Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(6), 387-398
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146258

Hans汉斯

一类含多重调和数的无穷级数的算法

陈　昕

浙江理工大学理学院，浙江　杭州

收稿日期：2023年12月31日；录用日期：2024年6月12日；发布日期：2024年6月30日

摘　要

本文利用部分分式展开及和式变换的方法，为一类含多重调和数的无穷级数建立了递推关系，并证明了此类无穷级数可以用四级的着色多重zeta值表示，并给出了相应的算法及一些特例。

关键词

多重调和数，多重zeta值，着色多重zeta值，无穷级数

An Algorithm for a Class of Infinite Series Involving Multiple Harmonic Numbers

Xin Chen

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Dec. 31st, 2023; accepted: Jun. 12th, 2024; published: Jun. 30th, 2024

Abstract

In this paper, we use the methods of partial fraction decomposition and transformation of summations to establish a recurrence for a class of infinite series involving multiple harmonic numbers, and prove that such infinite series are expressible in terms of colored multiple zeta values of level four. The corresponding algorithm and some special cases are presented.

Keywords

Multiple Harmonic Numbers, Multiple Zeta Values, Colored Multiple Zeta Values, Infinite Series

文章引用: 陈昕. 一类含多重调和数的无穷级数的算法[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 387-398.
DOI: 10.12677/pm.2024.146258

1. 引言

调和数及其各种形式的推广，如超调和数等，在组合数学、数论中有重要应用，经常出现在算法分析和特殊函数的展开式中。这些组合序列也与多重 zeta 值、多重调和数等密切相关。因此含有这些组合序列的组合恒等式与组合和式得到了广泛的关注，建立了很多含这些组合序列的无穷级数恒等式。

调和数 $H_n^{(r)}$ 的定义为

$$H_0^{(r)}=0,\quad H_n^{(r)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r},\quad n\geq 1.$$

多重调和数、多重 zeta 值及其变式与 Apéry 型级数等含调和数、二项式系数的无穷级数的研究密切相关。令 $\mathbb{N}$ 是正整数集合，$\boldsymbol{k}:=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{N}^r$，定义多重调和数为

$$\zeta_n(\boldsymbol{k}):=\sum_{n\geq n_1>n_2>\cdots>n_r\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}},$$

若 $n<r$，定义 $\zeta_n(\boldsymbol{k}):=0$，此外定义 $\zeta_n(\varnothing):=1$。

当 $k_1\geq 2$，将多重调和数取极限 $n\to\infty$，就可以得到 Hoffman 著作[1] [2]中的多重 zeta 值：

$$\zeta(\boldsymbol{k}):=\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}},$$

其中，称 $|k|:=k_1+\cdots+k_r$ 为 $\zeta(\boldsymbol{k})$ 的权。

多重 zeta 值的研究可以追溯到 Euler，他的一个结果表明，若权 $w=a+b$ 是奇数，则二重 zeta 值 $\zeta(a,b)$ 可以表示为 $\zeta(w)$ 和 $\zeta(k)\zeta(w-k)$ 的乘积的有理线性组合，其中 $2\leq k\leq w-2$。特别地，$\zeta(3)=\zeta(2,1)$。

上世纪 90 年代，著名数学家 Zagier [3]与 Hoffman [2] [4]分别独立引入了多重 zeta 值的定义，并进行了一系列研究。他们的工作奠定了多重 zeta 值的基础。

多重 zeta 值有很多推广。一般地，令 $\boldsymbol{k}:=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{N}^r$，$\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_r)$，其中 $z_1,\cdots,z_r$ 是 N 次单位根，则 N 级着色多重 zeta 值定义为

$$\zeta(\boldsymbol{k};\boldsymbol{z}):=\sum_{n_1>\cdots>n_r>0}\frac{z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}},$$

当 $(k_1,z_1)\neq(1,1)$ 时上式收敛。有的时候也可记 $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})=\zeta(\boldsymbol{k};\boldsymbol{z})$。二级着色多重 zeta 值也称为交替多重 zeta 值。目前，用 Au 的程序包[5]可以得到 $N\leq 6$，$|\boldsymbol{k}|\leq 16$ 的 N 级着色多重 zeta 值的确切值。

多重 zeta 值与一些含调和数、二项式系数的无穷级数密切相关。例如，王伟平与徐策[6]证明了所有的含调和数的(交错) Euler 和可以用(交错)多重 zeta 值表示，并给出了相应的表达式。他们又进一步在[7]中利用交错多重 zeta 值建立了一些含调和数与中心二项式系数的 Apéry 型级数的表达式。最近，徐策与赵建强[8]又利用 Fourier-Legendre 级数展开及迭代积分证明了一些含多重 t 调和数的 Apéry 型级数可以用着色多重 zeta 值表示。

