\le\Delta$ 时的情况。

假设顶点 u 为最大度点，不失一般性，假定 $x_u>0$。由于 $\left|V^+\right|\le\Delta$ 且 $\left|V^-\right|\le\Delta$，可以得到 V^+ 中的所有顶点一定都相邻，V^- 中的所有顶点也一定都相邻。否则，如果存在不相邻的两个顶点 $u_1\in V^+$ 和 $v_1\in V^+$。显然，图 $G+u_1v_1$ 的最大度也是 Δ。根据方程(1)，可以得到

$$x^{\mathrm{T}}A(G)x=2\sum_{v_iv_j\in E(G)}x_ix_j<2\sum_{v_iv_j\in E(G)}x_ix_j+2x_{u_1}x_{v_1}=x^{\mathrm{T}}A(G+u_1v_1)x$$

通过引理 2.1，有

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\min}\left(G^c\right) &= x^{\mathrm{T}} A\left(G^c\right) x \\
&= x^{\mathrm{T}}\left(J_n - I_n\right) x - x^{\mathrm{T}} A(G) x \\
&> x^{\mathrm{T}}\left(J_n - I_n\right) x - x^{\mathrm{T}} A\left(G + u_1 v_1\right) x \\
&= x^{\mathrm{T}} A\left(\left(G + u_1 v_1\right)^c\right) x \\
&\geq \lambda_{\min}\left(\left(G + u_1 v_1\right)^c\right)
\end{aligned}
$$

这与 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)$ 极小相矛盾。同理，也可以证明 V^- 中的所有顶点一定都相邻。

接下来我们证明 V^+ 中除最大度点 u 以外的所有的顶点都和 V^- 中的顶点不相邻。否则，如果除 u 点以外存在相邻的两个顶点 $w_1 \in V^+$ 和 $z_1 \in V^-$。显然，图 $G - w_1 z_1$ 的最大度也是 Δ。根据方程(1)，可以得到

$$
x^{\mathrm{T}} A(G) x = 2\sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j < 2\sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j - 2 x_{w_1} x_{z_1} = x^{\mathrm{T}} A\left(G - w_1 z_1\right) x
$$

通过引理 2.1，有

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\min}\left(G^c\right) &= x^{\mathrm{T}} A\left(G^c\right) x \\
&= x^{\mathrm{T}}\left(J_n - I_n\right) x - x^{\mathrm{T}} A(G) x \\
&> x^{\mathrm{T}}\left(J_n - I_n\right) x - x^{\mathrm{T}} A\left(G - w_1 z_1\right) x \\
&= x^{\mathrm{T}} A\left(G - w_1 z_1\right)^c x \\
&\geq \lambda_{\min}\left(\left(G - w_1 z_1\right)^c\right)
\end{aligned}
$$

这与 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)$ 极小相矛盾。

综合上述讨论和图 $H_{p,q}^{s,t}$ 的构造可以知道，如果假定 $\left|V^+\right| = p$ 和 $\left|V^-\right| = q$，那么 $G^c \cong H^c\left(\begin{smallmatrix} p-1,\Delta-p+1 \\ p-1,q \end{smallmatrix}\right)$。

根据 $H^c\left(\begin{smallmatrix} p-1,\Delta-p+1 \\ p-1,q \end{smallmatrix}\right)$ 的对称性，可以知道，$V^+ \setminus u$ 中的所有顶点对应于相同的分量 x_1，$V^- \cap N(u)$ 中的所有顶点对应于相同的分量 x_2 和 $V^- \setminus N(u)$ 中的所有顶点对应相同的值 x_3，u 点对应分量 x_u。由方程(2)可以得到

$$
\begin{cases}
\lambda_{\min} x_1 = (p + q - \Delta - 1) x_2 + (\Delta - p + 1) x_3 \\
\lambda_{\min} x_2 = (p - 1) x_1 + x_u \\
\lambda_{\min} x_3 = (p - 1) x_1 \\
\lambda_{\min} x_u = (p + q - \Delta - 1) x_2
\end{cases}
$$

