Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(6), 255-268
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146246

可压缩液晶流方程解的衰减估计

谢婵鑫

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年4月1日；录用日期：2024年5月3日；发布日期：2024年6月27日

摘 要

本文主要研究了可压缩液晶流系统在 $\mathbb{R}^3$ 中柯西问题解的高阶导数的衰减估计。本文利用傅立叶变换和中低频分解的方法，完成了证明。

关键词

可压缩液晶流，傅立叶变换，衰减估计

Decay Estimation of the Solutions to the Compressible Nematic Liquid Crystal Flow Model

Chanxin Xie

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 1st, 2024; accepted: May 3rd, 2024; published: Jun. 27th, 2024

Abstract

This paper primarily studies the decay of higher-order derivatives of the solution to the Cauchy problem on the compressible nematic liquid crystal flow system in $\mathbb{R}^3$, The proof is accomplished by virtue of Fourier theory and a new observation for cancellation of alow-medium-frequency quantity.

Keywords

Compressible Nematic Liquid Crystal Flow, Fourier Transform, Decay Estimate

文章引用: 谢婵鑫. 可压缩液晶流方程解的衰减估计[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 255-268.
DOI: 10.12677/pm.2024.146246

1. 引言

我们下面考虑的系统满足下列方程：

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ (\rho u)_t+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)=\mathcal{L}u-\nabla d\cdot\Delta d,\\ d_t+u\cdot\nabla d=\Delta d+|\nabla d|^2 d,\end{cases}\tag{1.1}$$

模型的初始值为

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad u(x,0)=u_0(x),\quad d(x,0)=d_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^3,\tag{1.2}$$

其中 $\rho(x,t):\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$ 和 $u(x,t):\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ 分别为流体的密度和速度。$m=\rho u$ 为动量，$P=P(\rho)$ 是压力函数的表达式。液晶流的光轴矢量是一个单位向量，表达式为 $d(x,t):\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathrm{S}^2$，即 $d=1$。$\mathcal{L}$ 为 *Lamé* 算子，

$$\mathcal{L}u=\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u.$$

μ 和 λ 为剪切黏度和体积黏度，满足 $\mu>0$，$2\mu+3\lambda\ge 0$。

这个系统被称为可压缩液晶流模型。液晶流被认为是缓慢运动的粒子，其中流体速度和粒子的排列相互影响。液晶可以形成并保持在液体和固体之间的中间状态。向列相是液晶中最常见的一种。Erickse [1] [2]和 Leslie [3] [4]建立了液晶的流体力学理论。当流体是可压缩时，液晶系统会变得更加复杂，研究结果相对来说比较少，由于液晶流系统在数学和物理学的重要性，有非常多的文献研究了它的数学理论。不可压缩液晶流动的数学分析是由 Lin 和 Liu 在[5] [6]中提出的。对不可压缩的流体，我们可以参考文献[7]-[13]。

当流体被允许可压缩时，Ericksen-Leslie 系统变得更加复杂。据我们所知，目前可用的分析著作似乎很少。Ding-Lin-Wang-Wen [11]和 Huang-Wang-Wen [12]研究了具有非负初始密度的系统(1.1)的初值或初边值问题的局部时强解。基于[13] [14]，在[15] [16]中得到了强解的爆破判据。Hu 和 Wu [17]研究了临界空间强解的全局存在唯一性。在[18]的前提下，当初始数据在某能量范数上足够光滑且适当小时，在[19]中证明了经典解的全局适定性。特别是[20] [21] [22]，在一些较小的条件或几何角度条件下建立了全局弱解(见[23])。Wu [24]研究了高维(3 维及以上)的小初值经典解的整体存在性。对于该模型解的局部存在性、整体存在性和正则性，许多学者做了一系列的研究，可以参考[25]-[30]。在定理 3.1 的假设下，本文致力于建立定理 3.2 中解的时间衰减率。通过傅立叶变换和低高频分解[31]的方法，完成了证明。

下面是本文的符号说明和一些引理。

2. 符号说明和一些引理

在本文中，C 表示一般的正常数。对于整数 $m\ge 0$，Sobolev 空间 $H^m(R^3)$ 中的范数表示为 $\|\cdot\|_{H^m}$。特别地，当 $m=0$ 时，我们将简单地使用 $\|\cdot\|$。同通常一样，$\langle\bullet,\bullet\rangle$ 表示 $L^2(R^3)$ 中的内积。梯度表示为 $\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$，$\partial_i=\partial_{x_i}$，$i=1,2,3$。对于任意整数 $l\ge 0$，$\nabla^l f$ 表示函数 f 的所有 l 阶导数。

为了后续证明主要结论的需要，下面介绍两个相关引理。

首先，列出一些 Sobolev 空间中的基本不等式。其证明可参考文献[32] [33]。

引理 2.1 令 $f\in H^2(\mathbb{R}^3)$，有

(i) $\|f\|_{L^\infty}\le C\|\nabla f\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla f\|_{H^1}^{1/2}\le C\|\nabla f\|_{H^1}$；

(ii) $\|f\|_{L^6}\le C\|\nabla f\|_{L^2}$；

(iii) $\|f\|_{L^q}\le C\|f\|_{H^1}$, $2\le q\le 6$.

