**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(6), 412-425
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.146260

Hans汉斯

# 分块矩阵在《高等代数》考研试题中的应用

**欧阳伽宣，廖小莲**

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底

收稿日期：2024年4月11日；录用日期：2024年5月12日；发布日期：2024年6月30日

## 摘 要

分块矩阵是《高等代数》中的一个重要内容，也是《高等代数》考研试题中的题型之一。矩阵分块是处理阶数较高的矩阵时常采用的技巧，因此，探讨分块矩阵在《高等代数》考研试题中的应用有很好的现实意义。文章首先对分块矩阵的相关知识进行了简单阐述，然后重点对分块矩阵在考研试题中的应用从五个方面进行了探讨：从分块矩阵在行列式计算中的应用、在证明矩阵秩相关问题中的应用、在矩阵求逆问题中的应用、在特征值问题中的应用及在相似与合同中的应用五个方面进行分析，并用近年的考研真题进行了剖析，对数学与应用数学考研学生有一定的应用价值。

## 关键词

分块矩阵，高等代数，行列式，矩阵的秩，矩阵的逆，特征值，相似与合同

# The Application of Block Matrix in the Examination Questions of *Advanced Algebra*

**Jiaxuan Ouyang, Xiaolian Liao**

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan

Received: Apr. 11th, 2024; accepted: May 12th, 2024; published: Jun. 30th, 2024

## Abstract

**Block matrix is an important content in *Higher Algebra*, and it is also one of the question types in *Higher Algebra*. Matrix partitioning is often used to deal with higher-order matrices, so it is of great practical significance to discuss the application of partitioning matrix in *Advanced Algebra*. Firstly, the article briefly expounds the related knowledge of block matrix, and then focuses on the application of block matrix in the examination questions from five aspects: this paper analyzes the application of block matrix in determinant calculation, in proof matrix rank correlation problem,**

文章引用: 欧阳伽宣, 廖小莲. 分块矩阵在《高等代数》考研试题中的应用[J]. 理论数学, 2024, 14(6): 412-425.
DOI: 10.12677/pm.2024.146260

**in inverse matrix problem, in eigenvalue problem, and in similarity and contract, and uses the real questions in recent years to analyze, which has certain application value for mathematics and applied mathematics students.**

## Keywords

**Block Matrix, Higher Algebra, Determinant, Rank of Matrix, Inverse of Matrix, Eigenvalue, Similarity and Contract**



## 1. 前言

《高等代数》是数学类专业的基石之一，也是数学类专业考研的专业课程之一。分块矩阵[1]是《高等代数》中的一个重要内容，在处理阶数较高的矩阵时常采用的分块矩阵进行降阶，是《高等代数》考研试题中的重要考点之一。分块矩阵是一种将大型矩阵分割成若干个小矩阵的方法，若干个小矩阵称为“块”，从而达到简化矩阵运算和分析。分块矩阵的加(减)法运算和数乘运算与普通矩阵的运算法则类似，两个相同分块形式的矩阵可以进行加(减)法运算，数乘运算也是对每个块独立进行。分块矩阵的乘法运算的前提是相应的块矩阵的大小要符合矩阵乘法的要求，再通过分块进行乘法运算。根据分块矩阵特定的性质，例如某个块是对角块，我们可以利用分块矩阵解决高等代数中阶数较高以及有特殊规律的矩阵的秩的问题，也可以简化高阶矩阵的行列式计算的问题等。在实际问题中的应用也很广泛，例如在图像的处理问题中，图像可以分成小块，每个小块单独处理，这在并行计算中非常有用。因此，在历年的《高等代数》考研试题中，有关分块矩阵的题目出现频率较高，为了更好地求解分块矩阵的有关试题，探讨分块矩阵在《高等代数》考研试题中的应用具有很好的现实意义。

