Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 135-141
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147280

Hans汉斯

从罗尔定理到山路定理

黄　晨，韦一鸣

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年6月18日；录用日期：2024年7月15日；发布日期：2024年7月29日

摘　要

山路定理是现代临界点理论的标志性结果，它是证明非线性椭圆型偏微分方程有解的重要工具。本文旨在研究有限维山路定理的初等证明以及有限维山路定理与微积分之间的关系。再在此基础上，给出山路定理的应用实例。本文从教学实际出发，为学生进入研究生阶段理解非线性分析中的重要定理提供有益帮助。

关键词

临界点理论，山路定理，罗尔中值定理

From Rolle's Theorem to Mountain Pass Theorem

Chen Huang, Yiming Wei

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jun. 18th, 2024; accepted: Jul. 15th, 2024; published: Jul. 29th, 2024

Abstract

The mountain pass theorem is a landmark result of modern critical point theory, which is an important tool for proving the existence of solutions to nonlinear elliptic partial differential equations. This article aims to study the elementary proof of the finite-dimensional mountain path theorem and the relationship between the finite-dimensional mountain pass theorem and calculus. On this basis, an application example of the mountain pass theorem is given. This article starts from the actual teaching situation, providing beneficial help for students to understand important theorems in nonlinear analysis when they enter the graduate stage.

文章引用：黄晨，韦一鸣．从罗尔定理到山路定理[J]．理论数学, 2024, 14(7): 135-141. DOI: 10.12677/pm.2024.147280

Keywords

Critical Point Theory, Mountain Pass Theorem, Rolle Mean Value Theorem

1. 引言

本文从罗尔定理出发，目的是叙述现代变分理论中的重要结果——山路定理，由于知识的局限性，我们无法理解在非线性泛函分析中的“完整版山路定理”(无穷维)，故我们只是在本文中给出有限维版本山路定理在微积分中的对应，试图给出我们的理解。但这不妨碍我们对山路定理的研究现状作具体表述。

山路定理是现代临界点理论研究中的一个重要组成部分，自从 1973 年由 Ambrosetti 和 Rabinowitz [1] [2]提出以来，它在数学的多个分支以及物理学中的应用都显示出了极其重要的意义。具体而言，存在性证明：山路定理提供了一种强有力的工具来证明非线性问题中解的存在性。特别是在处理那些无法通过传统方法解决的问题时，山路定理显示出了其独特的优势；多样性和多重解：除了证明解的存在性，山路定理还可以用来研究解的多样性和多重性。这对于理解物理系统的复杂性和预测其行为至关重要；数学物理的桥梁：山路定理在数学和物理学之间架起了一座桥梁。它不仅帮助数学家理解复杂的数学结构，也为物理学家提供了解决物理问题的新方法；理论研究和实际应用：山路定理的理论价值和实际应用前景都非常广阔。它在理论研究中推动了数学的发展，在实际应用中为解决工程技术问题提供了新的视角和方法；广泛的应用：山路定理被广泛应用于解决非线性椭圆型方程的边值问题。它不仅在纯数学领域中有着重要地位，如微分几何、辛几何、极小曲面等领域，也在物理学中，特别是在量子力学和场论中发挥着重要作用[3]。

理论的深入：学者们对山路定理的理解不断深入，通过引入不同的条件和技术，如 Ekeland 变分原理[4]和下降流线方法[5]，进一步推广和发展了山路定理。研究者们还提出了山路定理的改进版本和变体，这些变体在没有特定条件(如(AR)条件)的情况下也能证明定理的有效性，从而扩大了山路定理的应用范围。

综上所述，山路定理在现代数学和物理学的研究中扮演着越来越重要的角色，它的研究不仅推动了理论的发展，也为解决实际问题提供了强有力的工具。随着研究的不断深入，预测山路定理将会在更多的领域中展现其重要性。

本文旨在研究有限维山路定理的初等证明以及有限维山路定理与微积分之间的关系，再在此基础上给出山路定理的应用实例。本论文旨在为初学者学习临界点理论提供一个易于理解的特殊情况，对之后研究生阶段深入研究现代变分学有着现实意义。

2. 罗尔中值定理[6] [7]

2.1. 罗尔中值定理和一个有趣的证明

定理 2.1 ：若函数 f 满足以下条件：

1) f 在闭区间 $[a,b]$ 连续；

2) f 在开区间 (a,b) 可导；

3) $f(a)=f(b)$；

则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=0$。

下面是一个有趣的证明来自谢惠民，这表明罗尔中值定理和费马引理之间没有必然联系。

证明： 首先引入引理 1。

引理 1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $c,d\in[a,b]$，满足 $d-c=\frac{b-a}{2}$ 且 $f(c)=f(d)$。