除调和数外，含有二项式系数、Stirling 数、Bell 多项式、Chebyshev 多项式等组合序列的组合恒等式与组合和式也得到了广泛的关注，读者可以参考[9] [10]。

受上述工作的启发，本文将研究一类含多重调和数的级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的算法，得到许多含组合序列的

无穷级数恒等式。

设序列 $\boldsymbol{k}:=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{N}^r$，$\boldsymbol{k}_i=(k_i,\cdots,k_r)\in\mathbb{N}^{r-i+1}$，定义级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 如下：

$$Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}):=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{(2n+\beta)^\alpha},$$

其中 $\varepsilon=\pm1$，α,β 是整数且 $\alpha\geq1$，$\beta\geq0$。当 $(\alpha,\varepsilon)\neq(1,1)$ 时，上述级数收敛。注意记号 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 中的幂 α 表示含 β 的因子的个数，不实际计算。若某个 $\alpha=1$，则 α 可省略不写。例如，$Z_\varepsilon(3^2;\boldsymbol{k})$ 与 $Z_\varepsilon(9;\boldsymbol{k})$ 分别代表

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{(2n+3)^2}\quad与\quad\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{2n+9}.$$

这里借鉴了整数分拆[11]的经典记法：正整数 n 的分成 i_1 个 $n_1,\cdots,i_k$ 个 n_k 的分拆可以记成 $n_1^{i_1}\cdots n_k^{i_k}$。

在第 2 节，建立级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的递推公式，利用该递推公式，将级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的计算转化级数 $Z_\varepsilon(1^\alpha;\boldsymbol{k})$ 及 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 的计算。在第 3 节，又进一步给出级数 $Z_\varepsilon(1^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的表达式及级数 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 的递推公式。由这两节的结论，可以发现级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 都可以表示为级别为 2 或 4 的着色多重 zeta 值的有理线性组合。最后，在第 4 节，给出几个具体例子。

2. 级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的定义及递推公式

定理 1 对于整数 $\alpha\geq1$ 且 $(\alpha;\varepsilon)\neq(1,1)$，$\beta>2$ 及 $|k|_i^j:=k_i+\cdots+k_j$，$Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 满足递推关系

$$\varepsilon Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})=Z_\varepsilon\left((\beta-2)^\alpha;\boldsymbol{k}\right)+\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\left(A_j+B_j+C_j\right),\tag{1}$$

其中

$$A_j=\sum_{p=2}^{|k|_1^j}\frac{2^p(-2)^{|k|_1^j-p}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-p}}\binom{\alpha+|k|_1^j-p-1}{\alpha-1}Z_\varepsilon\left(0^p;\boldsymbol{k}_{j+1}\right),$$

$$B_j=\sum_{q=2}^{\alpha}\frac{(-2)^{|k|_1^j}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-q}}\binom{\alpha+|k|_1^j-q-1}{|k|_1^j-1}Z_\varepsilon\left((\beta-2)^q;\boldsymbol{k}_{j+1}\right),$$

$$C_j=\frac{-(-2)^{|k|_1^j}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-2}}\binom{\alpha+|k|_1^j-2}{\alpha-1}Z_\varepsilon\left(0,\beta-2;\boldsymbol{k}_{j+1}\right),\text{且 }Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k}):=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{2n(2n+\beta)}.$$

证明 根据多重调和数的定义，直接得到如下递推关系：

$$\zeta_n(\boldsymbol{k})=\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{n^{k_1}}\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k}_2).\tag{2}$$

在此基础上，通过重复迭代(2)式可得

$$\begin{aligned}\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k})&=\zeta_n(\boldsymbol{k})-\frac{1}{n^{k_1}}\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k}_2)=\zeta_n(\boldsymbol{k})-\frac{1}{n^{k_1}}\left(\zeta_n(\boldsymbol{k}_2)-\frac{1}{n^{k_2}}\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k}_3)\right)\\&=\zeta_n(\boldsymbol{k})-\frac{1}{n^{k_1}}\zeta_n(\boldsymbol{k}_2)+\frac{1}{n^{k_1+k_2}}\left(\zeta_n(\boldsymbol{k}_3)-\frac{1}{n^{k_3}}\zeta_{n-1}(\boldsymbol{k}_4)\right)=\cdots\\&=\zeta_n(\boldsymbol{k})+\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{n^{|k|_1^j}}\zeta_n(\boldsymbol{k}_{j+1}),\end{aligned}$$

将 n 用 $n+1$ 替换，即得多重调和数的另外一个递推关系：

$$\zeta_n(\boldsymbol{k})=\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{(n+1)^{|k|_1^j}}\zeta_{n+1}(\boldsymbol{k}_{j+1})+\zeta_{n+1}(\boldsymbol{k}), \tag{3}$$