引理 2.2 令 $s>0$ 和 $m\ge 1$ 是整数，有

$$\left\|\nabla^s(fg)\right\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^s g\right\|_{L^{p_2}}+C\left\|\nabla^s f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}},$$

和

$$\left\|\nabla^m(fg)-f\nabla^m g\right\|_{L^p}\le C\|\nabla f\|_{L^{p_1}}\left\|\nabla^{m-1}g\right\|_{L^{p_2}}+C\left\|\nabla^m f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}},$$

这里 $p,p_1,p_2,p_3,p_4\in[1,\infty]$，且

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}.$$

引理 2.3 ([31])对于 $f(x)\in H^m(\mathbb{R}^3)$ 和任意给定的整数 k,k_0 和 k_1 （$k_0\le k\le k_1\le m$），下列式子成立

$$\left\|\nabla^k f^l\right\|_{L^2}\le r_0^{k-k_0}\left\|\nabla^{k_0} f^l\right\|_{L^2},\quad \left\|\nabla^k f^l\right\|_{L^2}\le\left\|\nabla^{k_1} f\right\|_{L^2},\tag{2.1}$$

$$\left\|\nabla^k f^h\right\|_{L^2}\le\frac{1}{R_0^{k_1-k}}\left\|\nabla^{k_1} f^h\right\|_{L^2},\quad \left\|\nabla^k f^h\right\|_{L^2}\le\left\|\nabla^{k_1} f\right\|_{L^2}.\tag{2.2}$$

和

$$r_0^k\left\|f^m\right\|_{L^2}\le\left\|\nabla^k f^m\right\|_{L^2}\le R_0^k\left\|f^m\right\|_{L^2}.\tag{2.3}$$

3. 主要结果

通过对变量进行换元

$$\tilde\rho=\rho-\rho_\infty,\quad \tilde u=u,\quad \tilde d=d-d_\infty,$$

则方程可以写成

$$\begin{cases}\tilde\rho_t+\rho_\infty\operatorname{div}\tilde u=S_1,\\ \tilde u_t+\dfrac{P_\rho(\rho_\infty)}{\rho_\infty}\nabla\tilde\rho-\dfrac{\mu}{\rho_\infty}\Delta\tilde u-\dfrac{\mu+\lambda}{\rho_\infty}\nabla\operatorname{div}\tilde u=S_2,\\ \tilde d_t-\Delta\tilde d=S_3,\end{cases}\tag{3.1}$$

初值条件满足

$$(\tilde\rho,\tilde u,\tilde d)(x,0)=(\tilde\rho_0,\tilde u_0,\tilde d_0)(x).\tag{3.2}$$

非线性项满足

$$\begin{cases}S_1=-\operatorname{div}(\tilde\rho\tilde u),\\ S_2=-\tilde u\cdot\nabla\tilde u+g_1(\tilde\rho)\nabla\tilde\rho+\mu g_2(\tilde\rho)\Delta\tilde u+(\mu+\lambda)g_2(\tilde\rho)\nabla\operatorname{div}\tilde u-\dfrac{1}{\tilde\rho+\rho_\infty}\nabla\tilde d\cdot\Delta\tilde d,\\ S_3=-\tilde u\cdot\nabla\tilde d+\left|\nabla\tilde d\right|^2\tilde d.\end{cases}\tag{3.3}$$

其中

$$\begin{cases} g_1(\tilde{\rho}) = \dfrac{P_\rho(\rho_\infty)}{\rho_\infty} - \dfrac{P_\rho(\tilde{\rho}+\rho_\infty)}{\tilde{\rho}+\rho_\infty}, \\ g_2(\tilde{\rho}) = \dfrac{1}{\tilde{\rho}+\rho_\infty} - \dfrac{1}{\rho_\infty}, \end{cases}$$

再做一次变量变换

$$\tilde{\rho} \to \tilde{\rho}, \quad \tilde{u} \to \alpha u, \quad \tilde{d} \to d,$$

令 $\alpha = \dfrac{\rho_\infty}{\sqrt{P_\rho(\rho_\infty)}}, \lambda_1 = \sqrt{\rho_\infty}, \mu_1 = \dfrac{\mu}{\rho_\infty}, \mu_2 = \dfrac{\mu+\lambda}{\rho_\infty}$，

则方程可以写成

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + \lambda_1 \operatorname{div} \tilde{u} = \tilde{S}_1, \\ \tilde{u}_t + \lambda_1 \nabla \tilde{\rho} - \mu_1 \Delta \tilde{u} - \mu_2 \nabla \operatorname{div} \tilde{u} = \tilde{S}_2, \\ \tilde{d}_t - \Delta \tilde{d} = \tilde{S}_3, \end{cases} \tag{3.4}$$

初值条件满足

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{d}\right)\Big|_{t=0} &= \left(\tilde{\rho}_0, \tilde{u}_0, \tilde{d}_0\right)(x) \\ &:= \left(\rho_0 - \rho_\infty, u_0, d_0\right)(x) \to (0,0,0), \quad |x| \to +\infty \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中源项

$$\left(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3\right) := \left(S_1, \alpha S_2, S_3\right)\left(\tilde{\rho}, \frac{1}{\alpha}\tilde{u}, \tilde{d}\right). \tag{3.6}$$

通过先验假设直接计算可以得到

$$\left|g_1(\tilde{\rho})\right|, \left|g_2(\tilde{\rho})\right| \le C|\tilde{\rho}|, \tag{3.7}$$

这些不等式在后面将会用到。

命题 3.1 (局部存在性)假设 $(\tilde{\rho}_0, \tilde{u}_0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$，$\nabla \tilde{d}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$，则存在一个大于 0 的常数 T_1，使得系统(1.8)在 $\mathbb{R}^3 \times [0, T_1]$ 上有一个唯一的整体解 (ρ, u, d) 满足

$$\left(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{d}\right) \in C\left([0, T_1]; H^2(\mathbb{R}^3)\right).$$

证明：利用标准迭代论证、不动点定理和极大值原理进行证明。也可以参考[34] [35]。为了表述简单，我们省略了细节。

命题 3.2 (先验估计)由命题 3.1 可知，存在时间 $T' > 0$，解存在于 $\mathbb{R}^3 \times [0, T']$ 中。假设对于任意 $T \in (0, T']$，解存在于 $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ 上，则存在一个足够小的数 $\delta > 0$，使得

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\{ \left\|(\tilde{\rho}, \tilde{u})(\cdot, t)\right\|_{H^2} + \left\|\nabla \tilde{d}(\cdot, t)\right\|_{H^1} \right\} \le \delta, \tag{3.8}$$

那么有以下的估计：

$$\left\{ \left\|(\tilde{\rho}, \tilde{u})\right\|_{H^2}^2 + \left\|\nabla \tilde{d}\right\|_{H^1}^2 \right\} + \int_0^t \left[\left\|\nabla \tilde{\rho}\right\|_{H^1}^2 + \left\|\left(\nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{d}\right)\right\|_{H^2}^2 \right](\cdot, s)\,\mathrm{d}s \le C_1 \left\{ \left\|(\tilde{\rho}_0, \tilde{u}_0)\right\|_{H^2}^2 + \left\|\nabla \tilde{d}_0\right\|_{H^1}^2 \right\}. \tag{3.9}$$