证明：

不妨构造函数：

$$F(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x),$$

则

$$F(a)=f\left(\frac{b-a}{2}\right)-f(a)\text{ 并且 }F\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

由于 $f(a)=f(b)$，所以 $F(a)=-F\left(\frac{b+a}{2}\right)$。

1) 若 $F(a)=0$，则取 $d=\frac{b+a}{2}$，$c=a$ 满足 $d-c=\frac{b-a}{2}$ 且 $f(c)=f(d)$；

2) 若 $F(a)\neq 0$，因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由介值定理可知存在 $x_0\in\left(a,\frac{b+a}{2}\right)$ 满足 $F(x_0)=0$，取 $c=x_0$，$d=x_0+\frac{b+a}{2}$，满足 $d-c=\frac{b+a}{2}$ 且 $f(c)=f(d)$。

重复利用引理 1，可知存在闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 $(a,b)\supset(a_1,b_1)\supset(a_2,b_2)\supset\cdots$ 且 $f(a_n)=f(b_n)$，$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$，由区间套定理可得 ξ，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

由于 $f(a_n)=f(b_n)$，那么 $\frac{f(a_n)-f(\xi)}{a_n-\xi}\cdot\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}\leq 0$，又因为 $f(x)$ 在 ξ 点处可导，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(\xi)}{a_n-\xi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}=f'(\xi)$，则 $f'(\xi)=0$。

2.2. 罗尔中值定理的延伸

定理 2.2： 假设 $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$x_1,x_2$ 与 x_3 是三个不同的实数且有 $x_1<x_3<x_2$，如果有：

$$\max\{f(x_1),f(x_2)\}<f(x_3),$$

则在开区间 (x_1,x_2) 中存在一点 ξ 为 f 的临界点，且在这一点上有：

$$f(\xi)=\max_{x\in[x_1,x_2]}f(x)=\inf_{[a,b]\in\Gamma}\max_{x\in[a,b]}f(x),$$

其中，Γ 为：

$$\Gamma=\{[a,b]\,|\,\text{对 }a,b\text{ 有 }a\leq x_1\leq x_2\leq b\}.$$

证明： 这是实数轴上的山路定理，可以看出这同样是罗尔定理结论的延伸。

事实上，当我们假设有 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，这一定理即变为罗尔中值定理，因而不需要证明这一情况定理是否成立。

我们不妨设 $f(x_1)<f(x_2)$，则由于介值定理，必然存在 $x_c\in(x_1,x_3)$ 使 $f(x_c)=f(x_2)$。事实上，我们

可能会找到不止一个的 x_c，我们假设这些 x_c 中存在一个与 x_1 最靠近的 x_t。从而 $x_3\in[x_t,x_2]$，又因为有 $[x_t,x_2]\subset[x_1,x_2]$，我们可以得到：

$$\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x)\geq \max_{x\in[x_t,x_2]} f(x)\geq f(x_3)>\max\{f(x_1),f(x_2)\},$$

而我们知道 $[x_1,x_2]\in\Gamma$，所以我们有：

$$\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x)\geq \inf_{[a,b]\in\Gamma}\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

另一方面，对于 Γ 中的任意路径 $[a,b]$，我们有：

$$\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x)\leq \max_{[a,b]} f(x),$$

对上式两端同时取 $\inf_{[a,b]\in\Gamma}$，我们得到：

$$\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x)\leq \inf_{[a,b]\in\Gamma}\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

自此证明完毕。

对于这一延伸定理的研究有助于理解山路定理。现在，我们可以将最后的结果推广到更高的维度，即推广到 $N>1$ 的欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 上定义的实函数中。于是，我们正式进入了有限维山路定理。

3. 有限维山路定理

定理 3.1 [8]：假设 Φ 是一个由 $\mathbb{R}^N$ 映射到 $\mathbb{R}$ 具有一阶连续偏导数的多元函数，它是强制的 ($\lim_{\|x\|\to\infty}\Phi(x)=+\infty$)，并且有两个不同的严格相对极小值点 x_1、x_2，则我们可以得到一个不同于 x_1 与 x_2 的第三个临界点 x_3 使之有：

$$\Phi(x_3)=\inf_{\Sigma\in\Gamma}\max_{x\in\Sigma}\Phi(x),$$

其中，$\Gamma=\{\Sigma\subset\mathbb{R}^N \mid \Sigma\text{ 是紧集、连通集且满足 } x_1,x_2\in\Sigma\}$。

证明：我们可以把 Γ 中的每个 Σ 认为是包含 x_1 与 x_2 的一条“路径”，用 d_Σ 表示该路径 Σ 上取得关于 Φ 的最大值点 x_Σ 对应的函数值 $\Phi(x_\Sigma)$。

