Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(6), 326-330
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146252

Hans汉斯

KP方程新解与τ函数的联系

王辛乙

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年4月7日；录用日期：2024年5月9日；发布日期：2024年6月28日

摘　要

τ函数在非线性方程的双线性化中发挥重要作用。本文从Sylvester方程出发，结合色散关系用柯西矩阵法先推出KP方程，并求出KP方程的解，其中KP方程的解是矩阵乘积形式。接着建立KP方程的解与τ函数之间的联系，从而建立柯西矩阵法求解与双线性法求解之间的联系。

关键词

KP方程，柯西矩阵法，τ函数

The Connection between the New Solution of the KP Equation and the τ Function

Xinyi Wang

School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 7th, 2024; accepted: May 9th, 2024; published: Jun. 28th, 2024

Abstract

τ functions play an important role in bilinearization of nonlinear equations. Starting from the Sylvester equation and combining dispersion relationships, this article first derives the KP equation using the Cauchy matrix method, and obtains the solution of the KP equation. The solution of the KP equation is in matrix product form. Then, the relationship between the solution of the KP equation and the function is established, thereby establishing the relationship between Cauchy matrix method and bilinear method solution.

Keywords

KP Equation, Cauchy Matrix Method, τ Function

文章引用: 王辛乙. KP 方程新解与 τ 函数的联系[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 326-330. DOI: 10.12677/pm.2024.146252

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

KP 方程作为可积系统中典型的(2 + 1)维模型，很好地描述了长波在二维空间中的传播，由此求解 KP 方程的解也是一个重要的研究对象。到目前为止，已经建立了许多构造 KP 方程解的方法，如无限维伽罗瓦－李变换群理论[1]、直接线性化方法[2] [3]和广义柯西矩阵方法[4] [5] [6]。本文的目的是在用 Sylvester 方程推导 KP 方程并求得解的基础上，建立解与 τ 函数的联系，从而更好的理解 KP 方程。

2. KP 和 KdV 方程的推导及解

在大多数情况下，柯西矩阵方法开始于一个包含未知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 Sylvester 方程。本文需要的 Sylvester 方程如下：

$$\boldsymbol{LX}-\boldsymbol{XK}=\boldsymbol{cr}, \tag{2.1}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{L}\in\mathbb{C}_{N\times N}$，$\boldsymbol{K}\in\mathbb{C}_{N'\times N'}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}_{N\times N'}$，列向量 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}_{N\times 1}$，行向量 $\boldsymbol{r}\in\mathbb{C}_{1\times N'}$。其中 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是 (x,y,t) 的函数，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{K}$ 是非平凡矩阵，其色散关系为：

$$\boldsymbol{c}_x=\boldsymbol{Lc},\ \boldsymbol{r}_x=-\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}, \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{c}_y=-\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{c},\ r_y=\left(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\right)^2\boldsymbol{r}, \tag{2.2b}$$

$$\boldsymbol{c}_t=4\boldsymbol{L}^3\boldsymbol{c},\ r_t=4\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\right)^3\boldsymbol{r}. \tag{2.2c}$$

椭圆 KP 系统与一组由 $S^{(i,j)}$ 表示的标量密切相关，其中 $i,j\in\mathbb{Z}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}_{N'\times N}$ 并且使 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}$ 可逆，这些量从 Sylvester 方中产生的，定义为

$$S^{(i,j)}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{K}^j\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^i\boldsymbol{c}. \tag{2.3}$$

当 $(i,j)=(0,0)$ 时

$$u=S^{(0,0)}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{c}. \tag{2.4}$$

对(2.1)左右两边对 x 求偏导得

$$\boldsymbol{LX}_x-\boldsymbol{X}_x\boldsymbol{K}=\boldsymbol{c}_x\boldsymbol{r}+\boldsymbol{cr}_x, \tag{2.5}$$

代入(2.2a)有：

$$\boldsymbol{LX}_x-\boldsymbol{X}_x\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Lcr}-\boldsymbol{crK}, \tag{2.6}$$