定理 3.1 假设 $(\tilde{\rho}_0, \tilde{u}_0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$，$\nabla \tilde{d}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$，则存在一个足够小的常数 $\varepsilon > 0$，使得如果

$$\left\|\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0\right)\right\|_{H^2\left(\mathbb{R}^3\right)}+\left\|\nabla\tilde{d}_0\right\|_{H^1\left(\mathbb{R}^3\right)}\le\delta,$$

那么整体存在唯一的光滑解满足

$$\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\nabla\tilde{d}\right)\in C\left(\left[0,\infty\right);H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

在定理 3.1 的假设下，我们用下面的定理来陈述我们的结果。

定理 3.2 假设初始值 $\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0\right)\in H^2\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\nabla\tilde{d}_0\in H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\rho_\infty>0$，此外，如果初始数据 $\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0,\nabla\tilde{d}_0\right)$ 在 $L^1\left(R^3\right)$ 中有界，则存在一个正常数 C_0，当 $t\ge0$ 时，使得解 $\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\nabla\tilde{d}\right)$ 具有如下的时间衰减估计

$$\left\|\nabla^k\left(\tilde{\rho},\tilde{u}\right)(t)\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)}\le C_0\left(1+t\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},\quad k=0,1,2$$

$$\left\|\nabla\tilde{d}\left(t\right)\right\|_{H^1}\le\tilde{C}_0\mathrm{e}^{-Ct}.$$

首先，我们先给出高阶导的估计结果。

引理 3.1 对于 $0\le t\le T$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_h\left(t\right)+\mu_1\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\mu_2\left\|\nabla^2\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+\lambda_1\beta_1\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+\lambda_1\beta_1\left\|\nabla\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+C\delta\left(1+\beta_1\right)\left(\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $\mathcal{H}_h\left(t\right)=\left\|\nabla^2\left(\rho,u,d\right)\right\|_{L^2}^2+2\beta_1\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x$。

证明： 将 ∇^2 分别作用于(3.4)$_1$ 和(3.4)$_2$，同时用 $\nabla^2\rho,\nabla^2u$ 分别乘以(3.4)$_1$ 和(3.4)$_2$，在 R^3 上积分，并且利用基本不等式，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2\right)+\mu_1\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\mu_2\left\|\nabla^2\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

将 ∇ 作用到(3.4)$_2$，再对得到的等式乘以 $\nabla^2\tilde{\rho}$，利用 Hölder 不等式、Sobolev 不等式，然后在 R^3 上积分可得

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}\cdot\nabla\tilde{u}_t\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\tilde{\rho}\cdot\nabla S_2\mathrm{d}x+\mu_1\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\tilde{\rho}\cdot\nabla\Delta u\mathrm{d}x+\mu_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\tilde{\rho}\cdot\nabla\nabla\operatorname{div}u\mathrm{d}x\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}\right),\end{aligned}\tag{3.12}$$

这里我们利用了

$$\begin{aligned}\left\|\nabla S_2\right\|_{L^2}&\le C\left\|\nabla\tilde{u}\right\|_{L^6}\left\|\nabla\tilde{u}\right\|_{L^3}+C\left\|\tilde{u}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^2}+C\left\|\nabla g_1\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^6}\left\|\nabla\tilde{\rho}\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left\|g_1\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}+C\left\|\nabla g_2\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^6}\left\|\Delta\tilde{u}\right\|_{L^3}+C\left\|g_2\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}\\&\quad+C\left\|\nabla g_3\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^6}\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^3}+C\left\|g_3\left(\tilde{\rho}\right)\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}+\left\|\frac{1}{\tilde{\rho}}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{L^2}\left\|\Delta\tilde{d}\right\|_{L^2}\\&\le C\delta\left(\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}\right).\end{aligned}\tag{3.13}$$

下面对(3.12)左边的式子进行估计，并乘以一个足够小的数 β_1

$$\begin{aligned}&\beta_1\lambda_1\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_1\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\tilde{\rho}\cdot\nabla u\mathrm{d}x\\&\leq\lambda_1\beta_1\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\operatorname{div}u)^2\,\mathrm{d}x+C\delta\beta_1\left(\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}\tag{3.14}$$

将(3.11)和(3.14)相加，利用插值不等式，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|\nabla^2(\rho,u)\right\|_{L^2}^2+2\beta_1\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x\right\}+\mu_1\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\mu_2\left\|\nabla^2\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+\beta_1\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2\\&\leq C\delta\left(\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+\lambda_1\beta_1\left\|\nabla\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+C\delta(1+\beta_1)\left(\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

接下来，我们要给出 $\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2$ 的估计，将 ∇^2 作用到(3.4)$_3$，再对得到的等式乘以 ∇^2d 并在 R^3 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^2d\right\|^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2(u\cdot\nabla d)\cdot\nabla^2d\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^2\left(|\nabla d|^2d\right)\cdot\nabla^2d\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla d)\cdot\nabla^3d\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\left(|\nabla d|^2d\right)\cdot\nabla^3d\mathrm{d}x\\&\leq C\delta\left(\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

将(3.15)和(3.16)相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|\nabla^2(\rho,u,d)\right\|_{L^2}^2+2\beta_1\int\nabla u\cdot\nabla^2\rho\mathrm{d}x\right\}\\&+\mu_1\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\mu_2\left\|\nabla^2\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+\lambda_1\beta_1\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2\\&\leq C\delta\left(\left\|\nabla^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+\lambda_1\beta_1\left\|\nabla\operatorname{div}u\right\|_{L^2}^2+C\delta(1+\beta_1)\left(\left\|\nabla^3u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