近年来，众多学者以及从事高等代数和线性代数一线教学的教师都对分块矩阵的性质及其应用进行了探讨。阿里非日等[2]阐述了分块矩阵的基本性质以及矩阵的分块方法在行列式的相关计算中的应用，沈雷等[3]通过实例探讨了分块矩阵在行列式计算和矩阵的秩问题中的应用，成立花等[4]研究了分块矩阵的初等变换在矩阵秩的求解过程中的便利性，并且对矩阵秩的等式问题进行了研究和推广，而黄志君[5]探讨了分块矩阵在求解矩阵秩及其相关不等式证明中的应用。

本文结合近几年的考研试题对分块矩阵的应用进行剖析。文章首先简单介绍了分块矩阵相关知识，然后从五个方面对分块矩阵在高等代数课程考研试题中的应用进行了探讨，即：分块矩阵在行列式计算中的应用、分块矩阵在证明矩阵秩相关问题中的应用、分块矩阵在矩阵求逆问题中的应用、分块矩阵在特征值问题中的应用及分块矩阵在相似与合同中的应用五个方面。

## 2. 预备知识

**定义 1.1** [1]对于行数和列数较高并且具有一定规律的矩阵，在计算过程中可以采用“矩阵分块法”，使其分为小矩阵运算，将矩阵用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为子块，以子块为元素的矩阵在形式上被称为分块矩阵[1]。

例如：$3\times 4$ 的矩阵 $A$ 为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分成子块的方法很多，比如：

(1) $\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$；

(2) $\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$；

(3) $\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$。

在分法(1)中，$A$ 可以记为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 $A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$，$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$。即 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 为 $A$ 的子块，而 $A$ 成为以 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 为元素的分块矩阵。**分块矩阵有类似矩阵的运算法则[2]：**

**分块矩阵运算法则 1.1 [2] (加(减)法)**若 $A,B\in M_{m\times n}(R)$，$A=\left(A_{ij}\right)_{r\times s}$，$B=\left(B_{ij}\right)_{r\times s}$，对矩阵 $A,B$ 采用同样的方式分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{ij}$ 与 $B_{ij}$ 是同型矩阵，则有

$$A\pm B=\begin{pmatrix} A_{11}\pm B_{11} & A_{12}\pm B_{12} & \cdots & A_{1r}\pm B_{1r} \\ A_{21}\pm B_{21} & A_{22}\pm B_{22} & \cdots & A_{2r}\pm B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}\pm B_{s1} & A_{s2}\pm B_{s2} & \cdots & A_{sr}\pm B_{sr} \end{pmatrix}.$$

例如

**分块矩阵运算法则 1.2 [2] (乘法运算)**设 $A$ 为 $m\times l$ 矩阵，$B$ 为 $l\times m$ 矩阵，将 $A,B$ 分成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么就有

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

式中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\left(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r\right)$。

**分块矩阵运算法则 1.3** [2] **(数乘运算)**若 $A$ 为分块矩阵，$\lambda$ 为常数，则有

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{m1} & \cdots & \lambda A_{mn}\end{pmatrix}.$$

**分块矩阵运算法则 1.4** [2] **(转置运算)**若 $A$ 为分块矩阵，则有

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{m1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{1n}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{mn}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

**性质 1.1** [4]设 $A,B$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵，$O$ 为 $m\times s$ 零矩阵，且 $AB=O$，则 $R(A)+R(B)\le n$。

证明：设 $R(A)=r_1$，$R(B)=r_2$，则存在可逆矩阵 $P,Q$，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix},$$

而由 $AB=O$ 可知 $PAB=O$，从而 $PAQQ^{-1}B=O$。

记 $Q^{-1}B=T$，显然 $R(T)=R(B)=r_2$，于是

$$\begin{pmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix}T=O.$$

所以 $T$ 的前 $r_1$ 行全为零。

故

$$R(B)=r_2=R(T)\le n-r_1=n-R(A),$$

即

$$R(A)+R(B)\le n.$$

**性质 1.2** [4]设 $A$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，对于任意的 $a\in R$，有 $R(A)=R(aA)$。

**性质 1.3** [4]设 $A,B$ 都为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$。

证明：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，又设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$ 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的一个极大线性无关组，显然 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 一定可以由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t}$ 线性表出，所以

