Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 15-22
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147266

Hans汉斯

广义$\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$完美差族及相关几何正交码

周丽娟[1]，**黄月梅**[1,2*]

[1]内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
[2]内蒙古自治区应用数学中心，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2024年5月29日；录用日期：2024年6月8日；发布日期：2024年7月11日

摘 要

DNA折纸技术在构造纳米材料中起着重要的作用。而几何正交码(GOCs)可以减少DNA折纸中宏键组的错位问题。本文通过确定$\left(n,\{3,5\},1\right)$完美差族的存在条件，并借助辅助设计与递归构造的方法，得到了广义$\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$完美差族的存在条件。又根据几何正交码与广义完美差族之间的等价关系，给出了对应的变重量的完美几何正交码的存在条件。

关键词

广义完美差族，广义完美差填充，几何正交码，半完美可分组设计

Generalized $\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$ Perfect Difference Families and Related Geometric Orthogonal Codes

Lijuan Zhou[1], **Yuemei Huang**[1,2*]

[1]College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia
[2]Inner Mongolia Center for Applied Mathematics, Hohhot Inner Mongolia

Received: May 29th, 2024; accepted: Jun. 8th, 2024; published: Jul. 11th, 2024

Abstract

DNA origami technology plays an important role in the construction of nanomaterials. Geometric

*通讯作者。

文章引用: 周丽娟, 黄月梅. 广义$\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$完美差族及相关几何正交码[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 15-22.
DOI: 10.12677/pm.2024.147266

Orthogonal Codes (GOCs) are used to design macro key groups in DNA origami to reduce its misalignment problems. In this paper, the existence conditions of generalized $(n\times m,\{3,5\},1)$ perfect difference families were determined with the aid of $(n,\{3,5\},1)$ perfect difference families with auxiliary designs and recursive constructions. Then, the existence conditions of some variable-weight perfect geometric orthogonal codes were obtained from the equivalence relationship of geometric orthogonal codes and generalized perfect difference families.

Keywords

Generalized Perfect Difference Family, Generalized Perfect Difference Packing, Geometric Orthogonal Code, Semi-Perfect Group Divisible Design

1. 引言

纳米材料在信息、能源、医药、航空航天等领域具有广阔的应用前景。纳米材料的性能取决于它的结构。DNA 折纸术是一种全新的 DNA 自组装方法，在构造纳米材料方面发挥着重要的作用，通过在 DNA 折纸技术中放置平头钝端，可以迫使一组 DNA 折纸通过碱基堆叠粘合以形成预期的排列。如果 DNA 折纸技术中的宏键组出现错位，将严重影响纳米材料的结构特性。Doty 和 Winslow [1]在 2017 年提出几何正交码的概念，介绍了如何使用这类编码设计 DNA 折纸技术，以此降低宏键组偏差带来的影响，并给出了一类几何正交码码字个数的上下界。Chee 等[2]建立了几何正交码与光正交签名码之间的联系，改进了 $n=m$ 时几何正交码码字个数的上界，给出了 $k\le 5$ 时几类最优几何正交码码字容量的精确值。Wang 等[3]进一步研究了 $n\ne m,k=3$ 时几何正交码的容量，首次提出可以借助广义完美差填充对几何正交码进行构造。因此，研究广义完美差填充的存在性问题，对几何正交码进行进一步探究有理论意义。本文从 $(n,\{3,5\},1)$ 完美差族的存在性问题入手，并借助辅助设计与递归构造，确定了部分广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$ 完美差族的存在条件。再根据几何正交码与广义完美差族之间的等价关系，给出了变重量的完美几何正交码的几个存在条件。