因此：

$$\boldsymbol{X}_x=\boldsymbol{cr}. \tag{2.7a}$$

相似的过程我们能够得到：

$$\boldsymbol{X}_y=-\boldsymbol{crK}-\boldsymbol{Lcr}, \tag{2.7b}$$

$$\boldsymbol{X}_t=4\left(\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{cr}+\boldsymbol{LcrK}+\boldsymbol{crK}^2\right), \tag{2.7c}$$

此时我们就得到了关于 $\boldsymbol{X}$ 的一组关系式。

接着引入辅助向量：

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}\,, \tag{2.8}$$

可以改写为：

$$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)\boldsymbol{u}^{(i)}=\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}\,, \tag{2.9}$$

两边分别对 x,y,t 求偏导可得：

$$\boldsymbol{X}_{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^{(i)}+\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)\boldsymbol{u}_{x}^{(i)}=\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}_{x}\,, \tag{2.10a}$$

$$\boldsymbol{X}_{y}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^{(i)}+\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)\boldsymbol{u}_{y}^{(i)}=\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}_{y}\,, \tag{2.10b}$$

$$\boldsymbol{X}_{t}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^{(i)}+\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)\boldsymbol{u}_{t}^{(i)}=\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}_{t}\,. \tag{2.10c}$$

从表达式中，我们可以发现其有相似性，因此我们这里只选取以(2.10a)为例来求相关的 $S^{(i,j)}$ 方程。对(2.10a)移项得：

$$\boldsymbol{u}_{x}^{(i)}=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{r}-\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{2.11}$$

左乘 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{K}^{j}\boldsymbol{C}$，并且两边同时加上 $\boldsymbol{r}_{x}\boldsymbol{K}^{j}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^{(i)}$：

$$S_{x}^{(i,j)}=S^{(i+1,j)}-S^{(i,j+1)}-S^{(i,0)}S^{(0,j)}\,. \tag{2.12a}$$

同理可得：

$$S_{y}^{(i,j)}=-S^{(i+2,j)}+S^{(i,j+2)}+S^{(i,0)}S^{(0,j)}+S^{(i,0)}S^{(1,j)}\,, \tag{2.12b}$$

$$S_{t}^{(i,j)}=4\left(S^{(i+3,j)}-S^{(i,j+3)}-S^{(i,0)}S^{(2,j)}-S^{(i,1)}S^{(1,j)}-S^{(i,2)}S^{(0,j)}\right). \tag{2.12c}$$

当 $i=j=0$ 时，我们得到 KP 方程：

$$u_{t}-u_{xxx}-6u_{x}^{2}-3\partial^{-1}u_{yy}=0\,, \tag{2.13}$$

令 $w=2u_{x}$ 得到：

$$w_{t}-w_{xxx}-6ww_{x}-3\partial^{-1}w_{yy}=0\,, \tag{2.14}$$

显然可见此时它的解为：

$$w=2\left(\boldsymbol{r}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{c}\right)_{x}\,. \tag{2.15}$$

当 $w_{yy}=0$ 时，KP 方程约化为我们熟悉的 KdV 的方程

$$w_{t}-w_{xxx}-6ww_{x}=0\,, \tag{2.16}$$

该解为：

$$w=2\left(c\left(I+M\right)^{-1}r\right)_{x}\,. \tag{2.17}$$

3. 解与 τ 函数的联系

定理： $Tr\left(\boldsymbol{A}_{x}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\dfrac{\left|\boldsymbol{A}\right|_{x}}{\boldsymbol{A}}$，其中 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}_{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对数导数[7] [8]。

命题： 对于满足本文给定的 Sylvester 方程里的 $\left\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{X},\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}\right\}$ 及标量函数 $S^{(i,j)}$，通过色散关系(2.2)有：

$$S^{(i,j)}=\frac{g}{\tau}, \tag{3.1}$$

其中

$$g=-\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{rK}^{j}\\ \boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\end{vmatrix}.$$

证明：当$(i,j)=(0,0)$时，得到：

$$S^{(0,0)}=\boldsymbol{rC}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{c}, \tag{3.2}$$

利用迹的计算得：

$$S^{(0,0)}=Tr\left(\boldsymbol{rC}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{c}\right)=Tr\left(\boldsymbol{rcC}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\right), \tag{3.3}$$

