

离散耦合复杂网络系统的稳定性分析

尉锐芳, 纪楠*

华北理工大学理学院, 河北 唐山

收稿日期: 2024年3月4日; 录用日期: 2024年4月8日; 发布日期: 2024年6月27日

摘要

以离散耦合复杂网络系统为研究对象, 当系统遭受突然变化时, 设计脉冲控制器, 在控制器中添加时滞项和饱和两个约束条件, 采用凸包分析法处理饱和项, 并基于Lyapunov稳定性理论进一步推导出此系统在脉冲控制下的指数稳定性判据。最后, 选择包含两个状态节点的系统进行数值仿真。对于原系统不稳定的情况, 施加脉冲控制, 而在原系统稳定的情况下, 施加脉冲扰动, 以验证所得稳定性判据的准确性与有效性。

关键词

复杂网络, 脉冲控制, 稳定性, 时滞

Stability Analysis of Discretely-Coupled Complex Networks Systems

Ruifang Yu, Nan Ji*

College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei

Received: Mar. 4th, 2024; accepted: Apr. 8th, 2024; published: Jun. 27th, 2024

Abstract

Taking discrete coupled complex network system as the research object, when the system is subjected to sudden changes, a pulse controller is designed, two constraints of delay term and saturation term are added to the controller, and the saturation term is processed by convex hull analysis method. Then, Lyapunov stability theory is employed to further derive the criterion for the stability of discrete-time coupled complex network systems under impulsive control. Finally, systems comprising two state nodes are selected for numerical simulation. For the case where the original

*通讯作者。

system is unstable, impulsive control is applied, and for the case where the original system is stable, impulsive disturbances are applied to validate the effectiveness of the stability results obtained.

Keywords

Complex Network, Impulsive Control, Stability, Time-Delay

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 各种领域的学者对复杂网络的研究表现出浓厚的兴趣, 包括社会学、生物学和物理学等。在我们日常生活中, 存在着很多复杂系统, 大多可抽象为复杂网络的形式, 如社交网络, 交通网络和金融网络等。这些网络通常由大量的节点和复杂的连接关系组成, 其中, 节点之间通过各种方式相互耦合, 这种耦合关系可能导致网络系统出现复杂的动力学行为, 如Internet网络发生数据堵塞[1]、交通网络故障[2]和谣言传播等。因此, 对于复杂网络的构成和动态特性有必要进行深度的分析与研究。由于网络系统的稳定性是保证其能够正常运行的前提, 因此动态特性中最重要的特性是它的稳定性。通过研究网络系统的稳定性, 可以揭示系统在外部分扰下的恢复能力以及信息传播的效率等重要特性。

然而, 依据熵增定律, 事物在没有施加任何形式限制的情况下总会走向无序的发展, 这是一个熵增的复杂过程。为了实现稳定性, 需要运用控制理论来设计控制器, 这样可以在该控制器的帮助下, 确保网络在遭受外部干扰时能够保持预期的同步稳定状态。为了应对这个问题, 多种有效的控制方法已经被提出了。比如, 牵引控制[3]、脉冲控制[4]、滑模控制[5]和间歇控制[6]等。合理使用这些控制方法的确可以提高系统的性能, 但这些方法有利有弊。

在实际控制系统的应用场景中, 多种不同因素经常会对系统的稳定性造成干扰和影响。例如外界环境、负载情况以及系统自身特性等。脉冲不仅是众多影响因素中的一个, 而且在我们的日常生活中也是一个普遍的现象。例如, 收音机或者发射器在受到强干扰后发生信号短暂接收异常, 交通网络突然瘫痪, 这些状态在短时间内发生变化的现象, 都可以通过脉冲来刻画。包含这些脉冲行为的系统被普遍称作脉冲系统, 常采用脉冲微分方程来构建脉冲系统的数学模型, 接着设计一个满足要求的脉冲控制器, 从而确保整个系统能够成功实现预设目的。脉冲控制还具有低成本、高效率、可靠性强的优点, 已被广泛应用于多个领域[7]。

在过去的几十年来, 对于具有状态约束的连续时间系统, 施加脉冲控制, 研究系统稳定性的成果很多。Liu 等人[8]利用脉冲微分方程稳定性理论和 Laplacian 矩阵特征, 研究一类具有输入饱和的 Lipschitz 非线性多智能体系统的指数一致性。Li 等人[9]基于时变动力网络系统, 提出了两种状态约束脉冲控制方案, 包括完全状态约束和部分状态约束, 以解决系统的指数稳定性问题。Xie 等人[10]在饱和脉冲输入的条件下, 用 Lyapunov 函数, 得到神经网络稳定性的充分条件。周金连等人[11]针对竞争网络, 采用脉冲控制, 推导多智能体系统一致性的充分条件。谢巧玲等人[12]针对时滞动力系统且具有逻辑选择的脉冲效应, 利用半张量积和脉冲微分不等式, 研究该系统的全局指数稳定性。

不过, 在特定的应用场景里, 解决一些较为复杂问题的需求常常需要依赖于离散脉冲控制系统。例

如, 在采样控制装置, 数值分析及有限元数学这类学术领域中, 研究者大多利用离散控制系统来推进与之相关的研究工作。连续系统所使用的研究方法往往不适应离散型的系统了, 针对离散脉冲控制系统进行深入研究以及分析变得尤为重要。而目前研究成果中将具有约束条件的脉冲控制器应用到离散系统以及复杂网络稳定分析问题的还比较少。而执行器饱和现象作为常见的一种非线性约束限制, 对系统产生的影响是不可忽略的。同时, 时滞对系统的影响也是不能忽略的。因此, 为了更好的研究实际控制系统的稳定性, 在脉冲控制器中引入时滞和执行器饱和, 研究离散系统的稳定控制问题, 具有重要的意义, 也更加符合实际应用的背景。