证明结束。

4. 衰减估计

接下来，我们将给出解 (ρ,u,d) 的衰减估计。

命题 4.1 在定理 3.1 和定理 3.2 的假设下，存在一个正常数 C_0，当 $t\geq0$ 时，使得由命题 3.1 和命题 3.2 得到的整体解 $(\tilde{\rho},\tilde{u},\nabla\tilde{d})$ 具有如下的时间衰减估计

$$\left\|\nabla^k(\tilde{\rho},\tilde{u})(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C_0(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},\quad k=0,1,2$$

$$\left\|\nabla\tilde{d}(t)\right\|_{H^1}\leq\tilde{C}_0\mathrm{e}^{-Ct}.$$

引理 4.1 有

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{d}\right)(t)\right\|_{L^2}^2&\leq C\mathrm{e}^{-C_2t}\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0,d_0\right)\right\|_{L^2}^2+C\delta\int_0^t\mathrm{e}^{-C_2(t-\tau)}\left\|\nabla\tilde{d}(\tau)\right\|_{H^1}^2\mathrm{d}\tau\\&\quad+C\int_0^t\mathrm{e}^{-C_2(t-\tau)}\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho}^L,\tilde{u}^L\right)(\tau)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中正常数 C_2 与 δ 无关。

证明：将 $\nabla(3.4)_2$ 乘以 $\nabla\nabla\tilde{\rho}^L$，并使用$(3.4)_1$和分部积分法，我们得到

$$\lambda_1\left\langle\nabla\nabla\tilde{\rho},\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle=\left\langle\nabla S_2,\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle+\mu_1\left\langle\nabla\Delta\tilde{u},\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle+\mu_2\left\langle\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u},\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle-\left\langle\nabla\tilde{u}_t,\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle,$$

通过分部积分，可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla\tilde{u}_t,\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\nabla\tilde{u},\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle-\left\langle\nabla\tilde{u},\nabla\nabla\tilde{\rho}_t^{\,L}\right\rangle\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\nabla\tilde{u},\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\rangle-\left\langle\nabla\tilde{u},\nabla\nabla S_1^{\,L}\right\rangle+\lambda_1\left\langle\nabla\tilde{u},\nabla\nabla\operatorname{div}\tilde{u}^L\right\rangle,\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x=&-\lambda_1\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}\cdot\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\mathrm{d}x+\lambda_1\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\nabla\operatorname{div}\tilde{u}^L\mathrm{d}x\\&+\mu_1\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\Delta\tilde{u}\mathrm{d}x+\mu_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\mathrm{d}x\\&-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\nabla S_1^L-\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla S_2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.2}$$

然后，通过使用 Young 不等式，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\le&\frac{\lambda_1}{2}\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{\lambda_1}{8}\|\nabla\nabla\tilde{\rho}\|_{L^2}^2+\frac{\mu_1}{2}\|\nabla\Delta\tilde{u}\|_{L^2}^2\\&+\frac{\mu_2}{2}\|\nabla\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla S_1^L\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\nabla S_2\|_{L^2}^2\\&+\left(1+\lambda_1+\frac{1+\mu_1+\mu_2}{2}\right)\left\|\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\|_{L^2}^2+\frac{1+\lambda_1}{2}\left\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}^L\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.3}$$

根据 Plancherel 定理，引理 2.2 和(3.13)我们有

$$\left\|\nabla\tilde{S}_1^L\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\tilde{S}_2\right\|_{L^2}^2\le C\delta\left(\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}\right),\tag{4.4}$$

将(3.10)和 $\beta_2\times(4.3)$相加，利用(3.13)和(2.2)，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\right\}+\frac{\mu_1}{4}R_0^2\left\|\nabla^2\tilde{u}^h\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu_1}{4}\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}^2\\&+\frac{\mu_2}{4}\left\|\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{\beta_1\lambda_1}{8}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2\\&\le\frac{\lambda_1\beta_2}{2}\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{\lambda_1\beta_2}{8}\|\nabla\nabla\tilde{\rho}\|_{L^2}^2+\frac{\mu_1\beta_2}{2}\|\nabla\Delta\tilde{u}\|_{L^2}^2\\&\quad+\frac{\mu_2\beta_2}{2}\|\nabla\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{C\delta\beta_2}{2}\left(\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}\right)\\&\quad+\left(1+\lambda_1+\frac{1+\mu_1+\mu_2}{2}\right)\beta_2\left\|\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\|_{L^2}^2+\frac{(1+\lambda_1)\beta_2}{2}\left\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}^L\right\|_{L^2}^2\\&\quad+C\delta\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2}^2+\|\nabla d\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2 d\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2+\|\nabla\rho\|_{L^2}^2\right)\\&\quad+\lambda_1\beta_1\|\nabla\operatorname{div}u\|_{L^2}^2+C\delta(1+\beta_1)\left(\left\|\nabla^3 u\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^2\rho\right\|_{L^2}^2\right)\\&\le\left(\frac{\mu_2}{8}+\frac{\lambda_1(\beta_1+\beta_2)}{2}\right)\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{\beta_2\mu_1}{2}\|\nabla\Delta\tilde{u}\|_{L^2}^2+\frac{\beta_2\mu_2}{2}\left\|\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2\\&\quad+C\beta_2\left\|\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\right\|_{L^2}^2+C\beta_2\left\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}^L\right\|_{L^2}^2+C\delta(1+\beta_1+\beta_2)\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

在(4.5)的两边加 $\frac{\mu_1}{4}R_0^2\left\|\nabla^2\tilde{u}^L\right\|_{L^2}^2$，使用分解式(5.2)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\right)+\frac{\beta_2\lambda_1}{8}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2\\
&+\frac{\mu_1}{8}R_0^2\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu_1}{4}\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu_2}{4}\left\|\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2\\
&\le C\beta_2\left\|\nabla^2\tilde{\rho}^L\right\|_{L^2}^2+\left(C\beta_2+\frac{\mu_1}{4}R_0^2\right)\left\|\nabla^2\tilde{u}^L\right\|_{L^2}^2+\left(\frac{\mu_2}{8}+\frac{\lambda_1(\beta_1+\beta_2)}{2}\right)\left\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2\\
&\quad+\frac{\beta_2\mu_1}{2}\left\|\nabla\Delta\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{\beta_2\mu_2}{2}\left\|\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+C\delta\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},d\right)\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