2. 预备知识

本节主要介绍广义完美差填充、广义完美差族的定义以及一些已知结果。

定义 2.1 令 N 和 M 为两个包含 0 的整数集，且 $a\in N$ (或 $a\in M$)时，$-a\in N$ (或 $-a\in M$)。令 K 为给定的正整数集。对于 $N\times M$ 中的任意 k 元子集 B，$k\in K$，定义 B 的差集为：

$$\Delta(B)=\{(x_1-x_2,y_1-y_2):(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in B,(x_1,y_1)\ne(x_2,y_2)\}.$$

定义 2.2 令 $\mathcal{B}$ 为 $N\times M$ 中的一些大小为 $k(k\in K)$ 的子集(称为基区组)族，若 $\Delta\mathcal{B}=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta B$ 包含 $N\times M$ 中的每个元素至多一次，则称 $(N\times M,\mathcal{B})$ 为广义 $(N\times M,K,1)$-完美差填充(perfect difference packings)，记作广义 $(N\times M,K,1)$-PDP。称 $(N\times M)\setminus\Delta\mathcal{B}$ 为这个差填充的差剩余。若差剩余仅包含 $(0,0)$，则称 $(N\times M,\mathcal{B})$ 为广义 $(N\times M,K,1)$-完美差族(perfect difference family)，记作广义 $(N\times M,K,1)$-PDF。

设 a,b 均为整数，且 $a<b$，规定 $[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$。对于任意的奇数 n，记 $[n]=\left[-\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right]$。

通常将广义 $([n]\times[m],K,1)$-PDP (或 PDF)记为广义 $(n\times m,K,1)$-PDP (或 PDF)。当 $m=1$ 时，一个广义 $(n\times m,K,1)$-PDP (或 PDF)记为 $(n,K,1)$-PDP (或 PDF)。

$(n,K,1)$-PDP 的存在性问题最早由 Bermond 等[4]在可移动天线的问题中提出，并确定了 $(n,3,1)$-PDP 的存在条件与 $k=4,5$ 时，$(n,k,1)$-PDP 不存在的若干条件。文献[5] [6]给出了 $(n,3,1)$-PDF 存在的充要条件与 $k\ge 3$ 时，$(n,k,1)$-PDF 不存在的条件。文献[7] [8]利用加法置换序列与完美差矩阵，给出了 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$ 时，$(n,4,1)$-PDF 的存在条件与 $t\le 1000$ 且 $t\ne 2,3$ 时，$(12t+1,4,1)$-PDF 的存在条件。Wu 等[9] [10]利用 Langford 序列讨论了 $(n,K,1)$-PDF 不存在的条件及 $K=\{3,s^*\},\{3,s_1^*,s_2^*\}$ 时，$(n,K,1)$-PDF 的存在条件，其中 $s_i^*(i=1,2)$ 表示 $(n,\{k,s_1^*,s_2^*\},1)$-PDF 中恰好有一个大小为 $s_i(i=1,2)$ 的基区组，且大小为 k 的基区组的数量大于 0。

下面列出几个完美差族的已知结果。

引理 2.3 [5] [11]

1) $(n,3,1)$-PDF 存在当且仅当 $n\equiv 1,7(\mathrm{mod}\,24)$；

2) 当 $t=6,8,10$ 时，$(20t+1,5,1)$-PDF 存在；

3) 当 $n\equiv 21(\mathrm{mod}\,40)$ 或 $n=41,81$ 时，$(n,5,1)$-PDF 不存在。

引理 2.4 [9] $(n,\{3,5^*\},1)$-PDF 存在当且仅当 $n\equiv 9,15(\mathrm{mod}\,24)$ 且 $n\ge 33$。

引理 2.5 [3] $(n\times m,3,1)$-PDF 存在当且仅当 $nm\equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$ 且 $n,m\equiv 1,7,17,23(\mathrm{mod}\,24)$。