本文以离散耦合复杂网络系统为研究对象。首先, 采用 Kronecker (克罗内克) 积将复杂网络模型的状态方程的形式简化; 其次, 设计脉冲控制器, 在控制器中添加时滞项和饱和两个约束条件, 采用凸包分析法处理饱和函数项; 然后, 基于 Lyapunov 稳定性理论对该系统遭受突变时的稳定性进行了分析; 最后, 在仿真部分验证了理论结果的正确性。为离散耦合复杂网络系统全状态约束控制问题的稳定性求解提供了可行方法。

2. 模型描述和准备

在一个由 N 个同质节点构建的离散耦合复杂网络的情境下, 每一节点实际上构成了一个 n 维的动态系统,

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bq(x_i(k)) + p \sum_{j=1, j \neq i}^N d_{ij} \Gamma x_j(k) \quad (1)$$

式中: $x_i(k) = (x_{i1}(k), x_{i2}(k), \dots, x_{in}(k))^T$ 表示第 i 个节点在时刻 k 的状态, $i=1, 2, \dots, N$, $k \in \mathbf{N}$; A 表示连接矩阵; $q(\cdot)$ 是满足适当条件的非线性向量值函数, $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是权重矩阵; $\Gamma = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是两节点间的内耦合矩阵; p 是耦合强度; $D = \{d_{ij}\}$ 为耦合配置矩阵, 其中 d_{ij} 的定义为:

$$\begin{cases} d_{ij} = d_{ji} > 0, & \text{节点 } i, j \text{ 之间有连接 } (i \neq j) \\ d_{ij} = 0, & \text{节点 } i, j \text{ 之间无连接} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{且 } d_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N d_{ij}。$$

将式(1)转化为Kronecker积形式:

$$x(k+1) = (\mathbf{I}_N \otimes A)x(k) + (\mathbf{I}_N \otimes B)q(x(k)) + p(D \otimes \Gamma)x(k) \quad (3)$$

传统控制输入是任意的, 无约束的。事实上, 在实际工程系统中, 存在着人为或物理的约束。此外, 工业控制过程中, 常见的是具有不同程度的滞后性的系统, 具有延迟特性的控制系统的控制难度, 随着滞后程度的增加而增加。因此, 有必要考虑控制过程中的时间延迟。

为研究系统(3)的稳定性, 构造(3)的由时间序列 $\{k_m, I_k(x(\cdot))\}$ 给出的时滞脉冲控制律, 并满足 $0 < k_0 < k_1 < \dots < k_m < k_{m+1} < \dots$, 且 $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = +\infty$ 。 $I_k(\cdot)$ 表示在脉冲时刻 k_m , $m \in \mathbf{N}^+$ 处的控制输入。其工作原理如图1所示。时滞 $\tau(k) \in \mathbf{Z}^+$, 假设 $\tau(k) < k_m - k_{m-1}$ 。根据延时脉冲控制系统的原理图, 脉冲控制系统的状态满足下式:

$$\begin{cases} x(k+1) = (\mathbf{I}_N \otimes A)x(k) + (\mathbf{I}_N \otimes B)q(x(k)) + p(D \otimes \Gamma)x(k) \triangleq \Phi(\bar{x}(k)) \\ \Phi(\bar{x}(k)) = \begin{cases} x(k), & k \neq k_m - 1 \\ y(\cdot) + I_k(y(\cdot)), & k = k_m, m \in \mathbf{N}^+ \end{cases} \\ y(k) = g(x(k)) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\bar{x}(k)$ 表示 k 时刻的状态; $y(k)$ 是输出状态; $x(k_0)$ 为初始条件。

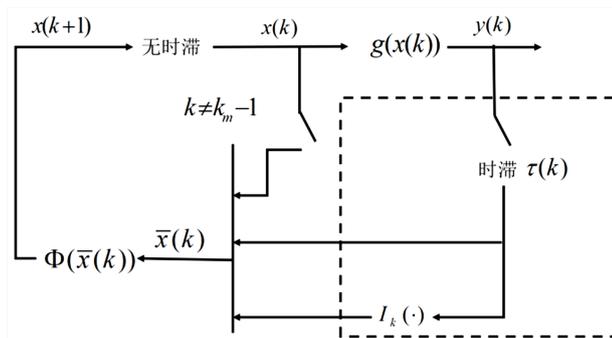


Figure 1. Delay pulse control figure

图 1. 时滞脉冲控制图

令 $g(x(k)) = x(k)$, 在系统中输入饱和时滞脉冲, 表达式如下:

$$U_i(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sat}(u_i(x)) \delta(k - k_m - \tau(k)) \quad (5)$$

式中: $\text{Sat}(\cdot)$ 为饱和函数; $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数; $\tau(m) \in \mathbf{Z}^+$ 是脉冲时滞; $i = 1, \dots, n$; 假定 $u_i(x) = S_i x_i(x)$, 定义 $S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_n)^T$ 。

对于控制输入, 在脉冲时刻 $k = k_m$ 时, 设计并选取反馈控制律为: $I_m(\cdot) = S_i(k - \tau(k)) x_i(k - \tau(k))$ 。因此在时刻 k_m 对应状态描述为: $\Delta x_i(k_m) = x_i(k_m) - x_i(k_m - \tau(k)) = U_i(k)$ 。