注意到

$$
\beta_2<\max\left\{\frac{1}{4}\right\},\ R_0^2>\max\left\{\frac{4\left(\mu_2+\lambda_1\right)}{\mu_1}\right\},
\tag{4.7}
$$

利用 δ 的小性，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\right)+\frac{\beta_2\lambda_1}{16}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu_1}{16}R_0^2\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^2}^2\\
&+\frac{\mu_1}{8}\left\|\nabla^3\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu_2}{8}\left\|\nabla^2\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla^3 d\right\|_{L^2}^2\\
&\le C\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho}^L,\tilde{u}^L\right)\right\|_{L^2}^2+C\delta\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

根据分解(5.2)，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}+\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^h\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\tilde{d}\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

由分部积分法、Young 不等式和(2.2)可知

$$
\begin{aligned}
\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^h\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x&=-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\tilde{\rho}^h\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\mathrm{d}x\\
&\le\frac{\beta_2}{2}\left\|\nabla\tilde{\rho}^h\right\|_{L^2}^2+\frac{\beta_2}{2}\left\|\nabla\operatorname{div}\tilde{u}\right\|_{L^2}^2\\
&\le\frac{\beta_2}{2}\left\|\nabla^2\tilde{\rho}\right\|_{L^2}^2+\frac{\beta_2}{2}\left\|\nabla^2\tilde{u}\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\sim\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{d}\right)\right\|_{L^2}^2,
\tag{4.9}
$$

我们用到了 $0<\beta_2<\frac{1}{4}$，由式(4.8)和式(4.9)可知，存在一个常数 C_2，使得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\right)+C_2\left(\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x\right)\\
&\le C\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho}^L,\tilde{u}^L\right)\right\|_{L^2}^2+C\delta\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{H^1}^2.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

用(4.10)乘以 e^{C_2t}，对 $[0,t]$ 积分，得到

$$\mathcal{H}_h(t)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}^L\cdot\nabla\tilde{u}\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-C_2 t}\left(\mathcal{H}_h(0)-\beta_2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\nabla\tilde{\rho}_0^L\cdot\nabla\tilde{u}_0\mathrm{d}x\right) +C\int_0^t \mathrm{e}^{-C_2(t-\tau)}\left\|\nabla^2\left(\tilde{\rho}^L,\tilde{u}^L\right)(\tau)\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}\tau +C\delta\int_0^t \mathrm{e}^{-C_2(t-\tau)}\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{H^1}^2 \mathrm{d}\tau. \tag{4.11}$$

因此我们可以得到引理 4.1。

4.1. 中低频部分的衰减估计

在本小节中，设 $\mathbb{G}$ 是以下形式的微分算子的矩阵：

$$\mathbb{G}=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1\,\mathrm{div} & 0 \\ \lambda_1\nabla & -\mu_1\Delta-\mu_2\nabla\,\mathrm{div} & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

和

$$\overline{\mathbb{U}}(t):=\left(\bar{\rho}(t),\bar{u}(t),\bar{d}(t)\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbb{U}(0)=\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0,\tilde{d}_0\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.13}$$

我们有以下相应的线性化问题：

$$\begin{cases} \partial_t\overline{\mathbb{U}}+\mathbb{G}\overline{\mathbb{U}}=0,\ t>0 \\ \overline{\mathbb{U}}\big|_{t=0}=\mathbb{U}(0) \end{cases} \tag{4.14}$$

将傅立叶变换运用到(4.14) 中 x 变量，求解关于 t 的常微分方程，我们得到

$$\overline{\mathbb{U}}(t)=\mathcal{G}(t)\mathbb{U}(0),$$

式中半群 $\mathcal{G}(t)=\mathrm{e}^{-t\mathbb{G}}\ (t\ge 0)$ 是由线性算子 $\mathbb{G}$ 生成的，并且

$$\mathcal{G}(t)f:=\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t\mathbb{G}_\xi}\hat{f}(\xi)\right),$$

其中

$$\mathbb{G}_\xi=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\xi^{\mathrm{T}} & 0 \\ \mathrm{i}\xi & \mu_1|\xi|^2\delta_{ij}+\mu_2\xi_i\xi_j & 0 \\ 0 & 0 & |\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

接下来，我们引入一个重要引理。

引理 4.2 ([31])假设 $1\le p\le 2$，对于任何整数 k，有

$$\left\|\nabla^k\left(\mathcal{G}(t)\mathbb{U}^L(0)\right)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2}}\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{L^p}. \tag{4.15}$$

首先，我们建立非线性问题(3.4)和(3.6)的解的时间衰减估计。表示

$$\mathbb{U}(t):=\left(\tilde{\rho}(t),\tilde{u}(t),\tilde{d}(t)\right)^{\mathrm{T}}.$$

由(3.4)可以得到

$$\begin{cases} \partial_t\mathbb{U}+\mathbb{G}\mathbb{U}=S(\mathbb{U}),\ t>0 \\ \mathbb{U}\big|_{t=0}=\mathbb{U}(0), \end{cases} \tag{4.16}$$

其中 $S(\mathbb{U})=\left(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2,\tilde{S}_3\right)^{\mathrm{T}}$，根据 Duhamel 原理，我们将式(4.16)的解改写为：

$$\mathbb{U}(t)=\mathcal{G}(t)\mathbb{U}(0)+\int_0^t\mathcal{G}(t-\tau)S(\mathbb{U})(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.17}$$

基于引理 4.2，我们建立了非线性问题(3.4)~(3.6)解的中低频部分的时间衰减估计。

引理 4.3 ([31])假设$1\le p\le 2$，对于任何整数 k，存在一个正常数 C_3，使得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^k\mathbb{U}^L(t)\right\|_{L^2}\le{}& C_3(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{L^1}+C_3\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|S(\mathbb{U})(\tau)\right\|_{L^1}\mathrm{d}\tau\\&+C_3\int_{\frac{t}{2}}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2}}\left\|S(\mathbb{U})(\tau)\right\|_{L^2}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2. 非线性系统的衰减率