2.1. 辅助设计

本节介绍了构造广义完美差族用到的辅助设计。

定义 2.1.1 令 K 为给定的正整数集，若三元组 $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 满足：1) X 是一个有限点集，X 中的元素称为点；2) $\mathcal{G}$ 是 X 的一种划分，$\mathcal{G}$ 中的元素称为组；3) $\mathcal{B}$ 是 X 的子集(称为区组)族，$\mathcal{B}$ 中每个区组的大小均属于 K，X 中属于不同组的任意元素对恰好属于 $\mathcal{B}$ 的唯一一个区组中，而属于同一个组的任意元素对不属于任何区组，则称 $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 是一个可分组设计(group divisible design)，记作 K-GDD。当 $K=\{k\}$ 时，简写为 K-GDD。若组集 $\mathcal{G}$ 有 u_i 个大小为 g_i 的组，其中 $1\le i\le s$，且 $|X|=\sum_{i=1}^{s}u_ig_i$，则称 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_s^{u_s}$ 为该可分组设计的型。

定义 2.1.2 令 S 是 n 阶整数集合，$X=S\times[m]$，$\mathcal{G}=\{\{i\}\times[m]:i\in S\}$。令 $\mathcal{F}$ 为 $S\times[m]$ 的子集(称为基区组)族。对于任意 $i,j\in S$，$B\in\mathcal{F}$，定义差集：

$$\Delta_{ij}(B)=\{x-y:(i,x),(j,y)\in B,(i,x)\ne(j,y)\}.$$

若对于任意 $i,j\in S$，

$$\Delta_{ij}(\mathcal{F})=\bigcup_{B\in\mathcal{F}}\Delta_{ij}(B)=\begin{cases}[m], & i\ne j\\ \varnothing, & i=j\end{cases},$$

则一个点集为 $X^*=S\times[0,m-1]$，组集为 $\mathcal{G}^*=\{\{i\}\times[0,m-1]:i\in S\}$，且型为 m^n 的 K-GDD 可以由 $\mathcal{F}$ 生成，其中 $K=\{|B|:B\in\mathcal{F}\}$。对 $\mathcal{F}$ 中每个基区组中元素的第二个分量 $+1(\mathrm{mod}\,m)$ 可得到上述型为 m^n 的 K-GDD 的区组集。称这样的设计 $\mathcal{F}$ 是一个型为 m^n 的半完美可分组设计(semi-perfect group divisible design)，记作型为 m^n 的 K-SPGDD。

定义 2.1.3 令 K 为给定的正整数集，m、n 为正整数。若四元组 $(X,\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 满足：1) X 是有 mn 个点的有限点集，X 中的元素称为点；2) $\mathcal{G}$ 是 X 的一种划分，将 X 划分为 n 个大小为 m 的子集，$\mathcal{G}$ 中的元

素称为组；3) $\mathcal{H}$ 是 X 的另一种划分，将 X 划分为 m 个大小为 n 的子集，$\mathcal{H}$ 中的元素称为洞，使得对任意的 $H\in\mathcal{H}$，$G\in\mathcal{G}$，满足 $|H\cap G|=1$；4) $\mathcal{B}$ 是 X 的子集(称为区组)族，$\mathcal{B}$ 中每个区组的大小均属于 K，使得 X 中取自同组或同洞的点对不出现在 $\mathcal{B}$ 的任意区组中，X 的其他点对恰好出现在 $\mathcal{B}$ 的唯一一个区组中，则称 $(X,\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 是一个型为 m^n 的改进可分组设计(modified group divisible design)，简记为型为 m^n 的 K-MGDD。

文献[12]-[14]中给出了部分 MGDD 的如下存在条件。

引理 2.1.4 [12]-[14]

1) 型为 m^n 的3-MGDD 存在当且仅当 $n,m\ge 3$，$(n-1)(m-1)\equiv 0(\bmod 2)$，且 $mn(n-1)(m-1)\equiv 0(\bmod 6)$；

2) 型为 m^n 的 4-MGDD 存在当且仅当 $n,m\ge 4$，$(n-1)(m-1)\equiv 0(\bmod 3)$，且 $(n,m)\ne(4,6)$；