基于此, 得到具有时滞脉冲饱和的离散耦合复杂网络系统模型:

$$\begin{cases} x(k+1) = (I_N \otimes A)x(k) + (I_N \otimes B)q(x(k)) + p(D \otimes \Gamma)x(k), & k \neq k_m - 1 \\ x(k_m) = x(k_m - \tau(k)) + \text{Sat}[Sx(k_m - \tau(k))], & k = k_m \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (6)$$

假设 存在非负常数 $L_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 能够使得 $|q(x_i(k))| \leq L_i |x_i(k)|$, 且令 $L_q = \max\{L_1, L_2, \dots, L_N\}$ 。

定义1 [13] 如果存在常数 $\eta > 1$, $\gamma > 0$ 使得 $\|x(k)\| \leq \eta \|x_0\| e^{-\gamma k}$, $k \geq 0$, 则系统(1)的零解是指数稳定的。

引理1 [14] $M \in M_2$ 是一个 $(N-1) \times N$ 维矩阵, D 是一个 $N \times N$ 维矩阵, 存在一个 $N \times (N-1)$ 维矩阵 J 使得 $MD = D_1M$, 其中 $D_1 = MDJ$ 。此外, Γ 是 $n \times n$ 维常数矩阵, 当 $\tilde{D}_1 = D_1 \otimes \Gamma$, $M_1 = M \otimes I_n$ 时, $D_0 = D \otimes \Gamma$, $M_1 D_0 = \tilde{D}_1 M_1$ 成立。同理, $I_N \otimes B = B_0$, $I_{N-1} \otimes B_0 = B_1$, $I_N \otimes A = A_0$, $I_{N-1} \otimes A_0 = A_1$ 。

定义2 [14] 对于一组点 u^1, u^2, \dots, u^m , 这些点构成的凸包如下:

$$\text{co}\{u^i : i \in [1, m]\} := \left\{ \sum_{i=1}^m v_i u^i : \sum_{i=1}^m v_i = 1, v_i \geq 0 \right\} \quad (7)$$

引理2 [14] 设 $u, u^1, u^2, \dots, u^m \in \mathbf{R}^{m1}$, $v, v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbf{R}^{m2}$, 若 $u \in \text{co}\{u^i : i \in [1, m]\}$, $v \in \text{co}\{u^j : j \in [1, n]\}$, 则可得到:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} u^i \\ v^j \end{bmatrix} : i \in [1, m], j \in [1, n] \right\} \quad (8)$$

引理3 [14] 令 $u, v \in \mathbf{R}^m$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^\top$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^\top$, 对 $\forall i \in [1, m]$, 都有 $|v_i| \leq 1$, 则:

$$\text{Sat}(u) \in \text{co}\{D_i u + D_i^- v : i \in \{1, 2, \dots, 2^m\}\} \quad (9)$$

其中 $\text{Sat}(u)$ 为饱和函数, D 是一个集合, 包含了由 2^m 个 $m \times m$ 维对角元素为 1 或 0 的对角矩阵. 当 $m = 2$ 时,

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (10)$$

假设有两个反馈矩阵 $G, H \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 且 $\|Hx\|_\infty \leq 1$, 由引理3可得到

$$\text{Sat}(Gx) \in \text{co}\{D_i Gx + D_i^- Hx : i \in \{1, 2, \dots, 2^m\}\}, \text{ 即存在 } v_i \in [0, 1], \text{ 且 } \sum_{i=1}^{2^m} v_i = 1, \text{ 使}$$

$$\text{Sat}(Gx) = \sum_{i=1}^{2^m} v_i (D_i G + D_i^- H)x.$$

引理4 [15] 对 $\forall \varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^n$, 不等式 $2a^\top b \leq \varepsilon a^\top a + \varepsilon^{-1} b^\top b$ 成立.

引理5 [16] 离散时间非线性时不变系统状态方程为: $x(k+1) = f(x(k))$ 若存在一个相对于离散状态 $x(k)$ 的标量函数 $V(x(k))$, 使对任意 $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 满足:

1) $V(x(k))$ 正定;

2) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$, $\Delta V(x(k)) < 0$ 或 $\Delta V(x(k)) \leq 0$ 的情况下, 当 $x_0 \neq 0$ 时, 对任意 t_0 , 在 $t \geq t_0$ 时 $\Delta V(x(k))$ 不恒为零, 称系统在原点处渐进稳定; 若同时满足当 $\|x\| \rightarrow \infty$, $V(x(k)) \rightarrow \infty$ 时, 系统大范围渐进稳定;

3) $\Delta V(x(k)) > 0$, $V(x(k)) > 0$ 时, 则系统不稳定.

3. 稳定性判据

在这一节中, 将针对系统(6), 导出指数稳定准则. 结合引理1, 系统(6)可改写成如下形式:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 q(x(k)) + pD_0 x(k), & k \neq k_m - 1 \\ x(k_m) = x(k_m - \tau(k)) + \text{Sat}[Sx(k_m - \tau(k))], & k = k_m \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (11)$$

本节采用凸包分析法来处理饱和项, 基于此, 分别导出系统中脉冲效应为脉冲控制和脉冲扰动情况下的指数稳定准则.