$R(A\quad B)=R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)\le R(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t})=r+t=R(A)+R(B)$，而

$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 又可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表出，于是

$R(A+B)=r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\le R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)=R(A\quad B)$。

**引理 1.1** [5]设 $A\in M_{m\times n}(P)$，$B\in M_{s\times t}(P)$，则

$$R(A)+R(B)=R\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\le R\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}.$$

证明：当 $A,B$ 当中有一个为 $O$ 时，结论显然成立。设 $R(A)=r_1\ne 0$，$R(B)=r_2\ne 0$，则 $A$ 有 $r_1$ 阶子式 $|M_1|\ne 0$，$B$ 有 $r_2$ 阶子式 $|M_2|\ne 0$，于是 $\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 有 $r_1+r_2$ 阶子式 $\begin{vmatrix}M_1 & O\\ * & M_2\end{vmatrix}=|M_1||M_2|\ne 0$。因此

$R\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r_1 + r_2 = R(A) + R(B) = R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$。

**定理 1.1** [3]设矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是方阵，$A$ 为可逆矩阵，则有：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right|.$$

证明：对矩阵进行初等变换

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right|.$$

运用与定理 1.1 相同的方法，可以得到定理 1.2：

**定理 1.2** [3]设矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是方阵，$D$ 为可逆矩阵，则有：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\left|A - BD^{-1}C\right|.$$

**定理 1.3** [3]设 $A$ 与 $D$ 分别为 $n$ 阶和 $m$ 阶可逆矩阵，则

$$\left|D \pm CA^{-1}B\right| = \frac{|D|}{|A|}\left|A \pm BD^{-1}C\right|.$$

证明：因为 $A$ 与 $D$ 分别为 $n$ 阶和 $m$ 阶可逆矩阵，根据定理 1.1 和 1.2 可得

$$|A|\left|D - CA^{-1}B\right| = |D|\left|A - BD^{-1}C\right|$$

所以

$$\left|D \pm CA^{-1}B\right| = \frac{|D|}{|A|}\left|A \pm BD^{-1}C\right|.$$

**定理 1.4** [6]设在行列式 $D$ 中任意取定了 $k\,(1 \leq k \leq n-1)$ 个行，由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 $D$。

## 3. 分块矩阵在高等代数考研试题中的应用

对于行数和列数较多的矩阵，我们常使用矩阵分块的思想方法对矩阵进行降阶来解决问题。下面我们将从分块矩阵在行列式计算中的应用、分块矩阵在证明矩阵秩相关问题中的应用、分块矩阵在矩阵求逆问题中的应用、分块矩阵在特征值问题中的应用及分块矩阵在相似与合同中的应用五个方面，采用考研真题剖析分块矩阵在高等代数考研中的试题应用。

### 3.1. 分块矩阵在行列式计算中的应用

在使用分块矩阵处理行列式时，关键是确定合适的分块策略，这一般取决于矩阵的特定结构和我们希望简化的计算类型。通过适当的分块，可以将复杂的矩阵行列式计算简化为较小矩阵的行列式计算，

从而使问题更加易于解决。

**例 1** (2024 年南开大学高等代数考研真题)计算下列四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & 0 & 0 \\ x & x+x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2+x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & x^3 & x^3+x^4 \end{vmatrix}$$

分析：通过观察可知，当 $x=0$ 时，行列式的值等于 0.而当 $x\neq 0$ 时，可以将矩阵分成四个小矩阵并取行列式得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$，再根据定理 1.1 我们需求出 $A^{-1}$ 和 $D-CA^{-1}B$，然后代入可求得结果。

解：(1) 当 $x=0$ 时，有

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & 0 & 0 \\ x & x+x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2+x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & x^3 & x^3+x^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时，将矩阵分成四个分块矩阵

令

$$A=\begin{pmatrix} 1+x & x \\ 0 & x+x^2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} x^2+x^3 & x^3 \\ x^3 & x^3+x^4 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & 0 & 0 \\ x & x+x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2+x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & x^3 & x^3+x^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