3) 型为 5^5 的 5-MGDD 存在。

定义 2.1.5 令 S 为有 n 个点的整数集合，$X=S\times[m]$，$\mathcal{G}=\{\{i\}\times[m]:i\in S\}$，$\mathcal{H}=\{S\times\{x\}:x\in[m]\}$。令 $\mathcal{F}$ 为 $S\times[m]$ 的子集(称为基区组)族。对于任意 $i,j\in S$，$B\in\mathcal{F}$，定义：

$$\Delta_{ij}(B)=\{x-y:(i,x),(j,y)\in B,(i,x)\ne(j,y)\}.$$

若对于任意 $i,j\in S$，有：

$$\Delta_{ij}(\mathcal{F})=\bigcup_{B\in\mathcal{F}}\Delta_{ij}(B)=\begin{cases}[m]\setminus\{0\}, & i\ne j\\ \varnothing, & i=j\end{cases},$$

那么一个点集为 $X^*=S\times[0,m-1]$，组集为 $\mathcal{G}^*=\{\{i\}\times[0,m-1]:i\in S\}$，洞为 $\mathcal{H}^*=\{S\times[x]:x\in[m]\}$ 的型为 m^n 的 K-MGDD 可以由 $\mathcal{F}$ 生成。对 $\mathcal{F}$ 的每个基区组中元素的第二个分量 $+1(\bmod m)$ 可得到上述型为 m^n 的 K-MGDD 的区组集。其中，$K=\{|B|:B\in\mathcal{F}\}$。称 $\mathcal{F}$ 为型为 m^n 的半完美改进可分组设计(semi-perfect modified group divisible design)，简记为型为 m^n 的 K-SPMGDD。

若 $\mathcal{F}$ 是 $S\times[m]$ 上型为 m^n 的 K-SPMGDD，那么 $\mathcal{F}\cup(S\times\{0\})$ 是一个型为 m^n 的 $(K\cup\{n\})$-SPGDD。

2.2. 递归构造

基于以上辅助设计，本节介绍了广义完美差族的主要构造方法。

定义 2.2.1 令 H_1 和 H_2 为两个整数集合。对于任意的正整数 r_1 和 r_2，定义：

$$H_1^{r_1}\times H_2^{r_2}=\{(r_1h_1,r_2h_2):(h_1,h_2)\in H_1\times H_2\}.$$

对于某些奇正整数 h_i，当 $H_i=[h_i]$ 时，通常将 $H_i^{r_i}$ 写作 $[h_i]^{r_i}$，$i=1,2$。一个广义 $(N\times M,K,1)$-PDF 可以看作是一个差剩余为 $[1]^{r_1}\times[1]^{r_2}$ 的广义 $(N\times M,K,1)$-PDP，其中 r_1,r_2 为任意正整数。若存在一个差剩余为 $H_1^{r_1}\times H_2^{r_2}$ 的广义 $(N\times M,K,1)$-PDP，则 H_i 中包含 0，并且若 $a\in H_i$，那么 $-a\in H_i,i=1,2$。

构造 2.2.2 [3] 如果存在一个差剩余为 $H_1^{r_1}\times H_2^{r_2}$ 的广义 $(n\times m,K,1)$-PDP 与一个差剩余为 $T_1^{s_1}\times T_2^{s_2}$ 的广义 $(H_1\times H_2,L,1)$-PDP，那么存在一个差剩余为 $T_1^{r_1s_1}\times T_2^{r_2s_2}$ 的广义 $(n\times m,K\cup L,1)$-PDP。并且，若广义 $(n\times m,K,1)$-PDP 为 PDF，则广义 $(n\times m,K\cup L,1)$-PDP 是一个广义 $(n\times m,K\cup L,1)$-PDF。