由色散关系(2.2a)可得

$$\boldsymbol{crC}=\boldsymbol{X}_{x}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)_{x}, \tag{3.4}$$

所以有：

$$S^{(0,0)}=Tr\left(\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)_{x}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\right), \tag{3.5}$$

由上述定理知：

$$S^{(0,0)}=\frac{\left|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right|_{x}}{\left|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right|}, \tag{3.6}$$

即对于任意的$i,j\in\mathbb{Z}$的$S^{(i,j)}$，可以得到：

$$S^{(i,j)}=\boldsymbol{rK}^{j}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{c}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{rK}^{j}\\ \boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{MC}\right|}, \tag{3.7}$$

当$g=-\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{rK}^{j}\\ \boldsymbol{L}^{i}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\end{vmatrix}$时，可以得到：

$$S^{(i,j)}=\frac{g}{\tau}, \tag{3.8}$$

特别的$S^{(0,0)}=\frac{\tau_{x}}{\tau}$。

通过上述定理，KP 方程的解可以表示为：

$$w=2\left(\boldsymbol{rC}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{XC}\right)^{-1}\boldsymbol{c}\right)_{x}=2S_{x}^{(0,0)}, \tag{3.9}$$

即

$$w=\left(\frac{\tau_{x}}{\tau}\right)_{x}. \tag{3.10}$$

4. 结论

本文写作背景是在之前所了解的 Sato 理论中[9]，可积方程的解由 τ 函数来建立联系，其具体表现为 Hirota 的级数展开形式，或者是 Wronskian 行列式的形式[10] [11]。本文首先从 Sylvester 方程出发，通过色散关系构造出标量关系$S^{(i,j)}$，通过未知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的相关表达式从而推导出 KP 方程并且得到其用$S^{(i,j)}$表示的解，最后本文又建立了该解与 τ 函数之间的联系，与可积系统中的有理表示相对应。

参考文献

[1] Aktosun, T. and Mee, C.V.D. (2006) Explicit Solutions to the Korteweg-de Vries Equation on the Half Line. *Inverse Problems*, **22**, 2165-2174. https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/6/015

[2] Fokas, A.S. and Ablowitz, M.J. (1981) Linearization of the Korteweg-de Vries and Painlevé II Equations. *Physical Review Letters*, **47**, 1096-1100. https://doi.org/10.1103/physrevlett.47.1096

[3] Nijhoff, F.W., Quispel, G.R.W. and Capel, H.W. (1983) Direct Linearization of Nonlinear Difference-Difference Equations. *Physics Letters A*, **97**, 125-128. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90192-5

[4] Sun, Y., Zhang, D. and Nijhoff, F.W. (2017) The Sylvester Equation and the Elliptic Korteweg-de Vries System. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, Article 033504. https://doi.org/10.1063/1.4977477

[5] Zhang, D.-J. and Zhao, S.-L. (2013) Solutions to ABS Lattice Equations via Generalized Cauchy Matrix Approach. *Studies in Applied Mathematics*, **131**, 72-103. https://doi.org/10.1111/sapm.12007

[6] Xu, D., Zhang, D. and Zhao, S. (2021) The Sylvester Equation and Integrable Equations: I. the Korteweg-de Vries System and Sine-Gordon Equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **21**, 382-406. https://doi.org/10.1080/14029251.2014.936759

[7] Coddington, E.A. and Levinson, N. (1955) Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill.

[8] Marchenko, V.A. (1988) Nonlinear Equations and Operator Algebras. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **28**, 227. https://doi.org/10.1016/0167-2789(87)90152-7

[9] Sylvester, J. (1884) Sur l'equation en matrices px = xq. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **99**, 67-71, 115-116.

[10] Fu, W. and Nijhoff, F.W. (2022) On a Coupled Kadomtsev-Petviashvili System Associated with an Elliptic Curve. *Studies in Applied Mathematics*, **149**, 1086-1122. https://doi.org/10.1111/sapm.12529

[11] Li, X. and Zhang, D. (2022) Elliptic Soliton Solutions: τ Functions, Vertex Operators and Bilinear Identities. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article No. 70. https://doi.org/10.1007/s00332-022-09835-4