在本节中，结合引理 3.1 和引理 4.3，我们得到了非线性问题(3.4)解的时间衰减率。

引理 4.4 在命题 **3.1** 和 **3.2** 的假设下，有

$$\left\|\nabla^k(\tilde{\rho},\tilde{u})(t)\right\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},\quad k=0,1,2 \tag{4.19}$$

$$\left\|\nabla\tilde{d}(t)\right\|_{H^1}\le C\mathrm{e}^{-Ct}. \tag{4.20}$$

证明：对(3.4)作用 k 阶导数$(0\le k\le 2)$，在 R^3 上积分之后相加，并且利用 δ 的小性可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{H^1}^2+\left\|\nabla\tilde{d}\right\|_{H^2}^2\le 0. \tag{4.21}$$

将(4.21)与 $\mathrm{e}^{\frac{c}{2}t}$ 相乘，然后在$[0,t]$积分，得到

$$\left\|\nabla\tilde{d}(t)\right\|_{H^1}^2\le\mathrm{e}^{-\frac{c}{2}t}\left\|\nabla\tilde{d}_0\right\|_{H^2}^2 \tag{4.22}$$

因此，我们可以得到(4.20)。

定义

$$M(t):=\sup_{0\le\tau\le t}\sum_{m=0}^{2}(1+\tau)^{\frac{3}{4}+\frac{m}{2}}\left\|\nabla^m(\tilde{\rho},\tilde{u})(\tau)\right\|_{L^2} \tag{4.23}$$

$M(t)$是非递减的，对于$0\le m\le 2$，

$$\left\|\nabla^m(\tilde{\rho},\tilde{u})(\tau)\right\|_{L^2}\le C_4(1+\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{m}{2}}M(t),\quad 0\le\tau\le t \tag{4.24}$$

C_4 是与 δ 无关的正常数。利用 Hölder 不等式，(4.24)和先验假设，我们有

$$\left\|S(\mathbb{U})(\tau)\right\|_{L^1}\le\delta M(t)(1+\tau)^{-\frac{5}{4}}+\delta\left\|\nabla\tilde{d}_0\right\|_{H^2}\mathrm{e}^{-\frac{c}{4}\tau}. \tag{4.25}$$

和

$$\left\|S(\mathbb{U})(\tau)\right\|_{L^2}\lesssim\delta^{1-s_1}M^{1+s_1}(t)(1+\tau)^{-\frac{7}{4}-\frac{3}{4}s_1}+\delta\left\|\nabla\tilde{d}_0\right\|_{H^2}\mathrm{e}^{-\frac{c}{4}\tau}. \tag{4.26}$$

其中，$s_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$是一个小的固定常数。根据引理 4.4，(4.25)和(4.26)，对于$0\le k\le 2$，可以得到

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}^{L}(t)\right\|_{L^{2}} \le & C(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{L^{1}}+C\delta\left\|\nabla\tilde{d}_{0}\right\|_{H^{2}}\int_{0}^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{c}{4}\tau}\mathrm{d}\tau \\
& +C\delta\left\|\nabla\tilde{d}_{0}\right\|_{H^{2}}\int_{\frac{t}{2}}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{c}{4}\tau}\mathrm{d}\tau+C\delta M(t)\int_{0}^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}(1+\tau)^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}\tau \\
& +C\delta^{1-s_{1}}M(t)^{1+s_{1}}\int_{\frac{t}{2}}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2}}(1+\tau)^{-\frac{7}{4}-\frac{3}{4}s_{1}} \\
\le & C\left(\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{L^{1}}+\left\|\nabla\tilde{d}_{0}\right\|_{H^{2}}+\delta M(t)+\delta^{1-s_{1}}M(t)^{1+s_{1}}\right)(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

由式(4.1)和(4.27)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla^{2}\mathbb{U}(t)\right\|_{L^{2}}^{2} \le & C\mathrm{e}^{-C_{2}t}\left\|\nabla^{2}\mathbb{U}(0)\right\|_{L^{2}}^{2}+C\delta\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-C_{2}(t-\tau)}\left\|\nabla\tilde{d}(\tau)\right\|_{H^{1}}^{2}\mathrm{d}\tau \\
& +C\left(\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{L^{1}}^{2}+\left\|\nabla\tilde{d}_{0}\right\|_{H^{2}}^{2}+\delta^{2}M^{2}(t)+\delta^{2-2s_{1}}M(t)^{2+2s_{1}}\right)\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-C_{2}(t-\tau)}(1+\tau)^{-\frac{7}{2}}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

将(4.22)代入式(4.28)，得

$$
\left\|\nabla^{2}\mathbb{U}(t)\right\|_{L^{2}}^{2} \le C\left(\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{H^{2}\cap L^{1}}^{2}+\delta^{2}M^{2}(t)+\delta^{2-2s_{1}}M^{2+2s_{1}}(t)\right)(1+t)^{-\frac{7}{2}}
\tag{4.29}
$$

此外，利用分解式(5.2)和引理 2.3，我们得到

$$
\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}(t)\right\|_{L^{2}}^{2} \le C\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}^{L}(t)\right\|_{L^{2}}^{2}+C\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}^{h}(t)\right\|_{L^{2}}^{2} \le C\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}^{L}\right\|_{L^{2}}^{2}+C\left\|\nabla^{2}\mathbb{U}\right\|_{L^{2}}^{2}.
\tag{4.30}
$$

由(4.27)，(4.29)和(4.30)得到

$$
\left\|\nabla^{k}\mathbb{U}(t)\right\|_{L^{2}}^{2} \le C\left(\left\|\mathbb{U}(0)\right\|_{H^{2}\cap L^{1}}^{2}+\delta^{2}M^{2}(t)+\delta^{2-2s_{1}}M^{2+2s_{1}}(t)\right)(1+t)^{-\frac{3}{2}-k}
\tag{4.31}
$$