其中 $\zeta_n(\boldsymbol{k}_{r+1})=\zeta_n(k_{r+1},\cdots,k_r):=1$。

应用递推关系(3)，并进行变量替换 $n\to n-1$，得到

$$\begin{aligned}Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})&=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{(2n+\beta)^\alpha}=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_{n+1}(\boldsymbol{k}_{j+1})}{(2n+\beta)^\alpha(n+1)^{|k|_1^j}}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_{n+1}(\boldsymbol{k})}{(2n+\beta)^\alpha}\\&=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k}_{j+1})}{(2n+\beta-2)^\alpha n^{|k|_1^j}}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{(2n+\beta-2)^\alpha}-\frac{(-1)^{r-1}}{\beta^\alpha}-\frac{(-1)^r}{\beta^\alpha},\end{aligned} \tag{4}$$

接下来进行部分分式展开

$$\frac{1}{(2n+\beta-2)^\alpha n^{|k|_1^j}}=\sum_{p=1}^{|k|_1^j}\frac{A(p)}{n^p}+\sum_{q=1}^{\alpha}\frac{B(q)}{(2n+\beta-2)^q},$$

其中 $A(p),B(q)$ 为系数。通过对等式两边同时乘以 $(2n+\beta-2)^\alpha$ 并取极限 $n\to(2-\beta)/2$，可求得 $B(\alpha)$；接着原式代入 $B(\alpha)$ 的值，对等式两边同时乘以 $(2n+\beta-2)^{\alpha-1}$ 并取极限 $n\to(2-\beta)/2$，可求得 $B(\alpha-1)$；以此类推可求得 $B(q),q=\alpha,\cdots,1$ 的值。同理得到 $A(p),\ p=|k|_1^j,\cdots,1$。

利用部分分式展开可得

$$\frac{1}{(2n+\beta-2)^\alpha n^{|k|_1^j}}=\sum_{p=2}^{|k|_1^j}\frac{a(p)}{n^p}+\sum_{q=2}^{\alpha}\frac{b(q)}{(2n+\beta-2)^q}+\frac{c}{n(2n+\beta-2)},$$

其中

$$a(p)=\frac{(-2)^{|k|_1^j-p}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-p}}\binom{\alpha+|k|_1^j-p-1}{\alpha-1},\quad b(q)=\frac{(-2)^{|k|_1^j}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-q}}\binom{\alpha+|k|_1^j-q-1}{|k|_1^j-1},$$

$$c=\frac{(-2)^{|k|_1^j-1}}{(\beta-2)^{\alpha+|k|_1^j-2}}\binom{\alpha+|k|_1^j-2}{\alpha-1}.$$

将此式代回(4)式中，定理可得证。 □

由定理 1 可知，当 $\beta>2$ 时，级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 可以表示为形如 $Z_\varepsilon(0^\alpha;\boldsymbol{k})$，$Z_\varepsilon(1^\alpha;\boldsymbol{k})$，$Z_\varepsilon(2^\alpha;\boldsymbol{k})$ 及 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 的级数的有理线性组合。根据多重调和数的定义，容易得到

$$\begin{aligned}Z_\varepsilon(0^\alpha;\boldsymbol{k})&=\frac{1}{2^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{n^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}\sum_{n\geq n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\varepsilon^n}{n^\alpha n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\\&=\frac{1}{2^\alpha}\sum_{n>n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\varepsilon^n}{n^\alpha n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}+\frac{1}{2^\alpha}\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\varepsilon^{n_1}}{n_1^{\alpha+k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\\&=\frac{1}{2^\alpha}\left(\zeta(\alpha,\boldsymbol{k};\varepsilon,\{1\}_r)+\zeta(\alpha+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon,\{1\}_{r-1})\right),\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon\left(2^\alpha;\boldsymbol{k}\right) &= \frac{1}{2^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(n+1\right)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{n\geq n_1>\cdots>n_r\geq 1}\frac{\varepsilon^n}{\left(n+1\right)^\alpha n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^\alpha}\sum_{n+1>n_1>\cdots>n_r\geq 1}\frac{\varepsilon^{n+1}}{\left(n+1\right)^\alpha n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} = \frac{\varepsilon}{2^\alpha}\zeta\left(\alpha,\boldsymbol{k};\varepsilon,\{1\}_r\right),
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中 $\{1\}_r$ 是指仅由 1 构成的有序序列, 1 重复 r 次。特别地，当 $\boldsymbol{k}=\varnothing$ 时，

$$
Z_\varepsilon\left(0^\alpha;\varnothing\right) = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\zeta\left(\alpha;\varepsilon\right),\quad Z_\varepsilon\left(2^\alpha;\varnothing\right) = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{\left(n+1\right)^\alpha} = \frac{\varepsilon}{2^\alpha}\zeta\left(\alpha;\varepsilon\right) - \frac{1}{2^\alpha}.
$$