构造 2.2.3 [15] 如果存在一个差剩余为 H^r 的 $(n,K,1)$-PDP 与一个型为 m^k 的 L-SPGDD，其中每一个 $k\in K$，存在一个差剩余为 $H^r\times[m]$ 的广义 $(n\times m,L,1)$-PDP。若 $(n,K,1)$-PDP 为 PDF，那么 $(n\times m,L,1)$-PDP 的差剩余为 $\{0\}\times[m]$。

构造 2.2.4 [15] 如果存在一个 $(m,K,1)$-PDF 与一个型为 k^h 的 L-MGDD，其中 $k\in K$，那么存在一个型为 m^h 的 L-SPMGDD。

3. $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDFs

本节将探究广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDFs 的存在条件。首先考虑 $m=1$ 的情况，那么 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDFs 可以由 $(n,\{3,5\},1)$-PDFs 得到。显然，一个广义 $(n\times m,3,1)$-PDF 是一个广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDF。

引理 3.1 若存在一个 $(n,\{3,5\},1)$-PDF，则 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 且 $n\notin\{3,5,9,11,15,17,23,29,35\}$。

证 令 $\mathcal{A}$ 为一个 $(n,\{3,5\},1)$-PDF 的区组集，$\mathcal{A}$ 中区组长为 3 和 5 的区组的个数分别为 x 和 y。则有：

$$6x+20y=n-1. \tag{1}$$

由此得 $n\equiv 1(\bmod 2)$。当 $n\in\{3,5,9,11,15,17,23,29,35\}$ 时，(1)式无非负整数解，对应的 $(n,\{3,5\},1)$-PDF 不存在。而对于其余情况，等式(1)均存在非负整数解。综上，结论得证。

引理 3.2 当 $n\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $n\notin\{3,5,9,11,13,15,17,19,21,23,27,29,35,37,41,43\}$ 时，$(n,\{3,5\},1)$-PDF 存在。

证 由引理 2.3，当 $n\equiv 1,7(\bmod 24)$ 时，$(n,3,1)$-PDF 存在，因此 $(n,\{3,5\},1)$-PDF 也存在。再由引理 2.4 知，当 $n\equiv 9,15(\bmod 24)$ 且 $n\geq 33$ 时，$(n,\{3,5^*\},1)$-PDF 存在，因此 $(n,\{3,5\},1)$-PDF 也存在。当 $n\in\{13,19,37,43\}$ 时，由引理 3.1，(1)式都有唯一非负整数解，分别为 $(2,0),(3,0),(6,0),(7,0)$。而由引理 2.3，$(13,3,1)$-PDF、$(19,3,1)$-PDF、$(37,3,1)$-PDF、$(43,3,1)$-PDF 均不存在；当 $n=21,41$ 时，等式(1)有唯一非负整数解，分别为 $(0,1)$ 和 $(0,2)$，但 $(21,5,1)$-PDF、$(41,5,1)$-PDF 均不存在。当 $n=27$ 时，等式(1)有唯一非负整数解 $(1,1)$，但由引理 2.4，$(27,\{3,5^*\},1)$-PDF 不存在。故结论得证。

在下文讨论中，令 $Q=\{3,5,9,11,13,15,17,19,21,23,27,29,35,37,41,43\}$。

引理 3.3 当 $m\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $m\notin Q$ 时，型为 m^3 和型为 m^5 的 $\{3,5\}$-SPGDD 存在。

证 由引理 3.2，$m\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $m\notin Q$ 时，$(m,\{3,5\},1)$-PDF 存在。由引理 2.1.4，$k\in\{3,5\}$ 时，型为 k^3 的 $\{3,5\}$-MGDD 与型为 k^5 的 $\{3,5\}$-MGDD 存在。