由 $M(t)$的定义并利用式(4.31)中 δ 的小性，存在一个独立于 δ 的正常数 C_5，使得

$$
M^{2}(t) \le \frac{C_{5}}{2}\left\{\left\|\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{d}\right)(0)\right\|_{H^{2}\cap L^{1}}^{2}+\delta^{2}M^{2}(t)+\delta^{2-2s_{1}}M(t)^{2+2s_{1}}\right\}
\tag{4.32}
$$

利用 Young 不等式，我们得到

$$
C_{5}\delta^{2-2s_{1}}M(t)^{2+2s_{1}} \le \frac{1-s_{1}}{2}C_{5}^{\frac{2}{1-s_{1}}}+\frac{1+s_{1}}{2}\delta^{\frac{4(1-s_{1})}{1+s_{1}}}M^{4}(t).
\tag{4.33}
$$

定义 $K_0 := C_5\left\|\left(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{d}\right)(0)\right\|_{H^2\cap L^1}^2+\frac{1-s_1}{2}C_5^{\frac{2}{1-s_1}}$ 和 $C_\delta := \frac{1+s_1}{2}\delta^{\frac{4(1-s_1)}{1+s_1}}$。由式(4.32)和 δ 的小性，我们得到

$$
M^{2}(t) \le K_{0}+C_{\delta}M^{4}(t).
\tag{4.34}
$$

其中 $M(t)\le C$，假设 $M^2(t)>2K_0$，其中 $t\in[\overline{t},+\infty)$，$\overline{t}>0$。因为 $M^2(0)=\left\|\left(\tilde{\rho}_0,\tilde{u}_0,\tilde{d}_0\right)\right\|_{H^2}$ 很小，并且 $M(t)\in C^0[0,+\infty)$，存在 $t_0\in(0,\overline{t})$ 使得 $M^2(t_0)=2K_0$。

由(4.34)可以得到

$$
M^{2}(t_{0}) \le K_{0}+C_{\delta}M^{4}(t_{0}).
$$

通过直接计算，有

$$
M^{2}(t_{0}) \le \frac{K_{0}}{1-C_{\delta}M^{2}(t_{0})},
\tag{4.35}
$$

设 δ 是一个很小的常数，使得 $C_\delta < \frac{1}{4K_0}$，即

$$C_\delta M^2(t_0) < \frac{1}{2}, \tag{4.36}$$

然后，由式(4.35)得到 $M^2(t_0) < 2K_0$。这就与假设 $M^2(t_0) = 2K_0$ 相矛盾了。因此，对于任意 $t \in [\bar{t}, +\infty)$ 我们有 $M^2(t) \le 2K_0$，注意 $M(t)$是非递减的。对于任意 $t \in [0, +\infty)$ 我们有 $M(t) \le C$。由式(4.23)中 $M(t)$的定义，我们证明了式(4.19)。

参考文献

[1] Ericksen, J.L. (1961) Conservation Laws for Liquid Crystals. *Transactions of the Society of Rheology*, **5**, 23-34. https://doi.org/10.1122/1.548883

[2] Ericksen, J.L. (1962) Hydrostatic Theory of Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **9**, 371-378. https://doi.org/10.1007/bf00253358

[3] Leslie, F.M. (1968) Some Constitutive Equations for Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **28**, 265-283. https://doi.org/10.1007/bf00251810

[4] Leslie, F.M. (1979) Theory of Flow Phenomena in Liquid Crystals. In: Brown, G., Ed., *Advances in Liquid Crystals*, Academic Press, New York.

[5] Lin, F. and Liu, C. (1995) Nonparabolic Dissipative Systems Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **48**, 501-537. https://doi.org/10.1002/cpa.3160480503

[6] Lin, F.H. and Liu, C. (1996) Partial Regularity of the Dynamic System Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **2**, 1-22. https://doi.org/10.3934/dcds.1996.2.1

[7] Gong, H., Huang, T. and Li, J. (2017) Nonuniqueness of Nematic Liquid Crystal Flows in Dimension Three. *Journal of Differential Equations*, **263**, 8630-8648. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.052

[8] Gong, H., Li, J. and Xu, C. (2016) Local Well-Posedness of Strong Solutions to Density-Dependent Liquid Crystal System. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **147**, 26-44. https://doi.org/10.1016/j.na.2016.08.014

[9] Hong, M. and Xin, Z. (2012) Global Existence of Solutions of the Liquid Crystal Flow for the Oseen-Frank Model in R2. *Advances in Mathematics*, **231**, 1364-1400. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.06.009

[10] Lin, F., Lin, J. and Wang, C. (2009) Liquid Crystal Flows in Two Dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 297-336. https://doi.org/10.1007/s00205-009-0278-x

[11] Ding, S.J., Lin, J.Y., Wang, C.Y., Wen, H.Y., *et al*. (2012) Compressible Hydrodynamic Flow of Liquid Crystals in 1-D. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **32**, 539-563. https://doi.org/10.3934/dcds.2012.32.539

[12] Huang, T., Wang, C. and Wen, H. (2012) Strong Solutions of the Compressible Nematic Liquid Crystal Flow. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2222-2265. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.036

[13] Huang, X., Li, J. and Xin, Z. (2010) Blowup Criterion for Viscous Baratropic Flows with Vacuum States. *Communications in Mathematical Physics*, **301**, 23-35. https://doi.org/10.1007/s00220-010-1148-y

[14] Huang, X., Li, J. and Xin, Z. (2011) Serrin-Type Criterion for the Three-Dimensional Viscous Compressible Flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **43**, 1872-1886. https://doi.org/10.1137/100814639

[15] Huang, T. and Wang, C. (2012) Blow up Criterion for Nematic Liquid Crystal Flows. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 875-884. https://doi.org/10.1080/03605302.2012.659366

[16] Huang, T., Wang, C. and Wen, H. (2011) Blow up Criterion for Compressible Nematic Liquid Crystal Flows in Dimension Three. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **204**, 285-311. https://doi.org/10.1007/s00205-011-0476-1

[17] Hu, X. and Wu, H. (2013) Global Solution to the Three-dimensional Compressible Flow of Liquid Crystals. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 2678-2699. https://doi.org/10.1137/120898814

[18] Huang, X., Li, J. and Xin, Z. (2011) Global Well-Posedness of Classical Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Three-Dimensional Isentropic Compressible Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**, 549-585. https://doi.org/10.1002/cpa.21382

[19] Li, J., Xu, Z.H. and Zhang, J.W. (2012) Global well-Posedness with Large Oscillations and Vacuum to the Three-Dimensional Equations of Compressible Nematic Liquid Crystal Flows.