令 $O(H) = \{v \in \mathbf{R}^n : |H_j v| \leq 1, j = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为常数矩阵, 根据引理3可知, 若

$x(k_0) \in O(H)$, 则存在常数 $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{2^n} w_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$, 使得:

$$\text{Sat}(Sx(k_m - \tau(k))) = \sum_{i=1}^{2^n} w_i (K_i S + K_i^- H)x(k_m - \tau(k)) \quad (12)$$

此时, 系统重新描述为:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 q(x(k)) + pD_0 x(k), & k \in (k_m, k_{m+1}) \\ x(k_m) = \sum_{i=1}^{2^n} w_i (I + K_i S + K_i^- H)x(k_m - \tau(k)), & k = k_m, m \in \mathbf{N}^+ \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (13)$$

3.1. 具有时滞的脉冲控制下稳定性判据

定理1 假定脉冲间隔 $\max\{k_m - k_{m-1}, m \in \mathbf{N}^+\} \leq \varepsilon$, 假设存在一个函数 $V(x(k))$ 及 $0 < \alpha < 1$, $\varepsilon \in \mathbf{Z}^+$, $\tau = \inf_{m \in \mathbf{N}^+} \{\tau(k)\}$ 令 $M_1 = M \otimes I_n$, $M_1 \in M_2$, 且给定 $n \times n$ 维矩阵 S 和 H , 使得以下条件成立:

$$1) \omega = (2+p) \left[\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2 + p \|\tilde{D}_1\|^2 \right] > 1;$$

$$2) \begin{pmatrix} -\alpha M_1^T M_1 & \sum_{i=1}^{2m} w_i (I + K_i S + K_i^- H)^T M_1^T M_1 \\ * & -M_1^T M_1 \end{pmatrix} \leq 0;$$

则在控制器饱和与时滞脉冲两个约束条件下, 离散耦合复杂网络系统(13)是指数稳定的且当 $\|Hx\|_\infty \leq 1$, 收敛速率为 $\frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon}}{2}$ 。

证明 考虑 Lyapunov 函数:

$$V(x(k)) = x^T(k) M_1^T M_1 x(k) \quad (14)$$

为方便起见, 令 $V(k) = V(x(k))$ 。

情况一: 当 $k \neq k_m - 1$ 时, $k \in [k_{m-1}, k_m - 1]$,

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(k+1) - V(k) \\ &= x^T(k+1) M_1^T M_1 x(k+1) - x^T(k) M_1^T M_1 x(k) \\ &= [A_0 x(k) + B_0 q(x(k)) + p D_0 x(k)]^T M_1^T M_1 \\ &\quad \cdot [A_0 x(k) + B_0 q(x(k)) + p D_0 x(k)] - x^T(k) M_1^T M_1 x(k) \end{aligned} \quad (15)$$

所以,

$$\begin{aligned} \Delta V &= x^T(k) A_0^T M_1^T M_1 A_0 x(k) + q^T(x(k)) B_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \\ &\quad + p^2 x^T(k) D_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) + 2x^T(k) A_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \\ &\quad + 2p x^T(k) A_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) + 2p x^T(k) D_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \\ &\quad - x^T(k) M_1^T M_1 x(k) \end{aligned} \quad (16)$$

由引理 4.1 知: $M_1 A_0 = A_1 M_1$, 故得下式:

$$\begin{aligned} x^T(k) A_0^T M_1^T M_1 A_0 x(k) &= x^T(k) M_1^T A_1^T A_1 M_1 x(k) \\ &\leq \|A_1\|^2 V(k) \end{aligned} \quad (17)$$

由引理 4.1 知: $M_1 D_0 = \tilde{D}_1 M_1$, 故得下式:

$$\begin{aligned} p^2 x^T(k) D_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) &= p^2 x^T(k) M_1^T \tilde{D}_1^T \tilde{D}_1 M_1 x(k) \\ &\leq p^2 \|\tilde{D}_1\|^2 V(k) \end{aligned} \quad (18)$$

由假设和引理 4.1 知: $M_1 B_0 = B_1 M_1$, 故得下式:

$$\begin{aligned} q^T(x(k)) B_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) &= q^T(x(k)) M_1^T B_1^T B_1 M_1 q(x(k)) \\ &\leq L_q^2 \|B_1\|^2 V(k) \end{aligned} \quad (19)$$

利用引理 4.2, 可得式(16)第四项:

$$\begin{aligned}
 & 2x^T(k)A_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \\
 &= 2[\mathbf{M}_1 A_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)) \\
 &\leq [\mathbf{M}_1 A_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 A_0 x(k) + (\mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)))^T \mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)) \\
 &= x^T(k)A_0^T M_1^T M_1 A_0 x(k) + q^T(x(k))B_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k))
 \end{aligned} \tag{20}$$

所以,

$$2x^T(k)A_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \leq [\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2]V(k) \tag{21}$$

同理, 式(16)第五项:

$$\begin{aligned}
 & 2px^T(k)A_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) \\
 &= 2p[\mathbf{M}_1 A_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 D_0 x(k) \\
 &\leq p[\mathbf{M}_1 A_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 A_0 x(k) + p(\mathbf{M}_1 D_0 x(k))^T \mathbf{M}_1 D_0 x(k) \\
 &= px^T(k)A_0^T M_1^T M_1 A_0 x(k) + px^T(k)D_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k)
 \end{aligned} \tag{22}$$

所以,

$$2px^T(k)A_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) \leq p[\|A_1\|^2 + \|\tilde{D}_1\|^2]V(k) \tag{23}$$

同理, 式(16)第六项:

$$\begin{aligned}
 & 2px^T(k)D_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \\
 &= 2p[\mathbf{M}_1 D_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)) \\
 &\leq p[\mathbf{M}_1 D_0 x(k)]^T \mathbf{M}_1 D_0 x(k) + p(\mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)))^T \mathbf{M}_1 B_0 q(x(k)) \\
 &= px^T(k)D_0^T M_1^T M_1 D_0 x(k) + pq^T(x(k))B_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k))
 \end{aligned} \tag{24}$$