将上述方程转化为矩阵方程 $(\lambda I_4 - A) x' = 0$，其中 $x' = \left(x_1, x_2, x_3, x_u\right)^{\mathrm{T}}$ 和

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & p + q - \Delta - 1 & \Delta - p + 1 & 0 \\
p - 1 & 0 & 0 & 1 \\
p - 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p + q - \Delta - 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

令 $\varphi_{p,q}(\lambda) = det\left(I_4 \lambda - A\right)$。那么有

$$
\varphi_{p,q}(\lambda) = \lambda^4 + (\Delta + 1 - p - pq)\lambda^2 + (\Delta + 1 - p - q)(\Delta + 1 - p)(1 - p) \tag{3}
$$

因此，可以得到

$$
\varphi_{p,q}(\lambda) - \varphi_{p+1,q-1}(\lambda) = (q - p)\lambda^2 + (\Delta + 1 - p - q)(\Delta + 1 - 2p)
$$

令

$$\begin{aligned}f(\Delta) &= -(\Delta+1-p-q)(\Delta+1-2p) \\ &= -\Delta^2+(3p+q-2)\Delta-2pq-2p^2+3p+q-1\end{aligned}$$

由上式可知 $f(\Delta)$ 的最大根为 $\frac{(p-q)^2}{4}$。显然，如果 $\lambda_{\min}=-\sqrt{\Delta}$，则 $(q-p)\left(-\sqrt{\Delta}\right)^2>\frac{(p-q)^2}{4}$。所以 $\varphi_{p,q}\left(-\sqrt{\Delta}\right)-\varphi_{p+1,q-1}\left(-\sqrt{\Delta}\right)=(q-p)\left(-\sqrt{\Delta}\right)^2+(\Delta+1-p-q)(\Delta+1-2p)>0$。根据 $H^c\binom{p-1,\Delta-p+1}{p-1,q}$ 的构造可以知道其是二部图，那么 $\lambda_1(G)=-\lambda_{\min}(G)$。通过引理 2.3，有 $\lambda_{\min}<-\sqrt{\Delta}$，从而可得 $\varphi_{p,q}(\lambda_{\min})-\varphi_{p+1,q-1}(\lambda_{\min})>0$。由于 $\varphi_{p,q}(\lambda_{\min})=0$，所以 $\varphi_{p+1,q-1}(\lambda_{\min})<0$。因此，$\lambda_{\min}\left(H^c\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\Delta-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\right)<\lambda_{\min}\left(H^c\binom{p-1,\Delta-p+1}{p-1,q}\right)$。根据以上论证和引理 3.1，可以得到 $\lambda_{\min}\left(H^c\binom{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\Delta-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\right)<\lambda_{\min}\left(G^c\right)$。至此情况 1 证明完成。

情况 2：假设 $\left|V^0\right|\neq 0$。若 $\left|V^0\right|\neq 0$，则令 y 是 x 去掉 $v\in V^0$ 的相应分量的子向量。根据引理 2.1 和方程 (1)，有

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(G^c\right) &= 2\sum_{v_iv_j\in E\left(G^c\right)}x_ix_j \\ &= y^{\mathrm{T}}A\left(\left(G-V^0\right)^c\right)y \\ &\geq \lambda_{\min}\left(\left(G-V^0\right)^c\right)\end{aligned}$$

其中不等式中的等号成立当且仅当 y 是 $\left(G-V^0\right)^c$ 的最小特征值对应的向量。显然有

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(\left(G-V^0\right)^c\right) &\geq \lambda_{\min}\left(K_{\left|V^-\right|,\left|V^+\right|}\right) \\ &= -\sqrt{\left|V^-\right|\left|V^+\right|} \\ &\geq -\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\end{aligned}$$

其中第一个不等式中的等号成立当且仅当 $\left(G-V^0\right)^c\cong K_{\left|V^-\right|,\left|V^+\right|}$。结合上面两个式子，如果 $\left|V^0\right|\neq 0$，则有 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)\geq-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$。等号成立当且仅当 $V^0=\{u\}$ 和 $G^c\cong H^c\binom{b,\Delta-b}{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}$，其中 u 是最大度点，b 是一些正整数。至此完成了情况 2 的证明。