根据定理 1.1，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\left|D-CA^{-1}B\right|,$$

而

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} x+x^2 & -x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+x & x \\ x & x+x^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)}\begin{pmatrix} x+x^2 & -x \\ -x & 1+x \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} D-CA^{-1}B &= \begin{pmatrix} x^2+x^3 & x^3 \\ x^3 & x^3+x^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+x & x \\ x & x+x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2+x^3-\dfrac{x^3(1+x)}{x^2+x+1} & x^3 \\ x^3 & x^3+x^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\left|D-CA^{-1}B\right|=\left(x^2+x^3-\frac{x^3(1+x)}{x^2+x+1}\right)\left(x^3+x^4\right)-x^6=\frac{x^5\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{x^2+x+1},$$

且

$$|A|=\begin{vmatrix}1+x & x\\ x & x+x^2\end{vmatrix}=(1+x)\left(x+x^2\right)-x^2=x^3+x^2+x,$$

因此

$$|A|\left|D-CA^{-1}B\right|=x^6\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right),$$

即

$$\begin{vmatrix}1+x & x & 0 & 0\\ x & x+x^2 & x^2 & 0\\ 0 & x^2 & x^2+x^3 & x^3\\ 0 & 0 & x^3 & x^3+x^4\end{vmatrix}=x^6\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right).$$

**例 2** (2021 年重庆大学高等代数考研真题)计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n\\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & 1+a_n+x_n\end{vmatrix}.$$

分析：观察行列式的结构，该 $n$ 阶行列式可以采用加边法等常规行列式计算方法进行求解，但计算过程比较复杂，如果利用分块方法，计算会十分简单。题中行列式可表示为 $D_n=\left|E_n+D_n'\right|$，再利用分块矩阵的乘法运算法则对 $D_n'$ 进行分块，分为 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}'$， $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$，行列式化为 $D_n=\left|E_n+AB\right|$，再代入定理 1.3 进行求解。

解：记

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}',\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix},$$

根据定理 1.3 可知

$$\begin{aligned}D_n&=\left|E_n+AB\right|=\left|E_n+BA\right|\\ &=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^n a_i & n\\ \sum_{n=1}^n a_i x_i & 1+\sum_{i=1}^n x_i\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)-n\sum_{n=1}^n a_i x_i.\end{aligned}$$

通过对行列式 $D_n$ 对应的矩阵进行如下分块：

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}',\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix},$$

将 $n$ 阶行列式化为一个 2 阶行列式进行求解。显然，合适的分块策略是解决问题的关键。

### 3.2. 分块矩阵在证明矩阵秩相关问题中的应用

高等代数中矩阵的秩是非常重要的概念，不仅可以用来判断线性方程组的解的情况，还可以反映矩阵的重要特征。矩阵秩得不等式性质有很多证明方法，例如：(1) 利用向量组之间线性表出的关系以及极大线性无关组的概念进行证明；(2) 根据齐次线性方程组的基础解系进行证明；(3) 利用矩阵的初等变换进行证明；(4) 利用线性空间的维数公式、同构等一些性质和定理进行证明；(5) 利用分块矩阵的性质进行证明。下面将来探讨分块矩阵在矩阵的秩中的考研试题中的常见应用。

**例 3** (2023 年太原理工大学高等代数考研真题)设 $A\in P^{n\times x}$，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，$V_1=\left\{X\in P^n \middle| (A-E)X=0\right\}$，$V_2=\left\{X\in P^n \middle| (A+E)X=0\right\}$。

证明：$A^2=E$ 的充要条件是 $R(A+E)+R(A-E)=n$，其中 $R(A)$ 为矩阵的秩。

分析：必要性的证明，关键在于利用已知条件 $A^2=E$ 构建出矩阵 $A+E,A-E$ 的乘积形式，由矩阵秩不等式 1.3 可知 $R(A+E)+R(A-E)\le n$，再根据不等式 1.4 和 1.5 可推导出 $R(A+E)+R(A-E)=n$。而充分性的证明重点在于构建分块矩阵 $\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}$，再对其进行初等变换，得到秩的等式 $R(A+E)+R(A-E)=n+R\left(A^2-E\right)$，进而得证。