所以,

$$2px^T(k)D_0^T M_1^T M_1 B_0 q(x(k)) \leq p[\|\tilde{D}_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2]V(k) \tag{25}$$

由式(17)~(25)可得:

$$\Delta V \leq \left\{ (2+p) \left[\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2 + p \|\tilde{D}_1\|^2 \right] - 1 \right\} V(k) \tag{26}$$

所以令 $\omega = (2+p) \left[\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2 + p \|\tilde{D}_1\|^2 \right]$, 故:

$$\Delta V \leq (\omega - 1)V(k) \tag{27}$$

故 $k \neq k_m - 1$ 时, 由定理条件 1)可知:

$$V(k+1) \leq \omega V(k) \tag{28}$$

情况二: 当脉冲时刻发生, 即 $k = k_m$, $m \in \mathbf{N}^+$ 时, 结合凸分析法, 由定理条件 2)可得:

$$\begin{aligned}
V(k_m) &= x^T(k_m) \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 x(k_m) \\
&= x^T(k_m - \tau(k)) \left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (\mathbf{I} + K_i \mathbf{S} + K_i^- \mathbf{H}) \right]^T \\
&\quad \cdot \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 \left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (\mathbf{I} + K_i \mathbf{S} + K_i^- \mathbf{H}) \right] x(k_m - \tau(k)) \\
&\leq \alpha x^T(k_m - \tau(k)) \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 x(k_m - \tau(k))
\end{aligned} \tag{29}$$

所以当 $k = k_m$ 时, $V(k_m) \leq \alpha V(k_m - \tau(k))$ 。

$$\text{综上, } \begin{cases} V(k+1) \leq \omega V(k), & k \neq k_m - 1 \\ V(k_m) \leq \alpha V(k_m - \tau(k)), & k = k_m \end{cases}$$

由数学归纳法可知当 $k \in [k_{m-1}, k_m)$, $m \in \mathbf{N}^+$ 时, 下式成立:

$$V(k) \leq \alpha^m \omega^{k-\tau(1)-\tau(2)-\dots-\tau(m)} V(0) \tag{30}$$

令 $\tau(k) < k_m - k_{m-1}$ 且 $\tau = \inf_{m \in \mathbf{N}^+} \{\tau(k)\}$, 则,

$$V(k) \leq \alpha^m \omega^{k-m\tau} V(0) \tag{31}$$

式(31)左右两边同时取对数得:

$$\begin{aligned}
\ln(V(k)) &\leq \ln(\alpha^m \omega^{k-m\tau} V(0)) \\
&= \ln \left[\alpha^m \omega^k \frac{1}{\omega} V(0) \right] \\
&= m \ln \alpha + k \ln \omega - m\tau \ln \omega + \ln V(0) \\
&= m(\ln \alpha - \tau \ln \omega) + k \ln \omega + \ln V(0)
\end{aligned} \tag{32}$$

注意到当 $k \in [k_m + 1, k_{m+1}]$ 时,

$$k < k_{m+1} = (k_{m+1} - k_m) + (k_m - k_{m-1}) + \dots + (k_2 - k_1) + (k_1 - k_0) \leq (m+1)\varepsilon \tag{33}$$

所以,

$$m \geq \frac{k}{\varepsilon} - 1 \tag{34}$$

又因 $\omega > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\ln \alpha - \tau \ln \omega < 0$, 继而,

$$m(\ln \alpha - \tau \ln \omega) \leq \left(\frac{k}{\varepsilon} - 1 \right) (\ln \alpha - \tau \ln \omega) \tag{35}$$

故对 $k \in [k_m + 1, k_{m+1}]$, $m \in \mathbf{N}^+$,

$$\begin{aligned}
\ln V(k) &\leq \left(\frac{k}{\varepsilon} - 1 \right) (\ln \alpha - \tau \ln \omega) + k \ln \omega + \ln V(0) \\
&= \frac{\ln \alpha + (\varepsilon - \tau) \ln \omega}{\varepsilon} k - \frac{\ln \alpha}{\tau \ln \omega} + \ln V(0)
\end{aligned} \tag{36}$$

所以:

$$V(k) \leq \frac{\omega^\tau}{\alpha} \exp \left[-k \left(-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon} \right) \right] V(0) \tag{37}$$

根据式(14)可知:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \|x(k)\|^2 \leq V(k) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \|x(k)\|^2 \quad (38)$$

故:

$$V(0) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \|x_0\|^2 \quad (39)$$

代入式(37)中得:

$$V(k) \leq \frac{\omega^\tau}{\alpha} \exp\left\{-k\left(-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon}\right)\right\} \lambda_{\max}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \|x_0\|^2 \quad (40)$$

所以:

$$\|x(k)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \omega^\tau}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \alpha}} \|x_0\| \exp\left[-k\left(\frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon}}{2}\right)\right] \quad (41)$$

故当 $\eta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \omega^\tau}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \alpha}}$, $\gamma = \frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon}}{2}$, 满足定义 1, 结论成立, 证毕。