因此为了计算级数 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$，只需再计算级数 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 和 $Z_\varepsilon\left(0,\beta;\boldsymbol{k}\right)$ 即可。

3. 级数 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;k\right)$ 及 $Z_\varepsilon\left(0,\beta;k\right)$ 的表达式

类似于 $\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{k}_i$ 的记法，定义 $\boldsymbol{\sigma}=\left(\sigma_1,\cdots,\sigma_r\right)$， $\boldsymbol{\sigma}_i=\left(\sigma_i,\cdots,\sigma_r\right)$，则有如下定理成立。

定理 2 对于正整数 α 且 $\left(\alpha;\varepsilon\right)\neq\left(1,1\right)$，级数 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 可表示成四级着色多重 zeta 值的线性组合：

$$
Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(2n+1\right)^\alpha} = 2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\zeta\left(\alpha,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right).
$$

特别地，当 $\boldsymbol{k}=\varnothing$ 时，

$$
Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\varnothing\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{\left(2n+1\right)^\alpha} = -1+\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\{\pm1\}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma\zeta\left(\alpha;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma\right).
$$

证明 在计算之前，先建立级数 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 的一个变换公式。根据王伟平与徐策[8]的公式(5.11)，将交替多重调和数 $\zeta_n\left(k_1,k_2,\cdots,k_r;\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\right)$ 简记为 $\zeta_n\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)$，则

$$
\zeta_n\left(k_1,\cdots,k_r\right) = 2^{k_1+\cdots+k_r-r}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=1,2,\cdots,r}}\zeta_{2n}\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right),
$$

得到

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(2n+\beta\right)^\alpha} = 2^{|k|_1^r-r}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=1,2,\cdots,r}}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_{2n}\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)}{\left(2n+\beta\right)^\alpha} \\
&= 2^{|k|_1^r-r}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=1,2,\cdots,r}}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{\zeta_n\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)}{\left(n+\beta\right)^\alpha}\frac{1+\left(-1\right)^n}{2} \\
&= 2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)}{\left(n+\beta\right)^\alpha}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n \\
&= 2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq 1}\frac{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n}{\left(n+\beta\right)^\alpha}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

这样，对于 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 有

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(2n+1\right)^\alpha}=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n}{\left(n+1\right)^\alpha}\\
&=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\sum_{n=n_1+1}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n}{n^\alpha}\\
&=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\zeta\left(\alpha,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right),
\end{aligned}\tag{8}
$$

即为所求。当 $\boldsymbol{k}=\varnothing$ 时，用类似的变换可知 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\varnothing\right)$ 也可用四级着色多重 zeta 值的线性组合表示：

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\varnothing\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{\left(2n+1\right)^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\left(n+1\right)^\alpha}\frac{1+\left(-1\right)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\sigma_0\in\{\pm1\}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n}{\left(n+1\right)^\alpha}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\sigma_0\in\{\pm1\}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^n}{n^\alpha}=-1+\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\{\pm1\}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma\zeta\left(\alpha;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma\right),
\end{aligned}
$$

完成证明。□

接下来，定义多重级数

$$
S^{(j)}\left(l;r\right):=\sum_{n_j>\cdots>n_r\geq1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_j\right)^{n_j}\sigma_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{\left(n_j+l\right)n_j^{k_j}n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}},\tag{9}
$$

其中 j，r 为正整数且 $j\leq r$，$l\geq0$ 为整数。当 $l=0$ 时，根据多重 zeta 值的定义计算可得

$$
S^{(j)}\left(0;r\right)=\zeta\left(1+k_j,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right).\tag{10}
$$

则关于级数 $Z_\varepsilon\left(0,\beta;\boldsymbol{k}\right)$，其中 $\beta>0$，有如下定理成立。

定理 3 对于正整数 β，级数 $Z_\varepsilon\left(0,\beta;\boldsymbol{k}\right)$ 可表示成四级着色多重 zeta 值及多重级数 $S^{(1)}\left(l;r\right)$ 的线性组合：

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon\left(0,\beta;\boldsymbol{k}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\zeta_n\left(\boldsymbol{k}\right)}{2n\left(2n+\beta\right)}\\
&=\frac{2^{|k|_1^r-r-1}}{\beta}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\left(\begin{array}{c}\sum_{l=0}^{\beta-1}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{l-\beta}S^{(1)}\left(l;r\right)\\ +\left(1-\varepsilon^{-\frac{\beta}{2}}\sigma_0^\beta\right)\left(\zeta\left(1,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right)+\zeta\left(1+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2\right)\right)\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