证明：**必要性**：因为 $A^2=E$，所以 $(A+E)(A-E)=O$，根据性质 1.3，知 $R(A+E)+R(A-E)\le n$。

再根据性质 1.4 和 1.5，$n=R(2E)=R\left((E-A)+(A+E)\right)\le R(E-A)+R(A+E)=R(A-E)+R(A+E)$，

因此

$$R(A+E)+R(A-E)=n.$$

**充分性**：构建分块矩阵 $\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}$，并对该分块矩阵进行初等变换，有

$$\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+E & 2E \\ O & A-E \end{pmatrix}$$

又有

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{2}(A-E) & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{2}(A+E) & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2E \\ -\frac{1}{2}\left(A^2-E\right) & O \end{pmatrix},$$

所以

$$R\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A+E & 2E \\ O & A-E \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} O & O \\ -\frac{1}{2}(A+E) & E \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} E & O \\ O & A^2-E \end{pmatrix},$$

即

$$R(A+E)+R(A-E)=R(E)+R\left(A^2-E\right)=n+R\left(A^2-E\right),$$

而

$$R(A+E)+R(A-E)=n,$$

因此

$$R\left(A^2-E\right)=0\text{，即 } A^2=E\text{ 。}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.146260

**例 4** (2024 年合肥工业大学高等代数考研真题)已知 $n$ 阶 $A,B$ 矩阵满足：$AB=BA$，证明：$R(A)+R(B)\ge R(A+B)+R(AB)$。

分析：根据分块矩阵的乘法运算法则，左乘一个单位矩阵相当于进行一次初等行变换，右乘一个单位矩阵相当于进行一次初等列变换，构造出矩阵$\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}$，而初等变换不改变矩阵的秩，因此对构造过程中的等式取秩，再根据引理 1.1 可以推出 $R(A)+R(B)\ge R(A+B)+R(AB)$。

证：构造分块矩阵。

$$\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & -AB+AB \\ B & BA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}$$

对上述式子取分块矩阵的秩得：

$$R\left[\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}\right]$$

$$R\left[\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}\right],$$

又因为矩阵$\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}$为满秩矩阵，于是有

$$R\left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}\right].$$

根据引理 1.1 可知：

$$R(A+B)+R(AB)\le R\left[\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}\right]$$

而

$$R\left[\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}\right]=R\left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ E & A \end{pmatrix}\right]\le R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=R(A)+R(B),$$

即证得 $R(A)+R(B)\ge R(A+B)+R(AB)$。

## 3.3. 分块矩阵在矩阵求逆问题中的应用

低阶矩阵的逆，常常可以采用初等变换法求逆矩阵。但对于高阶矩阵来说，除了一些有特殊规律的高阶矩阵，利用初等变换法求逆的计算过程是很复杂的。因此，常常采用先对矩阵进行分块，求得子块的逆，再利用分块矩阵的性质，达到求整个矩阵的逆的目的。

**例 5** (2022 年西南财经大学高等代数考研真题)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且矩阵 $B$ 满足 $AB+AA^*=A$，求 $B$。

分析：对矩阵 $A$ 进行分成 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，而 $A_1,A_2$ 的行列式值不等于零即可逆，因此 $A$ 也可逆，于

是有 $A^*=|A|A^{-1}$，再由已知的等式 $AB+AA^*=A$ 两边左乘 $A^{-1}$，可求解出 $B$。

解：记 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，显然 $A_1,A_2$ 可逆，从而

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

所以 $|A|=|A_1||A_2|=-1$，即 $A$ 也可逆，对 $AB+AA^*=A$ 两边左乘 $A^{-1}$ 可得

$$B=E-A^*=E-|A|A^{-1}=E+\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&0&0\\-2&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

**例 6** (2022 年云南大学高等代数考研真题)设 $A,B$ 为 $n$ 阶矩阵，满足 $|A+B|\cdot|A-B|\neq 0$，记 $D=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$，求 $D^{-1}$。