由定理 1 知, 当原系统可能不稳定时, 加入脉冲控制可使不稳定的离散耦合复杂网络系统在满足一些条件下达到指数稳定。

3.2. 具有时滞的脉冲扰动下稳定性判据

定理 2 假定脉冲间隔 $\min\{k_m - k_{m-1}, m \in \mathbf{N}^+\} \geq \varphi$, 假设存在一个函数 $V(x(k))$ 及 $\alpha > 1$, $\varphi \in \mathbf{Z}^+$, $\tau = \inf_{m \in \mathbf{N}^+} \{\tau(k)\}$, 令 $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_n$, $\mathbf{M}_0 \in \mathbf{M}_2$, 且给定 $n \times n$ 维矩阵 \mathbf{S} 和 \mathbf{H} , 使得如下条件成立:

- 1) $\omega = (2+p) \left[\|\mathbf{A}_1\|^2 + L_q^2 \|\mathbf{B}_1\|^2 + p \|\tilde{\mathbf{D}}_1\|^2 \right] \in (0, 1)$;
- 2) $\begin{pmatrix} -\alpha \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 & \sum_{i=1}^{2^m} w_i (\mathbf{I} + K_i \mathbf{S} + K_i \mathbf{H})^T \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 \\ * & -\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \leq 0$;

则在控制器饱和与时滞脉冲两个约束条件下, 离散耦合复杂网络系统(13)是指数稳定的, 当

$$\|Hx\|_\infty \leq 1, \text{ 收敛速率为 } \frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varepsilon}}{2} \varphi.$$

证明 设 Lyapunov 函数为:

$$V(x(k)) = x^T(k) \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 x(k) \quad (42)$$

为方便起见, 令 $V(x(k)) = V(k)$ 。

情况一: 当 $k \neq k_m - 1$ 时, $k \in [k_{m-1}, k_m - 1]$ 时, 由定理 1 知 $\Delta V \leq (\omega - 1)V(k)$ 仍成立, 其中

$$\omega = (2+p) \left[\|\mathbf{A}_1\|^2 + L_q^2 \|\mathbf{B}_1\|^2 + p \|\tilde{\mathbf{D}}_1\|^2 \right].$$

情况二: 当 $k = k_m$, $m \in \mathbf{N}^+$ 时, 由定理 1 知 $V(k_m) \leq \alpha V(k_m - \tau(m))$ 仍成立,

综上,
$$\begin{cases} V(k+1) \leq \omega V(k), & k \neq k_m - 1 \\ V(k_m) \leq \alpha V(k_m - \tau(k)), & k = k_m \end{cases}.$$

由**定理 1**知, 不等式 $\ln(V(k)) \leq m(\ln \alpha - \tau \ln \omega) + k \ln \omega + \ln V(0)$ 依然成立,

注意到当 $k \in [k_m + 1, k_{m+1}]$ 时,

$$k \geq k_m = (k_m - k_{m-1}) + (k_{m-1} - k_{m-2}) + \cdots + (k_2 - k_1) + (k_1 - k_0) \geq m\varphi \quad (43)$$

所以:

$$m \leq \frac{k}{\varphi} \quad (44)$$

又因为 $0 < \omega < 1$, $\alpha > 1$, $\ln \alpha - \tau \ln \omega > 0$, 继而,

$$m(\ln \alpha - \tau \ln \omega) \leq \frac{k}{\varphi}(\ln \alpha - \tau \ln \omega) \quad (45)$$

故对 $k \in [k_m + 1, k_{m+1}]$, $m \in \mathbf{N}^+$ 时,

$$\begin{aligned} \ln(V(k)) &\leq m(\ln \alpha - \tau \ln \omega) + k \ln \omega + \ln V(0) \\ &\leq \frac{k}{\varphi}(\ln \alpha - \tau \ln \omega) + k \ln \omega + \ln V(0) \end{aligned} \quad (46)$$

所以:

$$V(k) \leq \exp \left[-k \left(-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varphi} \right) \right] V(0) \quad (47)$$

根据式(42)可知:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0) \|x(k)\|^2 \leq V(k) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0) \|x(k)\|^2 \quad (48)$$

故:

$$V(0) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0) \|x_0\|^2 \quad (49)$$

代入式(47)中得:

$$V(k) \leq \exp \left[-k \left(-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varphi} \right) \right] \lambda_{\max}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0) \|x_0\|^2 \quad (50)$$

所以:

$$\|x(k)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0)}} \|x_0\| \exp \left[-k \left(\frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varphi}}{2} \right) \right] \quad (51)$$

故当 $\eta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0)}}$, $\gamma = \frac{-\ln \omega + \frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\varphi}}{2}$ 时, 满足**定义 1**, 证毕。

由**定理 2**知, 当原系统可能稳定时, 加入脉冲控制可能会破坏系统稳定性, 需离散耦合复杂网络系统满足一定条件时仍然达到指数稳定。

4. 数值仿真

在本节中, 利用两个由两个节点组成离散复杂网络实例来证明先前得出的结论是准确且有效的, 其中每个节点都构成一个一维的动态系统。

4.1. 针对原系统不稳定的情况举例分析

考虑由两个节点组成的系统。

$$x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 q(x(k)) + p D_0 x(k) \quad (52)$$

$$\text{式中: } X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.3 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, D_0 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

假设非线性向量值函数为: $q(x(k)) = \tanh(x(k))$, $k=1, 2, \dots, N$, 显然, $q(x(k))$ 满足假设且 $L_q = 1$ 。

给定 $p=0.5$, $\Gamma=1$, $M_1=(1, -1)$, $J=(1, 0)^T$, 因此, 可以计算出 $\|A_1\|^2 = 1.224$, $\|\tilde{D}_1\|^2 = 0.291$,

$$\|B_1\|^2 = 0.25, \text{ 继而可得: } \omega = (2+p) \left[\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2 + p \|\tilde{D}_1\|^2 \right] = 3.53 > 1.$$