最后，在情况 1 中，从式子(3)可以知道 $\lambda_{\min}\left(H^c\binom{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\Delta-\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}\right)$ 是如下方程的最小根：

$$\begin{aligned}&\lambda^4+\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right]\lambda^2 \\ &+\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)-\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right]\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\right]\left[1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\right]=0\end{aligned}$$

通过计算可以得到当 $\lambda=-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$ 时，有

$$\lambda^4+\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right]\lambda^2$$
$$+\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)-\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right]\left[\Delta+1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\right]\left[1-\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1\right)\right]\leq 0$$

等号成立当且仅当 $\Delta=n-1$ 是偶数，这表明 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)<\lambda_{\min}\left(H^c\left(\begin{smallmatrix}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\Delta-\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\\ \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\end{smallmatrix}\right)\right)\leq-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$。

在情况 2 中，根据情况 2 中的证明过程，可以得到 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)\geq-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$。

综合上述讨论，如果 G^c 的最小特征值达到最小对应的极图属于情况 1，则有 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)<-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$；如果 G^c 的最小特征值达到最小对应的极图属于情况 2，则有 $\lambda_{\min}\left(G^c\right)\geq-\sqrt{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$。所以 G^c 的最小特征值达到最小对应的极图属于情况 1。因此 $\lambda_{\min}\left(H^c\left(\begin{smallmatrix}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\Delta-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\\ \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\end{smallmatrix}\right)\right)<\lambda_{\min}\left(G^c\right)$，结论成立。□

参考文献

[1] Wang, Y. and Fan, Y.Z. (2010) The Least Eigenvalue of a Graph with Cut Vertices. *Linear Algebra and Its Applications*, **433**, 19-27. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.01.030

[2] Ye, M.L., Fan, Y.Z. and Liang, D. (2009) The Least Eigenvalue of Graphs with Given Connectivity. *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 1375-1379. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.10.031

[3] Liu, Z. and Zhou, B. (2012) On Least Eigenvalues of Bicyclic Graphs with Fixed Number of Pendant Vertices. *Journal of Mathematical Sciences*, **182**, 175-192. https://doi.org/10.1007/s10958-012-0738-y

[4] Hong, Y. and Shu, J.L. (1999) Sharp Lower Bounds of the Least Eigenvalue of Planar Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **296**, 227-232. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00129-9

[5] Wang, Y. and Fan, Y.Z. (2012) The Least Eigenvalue of Graphs with Cut Edges. *Graphs and Combinatorics*, **28**, 555-561. https://doi.org/10.1007/s00373-011-1060-z

[6] Zhu, B.X. (2012) The Least Eigenvalue of a Graph with a Given Domination Number. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 2713-2718. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.06.007

[7] Fan, Y.Z., Zhang, F.F. and Wang, Y. (2011) The Least Eigenvalue of the Complements of Trees. *Linear Algebra and Its Applications*, **435**, 2150-2155. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.011

[8] Jiang, G., Yu, G., Sun, W., *et al*. (2018) The Least Eigenvalue of Graphs Whose Complements Have Only Two Pendent Vertices. *Applied Mathematics and Computation*, **331**, 112-119. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.048

[9] Wang, H., Javaid, M., Akram, S., *et al*. (2019) Least Eigenvalue of the Connected Graphs Whose Complements Are Cacti. *Open Mathematics*, **17**, 1319-1331. https://doi.org/10.1515/math-2019-0097

[10] Chen, X. and Wang, G. (2023) The Distance Spectrum of the Complements of Graphs with Two Pendent Vertices. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **54**, 1069-1080. https://doi.org/10.1007/s13226-022-00322-w

[11] Constantine, G. (1985) Lower Bounds on the Spectra of Symmetric Matrices with Nonnegative Entries. *Linear Algebra and Its Applications*, **65**, 171-178. https://doi.org/10.1016/0024-3795(85)90095-3

[12] Hofmeister, M. (1988) Spectral Radius and Degree Sequence. *Mathematische Nachrichten*, **139**, 37-44. https://doi.org/10.1002/mana.19881390105