证明 类似于(7)式，可得如下变换公式：

$$Z_{\varepsilon}\left(0,\beta;\boldsymbol{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}\frac{\zeta_{n}\left(\boldsymbol{k}\right)}{2n\left(2n+\beta\right)}=2^{|k|_1^r-r}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=1,2,\cdots,r}}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}\frac{\zeta_{2n}\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)}{2n\left(2n+\beta\right)}$$

$$=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_{n}\left(\sigma_1k_1,\sigma_2k_2,\cdots,\sigma_rk_r\right)}{n\left(n+\beta\right)}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}$$

$$=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,2,\cdots,r}}\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq1}\frac{\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n\left(n+\beta\right)}.$$

对于最内层和式，又可进一步变换为

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n\left(n+\beta\right)}&=\frac{1}{\beta}\left(\sum_{n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n}-\sum_{n\geq n_1+\beta}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n-\beta}}{n}\right)\\&=\frac{1}{\beta}\left(\sum_{n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n}-\varepsilon^{-\frac{\beta}{2}}\sigma_0^{\beta}\left(\sum_{n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n}-\sum_{n_1+\beta-1\geq n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n}\right)\right)\\&=\frac{1}{\beta}\left(\left(1-\varepsilon^{-\frac{\beta}{2}}\sigma_0^{\beta}\right)\sum_{n\geq n_1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n}}{n}+\sum_{l=0}^{\beta-1}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{l-\beta}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\right)^{n_1}}{n_1+l}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

利用着色多重 zeta 值及多重级数 $S^{(j)}(l;r)$ 的定义即得最终结果。 □

现在只需要利用下面的定理计算出多重级数 $S^{(1)}(l;r)$，代入定理 3 中，即可得到级数 $Z_{\varepsilon}\left(\beta^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)$ 的值。

定理 4 多重级数 $S^{(j)}(l;r)$ 满足如下关于 j，l 的递推关系：

$$\begin{aligned}(-l)^{k_j}S^{(j)}(l;r)+S^{(j+1)}(l;r)=&-\sum_{p=1}^{k_j}(-l)^{p-1}\zeta\left(p,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right)\\&+\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{-l}\zeta\left(1,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right)\\&-\sum_{q=1}^{l-1}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{q-l}S^{(j+1)}(q;r),\end{aligned}\tag{12}$$

特别地， $j=r$ 时有

$$\begin{aligned}(-l)^{k_r}S^{(r)}(l;r)=&-\sum_{p=1}^{k_r}(-l)^{p-1}\zeta\left(p;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_r\right)+\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_r\right)^{-l}\zeta\left(1;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_r\right)\\&-\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_r\right)^{-l}\zeta_l\left(1;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_r\right),\end{aligned}\tag{13}$$

其中对于每一个确定的 l，和式的最后一项为有限和。

证明 多重级数 $S^{(j)}(l;r)$ 的被加项中的乘积可以进行部分分式展开

$$\frac{1}{(n_j+l)n_j^{k_j}}=\sum_{p=1}^{k_j}\frac{a(p)}{n_j^p}+\frac{b}{n_j+l},$$

其中 $a(p)=-(-l)^{p-1-k_j}$， $b=(-l)^{-k_j}$ 。代回和式后将和式拆分成两项。易得拆分后的第一项为

$$\sum_{n_j>\cdots>n_r\ge1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{n_j}\sigma_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_j^p n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}}=\zeta\left(p,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right).$$

对于拆分后的第二项，先进行变量替换 $n_j\to n_j-l$，再使用与式(11)类似的变换，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_j>\cdots>n_r\ge1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{n_j}\sigma_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{(n_j+l)n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}}\\
&=\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{-l}\sum_{n_j-l>\cdots>n_r\ge1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{n_j}\sigma_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_j n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}}\\
&=\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{-l}\left(\begin{aligned}&\sum_{n_j>\cdots>n_r\ge1}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{n_j}\sigma_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{n_j n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}}\\
&-\sum_{q=1}^{l}\sum_{n_{j+1}>\cdots>n_r\ge1}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{q}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_{j+1}\right)^{n_{j+1}}\cdots\sigma_r^{n_r}}{(n_{j+1}+t)n_{j+1}^{k_{j+1}}\cdots n_r^{k_r}}\end{aligned}\right)\\
&=\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{-l}\zeta\left(1,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right)-\sum_{q=1}^{l}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\cdots\sigma_j\right)^{q-l}S^{(j+1)}(q;r).
\end{aligned}$$

最后将拆分的两项相加并整理，即可得到(12)式。(13)式的证明思路与(12)式一致。 □

由该定理可知，当 $l=1$ 时，(12)式即为 $S^{(j)}(1;r)$ 与 $S^{(j+1)}(1;r)$ 的关系式，结合(13)式可递推得到 $S^{(j)}(1;r)$ 的表达式；当 $l=2$ 时，(12)式即为 $S^{(j)}(2;r)$ 与 $S^{(j+1)}(2;r)$ 的关系式，结合 $S^{(j+1)}(1;r)$ 的表达式与(13)式可递推得到 $S^{(j)}(2;r)$ 的表达式；以此类推。