分析：根据已知条件 $|A+B|\cdot|A-B|\neq 0$，我们需要构造出矩阵 $\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$。通过对矩阵 $D$ 进行初等变换，得到矩阵 $\begin{pmatrix}A+B&B\\O&A-B\end{pmatrix}$，再进行一次初等变换得到 $\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$，而分块矩阵 $\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$ 的行列式不等于 0，即可逆.对等式两边求逆，从而求解出 $D^{-1}$。

解：首先注意到

$$\begin{pmatrix}E&O\\-E&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&O\\E&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&B\\O&A-B\end{pmatrix}$$

同时

$$\begin{pmatrix}A+B&B\\O&A-B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-(A+B)^{-1}B\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$$

将上述两式合起来，便有

$$\begin{pmatrix}E&O\\-E&E\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}E&O\\E&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-(A+B)^{-1}B\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$$

因为 $|A+B|\cdot|A-B|\neq 0$，所以 $\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}$ 可逆。

对上式两端求逆可得

$$\begin{aligned}D^{-1}&=\begin{pmatrix}E&O\\E&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-(A+B)^{-1}B\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A+B&O\\O&A-B\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E&O\\-E&E\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(A+B)^{-1}+(A+B)^{-1}B(A-B)^{-1}&-(A+B)^{-1}B(A-B)^{-1}\\(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}+(A+B)^{-1}B(A-B)^{-1}&(A-B)^{-1}-(A+B)^{-1}B(A-B)^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 3.4. 分块矩阵在特征值问题中的应用

矩阵的特征值是高等代数中一个重要概念，为了利用矩阵研究线性变换，我们希望能找到线性空间

的一组基，使得线性变换在该基下的矩阵具有最简单的形式而引入的概念。工程技术中的振动问题和稳定性问题，都可以归结为矩阵的特征值和特征向量问题。同时，特征值相关问题，也是高等代数课程和高等代数考研的主要内容。寻找特征值问题的求解方法，值得我们探讨。

**例 7** (2023 年陕西师范大学高等代数考研真题)设 $A,B$ 都是 $n$ 级实矩阵，并设 $\lambda$ 为 $BA$ 的非零特征值，以 $V_\lambda^{BA}$ 表示 $BA$ 关于 $\lambda$ 的特征子空间。证明：$\lambda$ 也是 $AB$ 的特征值。

分析：因为 $A,B$ 都是抽象矩阵，我们无法直接算出 $|\lambda E-AB|$ 的值，但如果能够构造一个矩阵使得其行列式为 $|\lambda E-AB|$，问题就可以获得解决.不妨构造分块矩阵 $H=\begin{pmatrix}\lambda E & A\\ B & E\end{pmatrix}$，对矩阵 $H$ 作两次广义初等变换，再取行列式，便可得证。

证明：构造分块矩阵 $H=\begin{pmatrix}\lambda E & A\\ B & E\end{pmatrix}$，对矩阵 $H$ 作广义初等变换

$$\begin{pmatrix}E & -A\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda E & A\\ B & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ -B & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E-AB & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$$

对上式取行列式，便有 $|H|=|\lambda E-AB|$；

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -\frac{1}{\lambda}B & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda E & A\\ B & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -\frac{1}{\lambda}A\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E & 0\\ 0 & E-\frac{1}{\lambda}BA\end{pmatrix}$$

对上式两边取行列式，便有 $|H|=\lambda^n\left|E-\frac{1}{\lambda}AB\right|$。

而

$$\lambda^n\left|E-\frac{1}{\lambda}AB\right|=|\lambda E-AB|=0,$$

所以可证得 $|\lambda E-AB|=0$，即可说明 $\lambda$ 也是 $AB$ 的特征值。

**例 8** (2023 年南京大学高等代数考研真题)设 $A\in M_n(R)$，已知 $A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求矩阵 $B=\begin{pmatrix}A & 4I_n\\ I_n & A\end{pmatrix}$ 的特征值。