接着设计脉冲控制器函数为: $U(k) = \text{Sat}(Sx(k)\delta(k-k_m))$ 。选取:

$$S = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix};$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.2, \omega_3 = 0.3, \omega_4 = 0.4;$$

$$\text{因此: } \left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (I + K_i S + K_i^- H) \right]^T \left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (I + K_i S + K_i^- H) \right] \leq 0.7084I \text{ 满足 } (0 < \alpha < 1).$$

因为 $\frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\ln \omega} = 1.28$, 所以当 $\max\{k_m - k_{m-1}, m \in \mathbf{N}^+\} \leq 1.28$ 时, 系统是指数稳定的。

在图2中依次表示了系统(52)的状态向量 $x(k)$ 没有受到控制, 脉冲间隔 $k_m - k_{m-1} = 1$ 时和 $k_m - k_{m-1} = 3$ 时的演化轨迹图。可以发现, 未加控制时, 原系统本身不稳定, 当 $k_m - k_{m-1} = 1 < 1.28$ 满足定理1的条件2)时, 系统在脉冲控制下稳定; 而在 $k_m - k_{m-1} = 3 > 1.28$ 时, 系统在控制下不稳定。

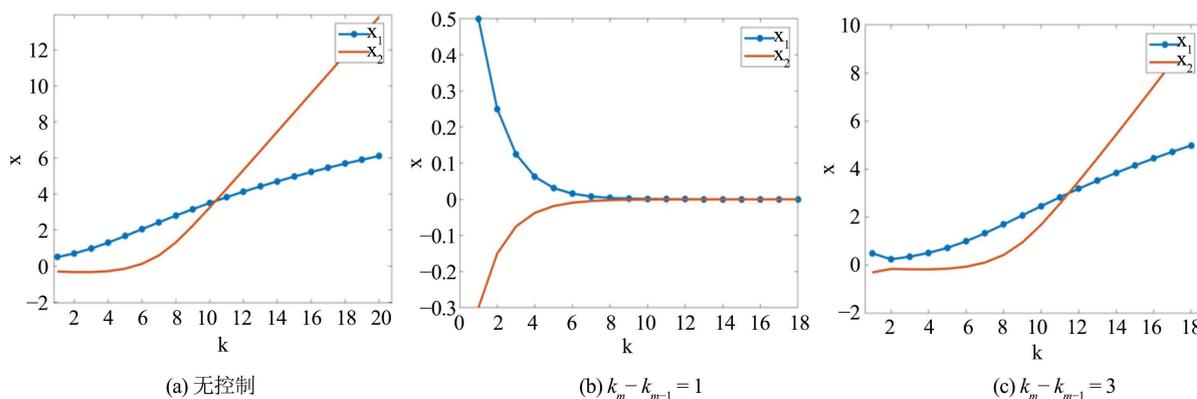


Figure 2. Evolution trajectory figure of the system under different controls

图2. 系统在不同控制下的演化轨迹图

4.2. 针对原系统稳定的情况举例分析

考虑由两个节点组成的系统。

$$x(k+1) = A_0x(k) + B_0q(x(k)) + pD_0x(k) \tag{53}$$

式中: $X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.3 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$, $D_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.7 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$ 。

假设非线性向量值函数为: $q(x(k)) = 0.5 \tanh(x(k))$, $k = 1, 2, \dots, N$, 显然, $q(x(k))$ 满足假设且 $L_q = 0.5$ 。

给定 $p = 0.05$, $\Gamma = 1$, $M_0 = (1, -1)$, $J = (1, 0)^T$, 因此, 可以计算出 $\|A_1\|^2 = 0.25$, $\|\tilde{D}_1\|^2 = 0.85$, $\|B_1\|^2 = 0.16$, 继而可得: $\omega = (2 + p) \left[\|A_1\|^2 + L_q^2 \|B_1\|^2 + p \|\tilde{D}_1\|^2 \right] = 0.76 < 1$ 。

接着设计脉冲控制器函数为: $U(k) = Sat(Sx(k)\delta(k - k_m))$ 。选取:

$$S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix};$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega_1 = 0.4, \omega_2 = 0.3, \omega_3 = 0.2, \omega_4 = 0.1;$$

因此: $\left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (I + K_i S + K_i^- H) \right]^T \left[\sum_{i=1}^{2^m} w_i (I + K_i S + K_i^- H) \right] \leq 1.1449I$ 满足 $(\alpha > 1)$ 。

因为 $\frac{\tau \ln \omega - \ln \alpha}{\ln \omega} = 1.62$, 所以当 $\min\{k_m - k_{m-1}, m \in \mathbf{N}^+\} \geq 1.62$ 时, 系统是指数稳定的。

在图 3 中依次表示了系统(53)的状态向量 $x(k)$ 没有受到控制, 脉冲间隔 $k_m - k_{m-1} = 1$ 时和 $k_m - k_{m-1} = 3$ 时的演化轨迹图。可以发现, 未加控制时, 原系统本身稳定, 当 $k_m - k_{m-1} = 3 > 1.62$ 满足定理 2 的条件 2) 时, 系统在脉冲扰动下稳定; 而在 $k_m - k_{m-1} = 1 < 1.62$ 时, 系统在控制下不稳定。