如此，所有的多重和 $S^{(j)}(l;r)$ 都可以用四级着色多重 zeta 值表示，这样再结合定理 3 就可以将所有级数 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 用四级着色多重 zeta 值表示。

4. 级数 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 的算法及例子

利用定理 2-4，所有的级数 $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$， $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 都可以计算，再通过定理 1 的递推关系，就可以计算所有形如 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 的级数。为清晰起见，下面给出无穷级数 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 的算法：

第一步 若 $\beta>2$，利用定理 1 中的递推关系，将 $Z_\varepsilon\left(\beta^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$ 用形如 $Z_\varepsilon\left(0^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$， $Z_\varepsilon\left(1^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$， $Z_\varepsilon\left(2^\alpha;\boldsymbol{k}\right)$

及 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 的级数表示。若 $\beta\le 2$，直接转到第二步。

第二步 利用(5)式及(6)式将 $Z_\varepsilon(0^\alpha;\boldsymbol{k})$ 及 $Z_\varepsilon(2^\alpha;\boldsymbol{k})$ 表示成交错多重 zeta 值；利用定理 2 将 $Z_\varepsilon(1^\alpha;\boldsymbol{k})$ 表示成四级着色多重 zeta 值；利用定理 3 及定理 4 将 $Z_\varepsilon(0,\beta;\boldsymbol{k})$ 表示成四级着色多重 zeta 值。

第三步 利用已知着色多重 zeta 值程序包计算出所求无穷级数 $Z_\varepsilon(\beta^\alpha;\boldsymbol{k})$ 的值。

应用上述求解级数的算法，可以得到一些有趣的级数做例。

例 1 $Z_\varepsilon(0,1;\boldsymbol{k})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\dfrac{\zeta_n(\boldsymbol{k})}{2n(2n+1)}$

此例形式较为简单，不需要借助算法计算。根据定理 3 可得

$$Z_\varepsilon(0,1;\boldsymbol{k})=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\left(\begin{array}{c}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0S^{(j)}(0;r)\\ +\left(1-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\right)\left(\zeta\left(1,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right)+\zeta\left(1+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2\right)\right)\end{array}\right),$$

其中对 $\sigma_0=\pm1$ 求和时，第一个和式

$$\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0S^{(j)}(0;r)=\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\zeta\left(1+k_j,\boldsymbol{k}_{j+1};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_j,\boldsymbol{\sigma}_{j+1}\right)=0,$$

所以得到

$$Z_\varepsilon(0,1;\boldsymbol{k})=2^{|k|_1^r-r-1}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\left(1-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0\right)\left(\zeta\left(1,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right)+\zeta\left(1+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2\right)\right).$$

特别地，当 $\boldsymbol{k}=\varnothing$ 时，$Z_\varepsilon(0,1;\varnothing)=\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{\varepsilon^n}{2n(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\sigma\in\{\pm1\}}\left(1-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma\right)\zeta\left(1;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma\right)+1$。

若取 $\boldsymbol{k}=(k)$，因为 $\zeta_n(k)=H_n^{(k)}$ 为通常的调和数。当 $\boldsymbol{k}$ 分别为 $(1),(2),(3)$，$\varepsilon=1$ 时，

$$Z_1(0,1;1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2n(2n+1)}=\ln^2(2),$$

$$Z_1(0,1;2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{2n(2n+1)}=-\frac{1}{6}\pi^2\ln(2)+\frac{5}{4}\zeta(3),$$

$$Z_1(0,1;3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{2n(2n+1)}=-\frac{3}{40}\pi^4-\frac{1}{3}\pi^2\ln^2(2)+\frac{1}{3}\ln^4(2)+8\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+6\ln(2)\zeta(3).$$

当 $\boldsymbol{k}$ 分别为 $(1),(2),(3)$，$\varepsilon=-1$ 时，

$$Z_{-1}(0,1;1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n}{2n(2n+1)}=-G-\frac{1}{24}\pi^2+\frac{1}{2}\pi\ln(2)+\frac{1}{4}\ln^2(2),$$

$$Z_{-1}(0,1;2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^{(2)}}{2n(2n+1)}=\frac{11}{96}\pi^3-4\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)+\frac{1}{8}\pi\ln^2(2)-2G\ln(2)+\frac{1}{24}\pi^2\ln(2)-\frac{1}{2}\zeta(3),$$

$$Z_{-1}(0,1;3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^{(3)}}{2n(2n+1)}=-\frac{1}{6}G\pi^2-\frac{19}{2880}\pi^4-4L(4,2,4)+\frac{3}{2}\pi\zeta(3)+\frac{3}{8}\ln(2)\zeta(3).$$