分析：要求矩阵 $B$ 的特征值，即求 $|\lambda I_{2n}-B|=0$。对 $\begin{pmatrix}\lambda I_n-A & -4I_n\\ -I_n & \lambda I_n-A\end{pmatrix}$ 进行初等变换后再取行列式，根据拉普拉斯定理对行列式按列展开，进而得解。

解：由于

$$\begin{pmatrix}\lambda I_n-A & -4I_n\\ -I_n & \lambda I_n-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & \lambda I_n-A\\ O & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_n-A & (\lambda I_n-A)^2-4I_n\\ -I_n & O\end{pmatrix},$$

上式两端取行列式，结合定理 1.6 可得

$$\begin{aligned}|\lambda I_{2n}-B|&=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A & -4I_n\\ -I_n & \lambda I_n-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A & (\lambda I_n-A)^2-4I_n\\ -I_n & O\end{vmatrix}\\&=(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|-I_n|\left|(\lambda I_n-A)^2-4I_n\right|\\&=(-1)^{2n(n+1)}|(\lambda-2)I_n-A||(\lambda-2)I_n-A|\\&=\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda-2-\lambda_i)(\lambda+2-\lambda_i)\right]\end{aligned}$$

这说明 $B$ 的特征值为 $\lambda_i+2,\lambda_i-2\left(i=1,2,\cdots,n\right)$。

## 3.5. 分块矩阵在相似与合同中的应用

相似变换是一种特殊的线性变换，可以将其中一个矩阵可以变换为另一个矩阵，且这两个矩阵有相同的特征值。合同变换主要用于二次型和对称矩阵，通常的目标对于有限维线性空间的某一线性变换，通过选取线性空间中合适的基，使得线性变换在该基下的矩阵为一个简单的对角形式，或者是将其简化为具有更便于分析的结构特征的形式。通过适当的分块将原矩阵表示成更简单形式，比如说分块对角矩阵，我们可以通过单独处理每个子块而达到解题目的。在多数应用中，理想的分块策略旨在减少子块之间的相互作用，这样每个子块可以独自进行变换而不会影响其他子块，分块矩阵的方法在相似变换和合同变换的分析和计算中，可以提供计算和理论上的便利。

**例 9** (2022 年南开大学高等代数考研真题)已知 $A,B\in R^{n\times n}$，且满足 $R\left(ABA\right)=R\left(B\right)$，证明：$AB$ 与 $BA$ 相似。

分析：题目已知两个矩阵秩的关系式 $R\left(ABA\right)=R\left(B\right)$，我们可以把其中一个矩阵化为等价标准型，同时为了观察乘积的形式，另一个矩阵也要有相应的变换.因此将矩阵 $A$ 化为等价标准型，矩阵 $B$ 做相应的变换，进而得到矩阵 $AB$，$BA$ 以及 $ABA$ 的表达形式。再根据秩的关系，可以得到 $B_3$ 的行向量可以被 $B_1$ 的行向量表示，$B_2$ 的列向量可以被 $B_1$ 的列向量表示，从而得到两个方程 $B_1X=B_2$ 与 $YB_1=B_3$，由此可知 $\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}$ 相似，因此得证。

证明：设 $R\left(A\right)=r$，则存在可逆矩阵 $P,Q$，使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}Q$。

记 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 $B_1$ 为 $r$ 阶方阵。那么

$$AB=P\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}QBPP^{-1}\sim\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}$$

$$BA=Q^{-1}QBP\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}Q\sim\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}$$

同时

$$ABA=P\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}QBP\begin{pmatrix}E_r & \\ & O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

所以 $R\left(ABA\right)=R\left(B_1\right)$，又因为 $R\left(ABA\right)=R\left(B\right)$，因此 $R\left(ABA\right)=R\left(B_1\right)=R\left(B\right)$。

另外再结合不等式 $R\left(ABA\right)\le R\left(AB\right)$，$R\left(BA\right)\le R\left(B\right)$ 得 $R\left(ABA\right)=R\left(AB\right)=R\left(BA\right)$，于是 $R\left(B_1\right)=R\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}B_1\\ B_3\end{pmatrix}$。