因 x_1 与 x_2 为严格极小值点，所以我们可以得到：

$$d_\Sigma>\max\{\Phi(x_1),\Phi(x_2)\},$$

同时，记

$$d=\inf_{\Sigma\in\Gamma}\max_{x\in\Sigma}\Phi(x)=\inf_{\Sigma\in\Gamma} d_\Sigma,$$

d 被认为是所有路径最大值 d_Σ 中的最小值。同时，因所有路径 Σ 都为紧的连通集，根据下确界的定义，我们可以构造一个路径的序列 $\{\Sigma_n\}_n$，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $d_{\Sigma_n}\to d$。明显的是，$d\geq\max\{\Phi(x_1),\Phi(x_2)\}$。事实上，这个不等式是严格的，因为下确界 d 在 Γ 中的可达。

Step 1. 下确界 d 在 Γ 中的可达。

考虑 Σ_n 的上极限：

$$\Sigma=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\overline{\bigcup_{i\geq m}\Sigma_i},$$

这一上极限 Σ 具有紧性和连通性。事实上，它是由具有紧性、连通性、递减性的集合通过有限交运算构造出来的。而且，由于每个 Σ_i 都包含有 x_1 与 x_2，所以 Σ 也同样包含有 x_1 与 x_2，因而 Σ 属于 Γ。

因为构造上极限的过程$\left\{\bigcup_{i\geq m}\Sigma_i\right\}_m$是一递减序列，当$m_1 > m_2$时有$\bigcup_{i\geq m_1}\Sigma_i \subseteq \bigcup_{i\geq m_2}\Sigma_i$，由单调有界原理，我们得到：

$$\lim_{n\to\infty} x_{\Sigma_n} = x_\Sigma \in \Sigma ,$$

这里用x_{Σ_n}表示该路径Σ_n上Φ的最大值点。

另一方面，由于$\Phi(x)$是连续的，所以有：

$$\Phi(x_\Sigma) \leq \limsup \Phi(x_{\Sigma_n}) ,$$

故：

$$\Phi(x_\Sigma) \leq \limsup d_{\Sigma_n} ,$$

得：

$$\Phi(x_\Sigma) \leq d .$$

而因d是所有“最大值”的最小，故有$\Phi(x_\Sigma) \geq d$，综上可得$\Phi(x_\Sigma) = d_\Sigma = d$。

通过选取递减的紧的路径的序列$\{\Sigma_n\}$，我们可以在每一序列中都通过求其上极限的方法得到Σ，Σ中的最大点x_Σ都满足有$\Phi(x_\Sigma) = d$，也就是说我们得到了一极小化路径，使在这一路径中确实可以得到一个最大值$\Phi(x_\Sigma)$，使得：

$$d = \inf_{\Sigma\in\Gamma} d_\Sigma = \Phi(x_\Sigma) .$$

Step 2. 下面将要证明函数Φ存在临界点，并且对应的临界值为d。

将这些取到最大值的点组成点集合，记作：

$$M = \left\{x \in \Sigma \mid \Phi(x) = d_\Sigma = \max_\Sigma \Phi = d\right\},$$

由于Φ的连续性以及Σ的紧性，我们可以得到M同样拥有紧性。

接下来，我们将在这些最大值中，使对应的函数值最小的点就是临界点。即证明确实存在有点$x_3 \in M$，使得函数$\nabla\Phi(x_3) = 0$。

我们使用反证法，首先假设如果在M中没有临界点，即存在一个正的常数α，对于所有x属于M，有：

$$|\nabla\Phi(x)| > \alpha .$$

因为函数Φ的连续性，存在$\varepsilon > 0$，使得对任意的$x \in M_\varepsilon$，其中：

$$M_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid 存在\ y \in M, 使得\ |x-y| < \varepsilon\right\},$$

有：

$$|\nabla\Phi(x)| > \frac{\alpha}{2}.$$

值得注意的是，根据定义我们可知x_1与x_2并不在M_ε内，它们作为严格最小值点同样是临界点。

构造一个截断函数ρ使之满足：

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \sup \rho \subset M_\varepsilon, \\ \rho \equiv 1, x \in M. \end{cases}$$

定义一个新的映射 $\eta:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$，为：

$$\eta(x,t)=x-t\cdot\rho(x)\cdot\nabla\Phi(x).$$

则 η 关于 t 是连续可微的，并有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\eta(x,t))\bigg|_{t=0}=-\rho(x)\cdot\left|\nabla\Phi(x)\right|^2,$$