例 2 $Z_{\varepsilon}\left(3^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}\frac{\zeta_{n}\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(2n+3\right)^{\alpha}}$

第一步：利用定理 1 得到

$$\varepsilon Z_{\varepsilon}\left(3^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)=Z_{\varepsilon}\left(1^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\begin{pmatrix}\sum_{p=2}^{|k|_1^j}2^{p}(-2)^{|k|_1^j-p}\binom{\alpha+|k|_1^j-p-1}{\alpha-1}Z_{\varepsilon}\left(0^{p};\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\\ +\sum_{q=2}^{\alpha}(-2)^{|k|_1^j}\binom{\alpha+|k|_1^j-q-1}{|k|_1^j-1}Z_{\varepsilon}\left(1^{q};\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\\ -(-2)^{|k|_1^j}\binom{\alpha+|k|_1^j-2}{\alpha-1}Z_{\varepsilon}\left(0,1;\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\end{pmatrix}.$$

第二步：代入(5)式，定理 2 及例 1 的结论，即可得到 $Z_{\varepsilon}\left(3^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)$ 的表达式。第三步：若取 $\alpha=2$，$\boldsymbol{k}$ 分别为 $(1),(2),(3)$，当 $\varepsilon=1$ 时，可得到

$$Z_{1}\left(3^{2};1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n}}{\left(2n+3\right)^{2}}=-4+\frac{1}{4}\pi^{2}-\frac{1}{4}\pi^{2}\ln(2)+2\ln(2)+\frac{7}{4}\zeta(3),$$

$$Z_{1}\left(3^{2};2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n}^{(2)}}{\left(2n+3\right)^{2}}=12-\frac{2}{3}\pi^{2}-\frac{121}{1440}\pi^{4}-8\ln(2)-\frac{1}{3}\pi^{2}\ln^{2}(2)+\frac{1}{3}\ln^{4}(2)+8\mathrm{Li}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)+7\ln(2)\zeta(3),$$

$$Z_{1}\left(3^{2};3\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n}^{(3)}}{\left(2n+3\right)^{2}}=-32+\frac{5}{3}\pi^{2}+24\ln(2)-\zeta(3)-\frac{4}{3}\pi^{2}\zeta(3)+\frac{31}{2}\zeta(5).$$

当 $\varepsilon=-1$ 时，可得到

$$Z_{-1}\left(3^{2};1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{H_{n}}{\left(2n+3\right)^{2}}=4+\frac{1}{64}\pi^{3}-2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Li}_{3}\left(\frac{1+i}{2}\right)-2G+G\ln(2)-\ln(2)-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{16}\pi\ln^{2}(2),$$

$$Z_{-1}\left(3^{2};2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{H_{n}^{(2)}}{\left(2n+3\right)^{2}}=-12-\frac{1}{12}\pi^{2}+4G+\frac{1}{12}G\pi^{2}+6L(4,2,4)+4\ln(2)+2\pi-\frac{7}{4}\pi\zeta(3),$$

$$\begin{aligned}Z_{-1}\left(3^{2};3\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{H_{n}^{(3)}}{\left(2n+3\right)^{2}}\\&=32-8G-6\pi+\frac{1}{3}\pi^{2}-\frac{13}{512}\pi^{5}-9\,\mathrm{Im}\,\zeta(4,1;i,1)+5\,\mathrm{Im}\,\zeta(4,1;i,-1)\\&\quad+10L(4,2,4)\ln(2)-12\ln(2)-\frac{3}{4}\zeta(3)+\frac{3}{4}G\zeta(3).\end{aligned}$$

例 3 $Z_{\varepsilon}\left(4^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}\frac{\zeta_{n}\left(\boldsymbol{k}\right)}{\left(2n+4\right)^{\alpha}}$

第一步：利用定理 1 得到

$$\varepsilon Z_{\varepsilon}\left(4^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)=Z_{\varepsilon}\left(2^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\begin{pmatrix}\sum_{p=2}^{|k|_1^j}\frac{(-1)^{|k|_1^j-p}}{2^{\alpha-p}}\binom{\alpha+|k|_1^j-p-1}{\alpha-1}Z_{\varepsilon}\left(0^{p};\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\\ +\sum_{q=2}^{\alpha}\frac{(-1)^{|k|_1^j}}{2^{\alpha-q}}\binom{\alpha+|k|_1^j-q-1}{|k|_1^j-1}Z_{\varepsilon}\left(2^{q};\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\\ +\frac{(-1)^{|k|_1^j-1}}{2^{\alpha-2}}\binom{\alpha+|k|_1^j-2}{\alpha-1}Z_{\varepsilon}\left(0,2;\boldsymbol{k}_{j+1}\right)\end{pmatrix}. \tag{14}$$