[20] Jiang, F., Jiang, S. and Wang, D. (2014) Global Weak Solutions to the Equations of Compressible Flow of Nematic

Liquid Crystals in Two Dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **214**, 403-451. https://doi.org/10.1007/s00205-014-0768-3

[21] Jiang, F., Jiang, S. and Wang, D. (2013) On Multi-Dimensional Compressible Flows of Nematic Liquid Crystals with Large Initial Energy in a Bounded Domain. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 3369-3397. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.07.026

[22] Lin, J., Lai, B. and Wang, C. (2015) Global Finite Energy Weak Solutions to the Compressible Nematic Liquid Crystal Flow in Dimension Three. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47**, 2952-2983. https://doi.org/10.1137/15m1007665

[23] Lei, Z., Li, D. and Zhang, X. (2014) Remarks of Global Wellposedness of Liquid Crystal Flows and Heat Flows of Harmonic Maps in Two Dimensions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 3801-3810. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2014-12057-0

[24] Wu, Z. (2013) Pointwise Estimates of Solution to Compressible Nematic Liquid Crystal Flow in Odd Dimensions. *Scientia Sinica Mathematica*, **43**, 807-823. https://doi.org/10.1360/012013-122

[25] Li, J., Xu, Z. and Zhang, J. (2018) Global Existence of Classical Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Three-Dimensional Compressible Nematic Liquid Crystal Flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **20**, 2105-2145. https://doi.org/10.1007/s00021-018-0400-7

[26] Huang, J.R., Wang, W.J. and Wen, H.Y. (2020) On L^p Estimates for a Simplified Ericksen-Leslie System. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **19**, 1485-1507. https://doi.org/10.3934/cpaa.2020075

[27] Hieber, M. and Prüss, J. (2016) Dynamics of the Ericksen-Leslie Equations with General Leslie Stress I: The Incompressible Isotropic Case. *Mathematische Annalen*, **369**, 977-996. https://doi.org/10.1007/s00208-016-1453-7

[28] Wang, W. and Wen, H. (2020) Global Well-Posedness and Time-Decay Estimates for Compressible Navier-Stokes Equations with Reaction Diffusion. *Science China Mathematics*, **65**, 1199-1228. https://doi.org/10.1007/s11425-020-1779-7

[29] Gu, W., Fan, J. and Zhou, Y. (2016) Regularity Criteria for Some Simplified Non-Isothermal Models for Nematic Liquid Crystals. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 2839-2853. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.10.006

[30] Feireisl, E., Frémond, M., Rocca, E. and Schimperna, G. (2012) A New Approach to Non-Isothermal Models for Nematic Liquid Crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **205**, 651-672. https://doi.org/10.1007/s00205-012-0517-4

[31] Zhong, X. (2020) Strong Solutions to the Cauchy Problem of Two-Dimensional Compressible Non-Isothermal Nematic Liquid Crystal Flows with Vacuum and Zero Heat Conduction. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 011508. https://doi.org/10.1063/1.5109901

[32] Adams, R. (1985) Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

[33] Wang, Y. (2012) Decay of the Navier-Stokes-Poisson Equations. *Journal of Differential Equations*, **253**, 273-297. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.03.006

[34] Matsumura, A. and Nishida, T. (1983) Initial Boundary Value Problems for the Equations of Motion of Compressible Viscous and Heat-Conductive Fluids. *Communications in Mathematical Physics*, **89**, 445-464. https://doi.org/10.1007/bf01214738

[35] Kawashima, S. (1983) Systems of a Hyperbolic-Parabolic Composite Type, with Applications to the Equations of Magne-to-Hydrodynamics. PhD Thesis, Kyoto University, Kyoto.

附录

我们介绍关于高低频分解的一些相关知识。

在傅立叶变换的基础上，建立函数 $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 的频率分 $\left(f^l(x), f^m(x), f^h(x)\right)$，如下所示：

$$\begin{aligned} &f^l(x)=\chi_0(D_x)f(x),\\ &f^m(x)=\left(I-\chi_0(D_x)-\chi_1(D_x)\right)f(x),\\ &f^h(x)=\chi_1(D_x)f(x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

这里 $\chi_0(D_x)$， $\chi_1(D_x)$， $D_x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\nabla=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3}\right)$ 分别为带有特征 $\chi(\xi)$ 和 $1-\chi(\xi)$ 的伪微分算子。这里 $\chi(\xi)$ 为满足 $0\le\chi(\xi)\le1$ 的光滑截断函数，满足

$$0\le\chi_0(\xi),\chi_1(\xi)\le1\quad\left(\xi\in\mathbb{R}^3\right)$$

和

$$\chi_0(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|<\frac{r_0}{2},\\ 0, & |\xi|>r_0,\end{cases}\quad \chi_1(\xi)=\begin{cases}0, & |\xi|<R_0,\\ 1, & |\xi|>R_0+1,\end{cases}$$

对于固定常数 r_0 和 R_0 满足

$$0<r_0\le\min\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\nu}},\sqrt{\frac{\gamma_1(\gamma_1-d_0)^2}{2d_0}},\frac{1}{2}\right\}$$

和

$$R_0>\max\left\{2\sqrt{\frac{\mu_2+\lambda_1}{\mu_1}},2\sqrt{\frac{2(\gamma_1+\lambda_2)}{\gamma_0}},1\right\}.$$

易得

$$\begin{aligned} f(x)&=f^l(x)+f^m(x)+f^h(x)\\ &=:f^L(x)+f^h(x)\\ &=:f^l(x)+f^H(x), \end{aligned} \tag{5.2}$$

我们定义

$$f^L(x)=f^l(x)+f^m(x),\quad f^H(x)=f^m(x)+f^h(x). \tag{5.3}$$