注意到当 $x\in\operatorname{supp}\rho\subset M_\varepsilon$ 时，有：

$$\left|\nabla\Phi(x)\right|^2\geq\frac{\alpha^2}{4}\geq0.$$

根据 $\Phi(\eta(x,t))$ 关于 t 的连续性，存在 $T>0$，使得对任意的 $t\in[0,T]$，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\eta(x,t))\leq-\rho(x)\cdot\left|\nabla\Phi(x)\right|^2.$$

因此，对任意的 $\eta(x,T)\in\Sigma_T$，其中 $\Sigma_T=\eta(\Sigma,T)=\{\eta(x,T);x\in\Sigma\}$，我们得到：

$$\Phi(\eta(x,T))=\Phi(x)+\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\eta(x,t))\mathrm{d}t\leq\Phi(x)-\frac{T}{2}\rho(x)\left|\nabla\Phi(x)\right|^2.$$

所以我们得到：当 $x\in M$ 时，即有 $\Phi(x)<d-\frac{T}{2}\alpha^2$，而当 $x\notin M$ 时，有 $\Phi(x)<d$。

则一定有：

$$\max_{x\in\Sigma_T}\Phi(x)<d.$$

但由 η 的连续性可得，集合 Σ_T 是连通集、紧集，通过对 ε 与 ρ 的选择，我们可以让 $x_1=\eta(x_1,T)$ 和 $x_2=\eta(x_2,T)$ 都包含于 Σ_T。如此一来 $\Sigma_T\in\Gamma$，那么 $\max_{x\in\Sigma_T}\Phi(x)<d$ 与 d 的定义相矛盾。由此反证假设不成立，我们确实证明了在 Σ 中存在一个临界点。自此证明完毕。

山路定理的应用

有限维山路定理在不同领域有广泛的应用，我们通过有限维山路定理给出 Hadamard 定理[9]的证明。

Hadamard 定理： 假设 X 与 Y 为两个不同的有限维欧式空间，假设映射 Φ 为 $X\to Y$ 的一个映射，并且 $\Phi\in C^1(X,Y)$，满足：

1) 对所有 $x\in X$，Φ' 是可逆的；

2) 当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $\|\Phi(x)\|\to\infty$；

则 Φ 是一个由 X 到 Y 的微分同胚。

证明： 由条件 1)，我们可知，Φ 是一个开映射，即 Φ 的值域是在 Y 中的开集。

根据条件 2)以及在有限维中闭集是紧集，我们可得 $\Phi(X)$ 是一个闭集。事实上，构造一个收敛序列集 $\{\Phi(x_n)\}_n$，因为它在 Y 上是有界的，我们易知 $\{x_n\}_n$ 在 X 上也是有界的。因此，存在 $x_c\in X$，使得 $x_n\to x_c$，并且 $\Phi(x_n)\to\Phi(x_c)$。

如果我们能证明 Φ 是一对一的，这就证明了 Φ 是一个微分同胚。

反之，若我们假设对 X 中两个不同的点 x_1 与 x_2 有 $\Phi(x_1)=\Phi(x_2)=y$，构造一个具有一阶连续偏导数的映射 $f:X\to\mathbb{R}$，使之满足：

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\|\Phi(x)-y\right\|^2.$$

由条件2)可得，当$x\to\infty$时，$f(x)\to\infty$，结合x_1与x_2为f的全局最小值点，我们有x_1与x_2为f的严格局部极小值点。由有限维山路定理可知，存在f的临界点x_3使得$f(x_3)>0$，从而我们可知$\|\Phi(x_3)-y\|>0$，所以$\Phi(x_3)\neq y$。又因为x_3为f的临界点，一定有$\Phi'^*(x_3)(\Phi(x_3)-y)=0$，这与条件1)的映射$\Phi'$是可逆的相矛盾。因而得证。

致　谢

在本论文的研究和撰写过程中，我们得到了许多人的帮助和支持，在此表达我们最诚挚的感谢。

参考文献

[1] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[2] Rabinowitz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. In: *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, Vol. 65, American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbms/065

[3] Chang, K.C. (1983) A Variant Mountain Pass Lemma. *Science in China Series A—Mathematics, Physics, Astronomy & Technological Science*, **26**, 1241-1255.

[4] Badiale, M. and Serra, E. (2011) Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach. Springer-Verlag London Limited. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-227-8

[5] Liu, Z.L. and Sun, J.X. (2001) Invariant Sets of Descending Flow in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **172**, 257-299. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3867

[6] 华东师范大学. 数学分析第五版(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[7] 华东师范大学. 数学分析第五版(下) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[8] Jabril, Y. (1999) The Mountain Pass Theorem, Variants, Generalizations and Some Applications. Cambridge University Press.

[9] 袁荣. 非线性泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.