第二步：利用定理 3 及定理 4，并代入(10)式得到

$$
\begin{aligned}
Z_{\varepsilon}(0,2;\boldsymbol{k}) &= 2^{|k|_1^r-r-2}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\left(\begin{array}{c}\varepsilon S^{1}(0;r)+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0 S^{(1)}(1;r)\\ +(1-\varepsilon)\left(\zeta\left(1,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right)+\zeta\left(1+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2\right)\right)\end{array}\right)\\
&= 2^{|k|_1^r-r-2}\sum_{\substack{\sigma_j\in\{\pm1\}\\ j=0,1,\cdots,r}}\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\sigma_0 S^{(1)}(1;r)+(1-\varepsilon)\zeta\left(1,\boldsymbol{k};\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}\right)+\zeta\left(1+k_1,\boldsymbol{k}_2;\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma_0\sigma_1,\boldsymbol{\sigma}_2\right)\right),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

接着，利用定理 4 计算 $S^{(1)}(1;r)$。最后，把(5)式，(6)式及(15)式代入(14)式，即可得到 $Z_{\varepsilon}\left(4^{\alpha};\boldsymbol{k}\right)$ 的表达式。

第三步：若取 $\alpha=2$，$\boldsymbol{k}=(1)$，$\varepsilon=1$时，可得到

$$Z_1\left(4^2;1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+4)^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\pi^2+\frac{1}{4}\zeta(3),$$

当 $\varepsilon=-1$ 时，可得到

$$Z_{-1}\left(4^2;1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n}{(2n+4)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\pi^2-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{32}\zeta(3).$$

5. 总结

本文利用部分分式展开及和式变换的方法，研究了一类含多重调和数的无穷级数。这类无穷级数为含调和数、二项式系数的无穷级数的研究奠定基础。丰富了组合数学的相关理论，在一定程度上丰富了 Apéry 型级数与多重 zeta 值理论的研究。除了本章提供的算法外，这类含多重调和数的无穷级数还有其他计算方法，如累次积分法、超几何方法等，部分级数也可用 Mathematica 等软件直接计算出来。但是据我所知，在以前的文献中并没有给出相应含参数级数的一般显式表达式。

本文的创新与主要工作就在于为这类含多重调和数的无穷级数建立了递推关系，并证明了此类无穷级数可以用四级的着色多重 zeta 值表示，最后给出了相应的算法，得到了含参级数的显式表达式。

致　谢

本文是在导师王伟平教授的精心指导下完成的，在此表示感谢！

基金项目

国家自然科学基金项目(11671360)；浙江省自然科学基金探索项目(LY22A010018)。

参考文献

[1] Hoffman, M.E. (2019) An Odd Variant of Multiple Zeta Values. *Communications in Number Theory and Physics*, **13**, 529-567. https://doi.org/10.4310/cntp.2019.v13.n3.a2

[2] Hoffman, M. (1992) Multiple Harmonic Series. *Pacific Journal of Mathematics*, **152**, 275-290. https://doi.org/10.2140/pjm.1992.152.275

[3] Zagier, D. (1992) Values of Zeta Functions and Their Applications. In: Joseph, A., *et al*., Eds., *First European Congress of Mathematics*, Birkhäuser, Paris, 497-512.

[4] Hoffman, M.E. (1997) The Algebra of Multiple Harmonic Series. *Journal of Algebra*, **194**, 477-495. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7127

[5] Au, K.C. (2020) Evaluation of One-Dimensional Polylogarithmic Integral, with Applications to Infinite Series.

[6] Feng, L. and Wang, W. (2015) An Algorithm for Computing Mixed Sums of Products of Bernoulli Polynomials and Euler Polynomials. *Journal of Symbolic Computation*, **66**, 84-97. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2014.01.008

[7] Wang, W. and Xu, C. (2021) Alternating Multiple Zeta Values, and Explicit Formulas of Some Euler-Apéry-Type Series. *European Journal of Combinatorics*, **93**, Article ID: 103283. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2020.103283

[8] Xu, C. and Zhao, J. (2024) Apéry-Type Series and Colored Multiple Zeta Values. *Advances in Applied Mathematics*, **153**, Article ID: 102610. https://doi.org/10.1016/j.aam.2023.102610

[9] Sun, Z.W. (2015) New Series for Some Special Values of L-Functions. *Journal of Nanjing University*, **32**, 189-218.

[10] Kuba, M. and Panholzer, A. (2019) A Note on Harmonic Number Identities, Stirling Series and Multiple Zeta Values. *International Journal of Number Theory*, **15**, 1323-1348. https://doi.org/10.1142/s179304211950074x

[11] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.