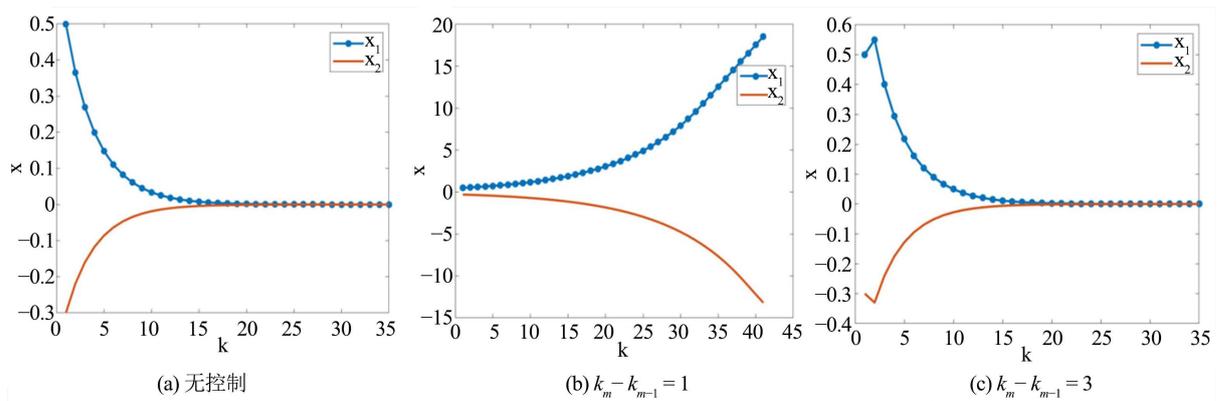


Figure 3. Evolution trajectory diagram of the system under different controls

图 3. 系统在不同控制下的演化轨迹图

5. 结语

基于 Lyapunov 稳定性理论设计脉冲控制器, 在控制器中添加时滞项和饱和两个约束条件, 采用凸包

分析法处理脉冲饱和控制器中的饱和项, 得到了此系统在状态突变时的指数稳定性判据。最后, 通过数值模拟实验, 验证了具有时滞饱和脉冲输入的离散复杂网络, 当施加脉冲控制或扰动效应时, 在满足定理条件下, 系统满足指数型的稳定性判据。不久的将来, 将考虑把饱和时滞脉冲控制引入到不同的系统中, 对系统同步性等进行分析。

基金项目

唐山市科学技术研究与发展计划(第七批)项目(19130222g)。

参考文献

- [1] 刘鹏辉, 琚贇, 高维星, 等. 基于强化学习的网络拥塞控制优化算法[J]. 电力科学与工程, 2023, 39(4): 20-27.
- [2] 王立夫, 朱枫, 郭戈, 等. 基于负载系数的轨道交通网络控制站点辨识[J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2319-2328.
- [3] Xu, C., Yang, X., Lu, J., Feng, J., Alsaadi, F.E. and Hayat, T. (2018) Finite-Time Synchronization of Networks via Quantized Intermittent Pinning Control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **48**, 3021-3027. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2017.2749248>
- [4] Kumar, R., Kumar, U., Das, S., Qiu, J. and Lu, J. (2021) Effects of Heterogeneous Impulses on Synchronization of Complex-Valued Neural Networks with Mixed Time-Varying Delays. *Information Sciences*, **551**, 228-244. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.10.064>
- [5] Chen, X., Huang, T., Cao, J., Park, J.H. and Qiu, J. (2019) Finite-Time Multi-Switching Sliding Mode Synchronisation for Multiple Uncertain Complex Chaotic Systems with Network Transmission Mode. *IET Control Theory & Applications*, **13**, 1246-1257. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5661>
- [6] Wu, Y., Zhu, J. and Li, W. (2020) Intermittent Discrete Observation Control for Synchronization of Stochastic Neural Networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 2414-2424. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2019.2930579>
- [7] Zhang, X. and Li, C. (2020) Finite-Time Stability of Nonlinear Systems with State-Dependent Delayed Impulses. *Nonlinear Dynamics*, **102**, 197-210. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05953-4>
- [8] Liu, X., Chen, D. and Wang, Y. (2019) Distributed Impulsive Consensus of Nonlinear Multi-Agent Systems with Input Saturation. *International Journal of Modern Physics C*, **30**, Article 1940001. <https://doi.org/10.1142/s0129183119400011>
- [9] Li, L., Li, C. and Li, H. (2018) An Analysis and Design for Time-Varying Structures Dynamical Networks via State Constraint Impulsive Control. *International Journal of Control*, **92**, 2820-2828. <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1459861>
- [10] Xie, R. and Li, C. (2019) Stability Analysis on Cohen-Grossberg Neural Networks with Saturated Impulse Inputs. *Neural Processing Letters*, **51**, 1265-1283. <https://doi.org/10.1007/s11063-019-10146-1>
- [11] 周金连, 刘琛, 刘东南. 基于脉冲控制的线性多智能体系统的二部一致性[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2021, 39(3): 164-167.
- [12] 谢巧玲, 刘志鑫, 杨志春. 基于逻辑选择脉冲时滞动力系统的稳定性分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2023, 40(4): 63-68.
- [13] Zhang, Y. (2017) Global Exponential Stability of Delay Difference Equations with Delayed Impulses. *Mathematics and Computers in Simulation*, **132**, 183-194. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2016.08.003>
- [14] Hu, T. and Lin, Z. (2001) Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design. Birkhauser, 55-67.
- [15] Lu, J., Ho, D.W.C. and Cao, J. (2010) A Unified Synchronization Criterion for Impulsive Dynamical Networks. *Automatica*, **46**, 1215-1221. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.04.005>
- [16] 刘豹, 谭万生. 现代控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.