这说明矩阵方程 $B_1X=B_2$ 与 $YB_1=B_3$ 有解，不妨设矩阵 $X_0,Y_0$ 满足 $B_1X_0=B_2$，$Y_0B_1=B_3$，那么

$$\begin{pmatrix}E_r & -X_0\\ O & E_n-r\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & -X_0\\ O & E_n-r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ -Y_0 & E_n-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & O\\ -Y_0 & E_n-r\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

由此可知$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix}$相似，进而 $AB$ 与 $BA$ 相似。

**例 10** (2023 年华中科技大学高等代数考研真题)设 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，且方程组 $AX=\alpha$ 无解，$\alpha \in R^n$，$d>0$，证明：$n+1$阶矩阵$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & d \end{pmatrix}$是不定的(既不半正定，也不半负定)。

分析：首先看到 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，且方程组 $AX=\alpha$ 无解，说明 $A$ 是不可逆的。由此将分块矩阵合同为准对角矩阵 $P^{\mathrm{T}}BP=\begin{pmatrix} A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} & 0 \\ & d \end{pmatrix}$。根据对角线上的 $d>0$ 可以得到 $B$ 的正惯性指数也大于零，接着证明 $B$ 的正惯性指数也大于零。只需找一个向量 $X_0$，满足 $X_0^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right)X_0<0$，再结合已知条件即可求解。

证明：记 $B=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & d \end{pmatrix}$。取分块初等矩阵 $P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\frac{1}{d}\alpha^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$，则有

$$P^{\mathrm{T}}BP=\begin{pmatrix} A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} & 0 \\ & d \end{pmatrix}.$$

由于方程组 $AX=\alpha$ 无解，所以 $R(A,\alpha)=R(A)+1=R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

取转置可得 $R\begin{pmatrix} A \\ \alpha^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$。

这说明方程组$\begin{pmatrix} A \\ \alpha^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$有解，不妨设 $X_0$ 为一解，那么 $AX_0=0$，$\alpha^{\mathrm{T}}X_0=1$，因此

$$X_0^{\mathrm{T}}\left(A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right)X_0=X_0^{\mathrm{T}}AX_0-\frac{1}{d}\left(\alpha^{\mathrm{T}}X_0\right)^2=-\frac{1}{d}<0.$$

这说明 $A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的负惯性指数大于零，进而 $B$ 的负惯性指数大于零，而由 $d>0$ 还知 $B$ 的正惯性指数也大于零，因此 $B$ 是不定的。

## 4. 结束语

本文给出了分块矩阵在行列式计算中的应用、在证明矩阵秩相关问题中的应用、在矩阵求逆问题中的应用、在特征值问题中的应用及在相似与合同中的应用，并选取高等代数考研真题，剖析了分块矩阵在这 5 个方面中的应用策略。分块矩阵的应用极其广泛，不仅在高等代数考研试题中占据一席之地，同时在其他方面中也有着广泛应用，例如分块矩阵在求解线性方程组中的应用，在线性相关性中的应用以及在物理和工程学等科学领域的应用等等，这些都值得我们进一步去探讨。

## 参考文献


[1] 陈国华, 廖小莲, 刘成志, 等. 高等代数[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2022.

[2] 阿力非日, 张艳. 分块矩阵在计算行列式值中的应用[J]. 智库时代, 2019(44): 293-294.

[3] 沈雷, 孙振凯, 马庆文. 分块矩阵在线性代数中的应用[J]. 山东农业工程学院学报, 2020, 37(12): 35-37.
https://doi.org/10.15948/j.cnki.37-1500/s.2020.12.007

[4] 成立花, 张娟娟. 分块矩阵初等变换在矩阵秩中的应用[J]. 高师理科学刊, 2017, 37(3): 9-10.

[5] 黄志君. 分块矩阵在求矩阵秩及其相关不等式证明中的应用[J]. 数学学习与研究, 2013(15): 126-127.

[6] 北京大学数学系前代数小组编. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.