令 $\mathcal{A}$ 为 $[m]$ 上给定的 $(m,\{3,5\},1)$-PDF。对于 $\mathcal{A}$ 的每一个基区组 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，令 $\mathcal{B}_A$ 为 $[0,h-1]\times A$ 上的型为 k^h 的 $\{3,5\}$-MGDD，组集为 $\{\{i\}\times A: i\in[0,h-1]\}$，其中 $k,h\in\{3,5\}$。对于每个 $B\in\mathcal{B}_A$，令：

$$\Delta_{ij}(B)=\{x-y:(i,x),(j,y)\in B,i,j\in[0,h-1],i\neq j\}.$$

记 $\mathcal{B}=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_A$，则有：

$$\Delta_{ij}(\mathcal{B})=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\Delta_{ij}(\mathcal{B}_A)=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta_{ij}(B)=[m]\setminus\{0\},$$

其中，$i,j\in[0,h-1]$ 且 $i\neq j$。显然，$\mathcal{B}$ 是 $[0,h-1]\times[m]$ 上的型为 m^h 的 $\{3,5\}$-SPMGDD，那么 $\mathcal{B}\cup\{[0,h-1]\times\{0\}\}$ 是一个型为 m^h 的 $\{3,5\}$-SPGDD，$h\in\{3,5\}$。

引理 3.4 当 $n,m\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $n,m\notin Q$ 时，差剩余为 $\{\{0\}\times[m]\}$ 的广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDP 存在。

证 由引理 3.2，当 $n\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $n\notin Q$ 时，$(n,\{3,5\},1)$-PDF 存在；当 $m\equiv 1,7,9,15(\bmod 24)$ 且 $m\notin Q$ 时，由引理 3.3 可知，型为 m^3 与 m^5 的 $\{3,5\}$-SPGDD 存在。

令 $\mathcal{A}$ 为 $[n]$ 上给定的 $(n,\{3,5\},1)$-PDF。对于 $\mathcal{A}$ 中任意一个基区组 A，可以构造一个 $A\times[m]$ 上的型为 m^k 的 $\{3,5\}$-SPGDD，组集为 $\{\{i\}\times[m]:i\in A\}$，基区组集为 $\mathcal{B}_A$，其中 $k\in\{3,5\}$。记 $\mathcal{B}=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_A$，那么：

$$\Delta\mathcal{B}=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\Delta(\mathcal{B}_A)=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}(\Delta A\times[m])=([n]\setminus\{0\})\times[m]=([n]\times[m])\setminus(\{0\}\times[m]).$$

因此，$\mathcal{B}$ 是一个差剩余为 $\{0\}\times[m]$ 的广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDP。

定理 3.5 当 $n,m\equiv 1,7,9,15(\mathrm{mod}\,24)$ 且 $n,m\notin Q$ 时，广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDF 存在。

证 由引理 3.2，当 $n,m\equiv 1,7,9,15(\mathrm{mod}\,24)$ 且 $n,m\notin Q$ 时，$(m,\{3,5\},1)$-PDF 存在；由引理 3.4，差剩余为 $\{\{0\}\times[m]\}$ 的广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDP 存在。

令 $\mathcal{A}$ 为 $[n]\times[m]$ 上差剩余为 $\{\{0\}\times[m]\}$ 的广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDP，$\mathcal{B}$ 为给定的 $(m,\{3,5\},1)$-PDF。对于 $\mathcal{B}$ 中的每一个基区组 $B=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_i,y_i)\},i\in\{3,5\}$，构造一个集合：

$$C_B=\{(r_1x_1,r_2y_1),(r_1x_2,r_2y_2),\cdots,(r_1x_i,r_2y_i)\}.$$

令 $\mathcal{C}=\{C_B:B\in\mathcal{B}\}$，则：

$$\Delta\mathcal{C}=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta(C_B)=[m]\setminus\{0\},$$

$$\Delta(\mathcal{A}\cup\mathcal{C})=(\Delta\mathcal{A}\cup\Delta\mathcal{C})=\{([n]\times[m])\setminus(\{0\}\times[m])\}\cup([m]\setminus\{0\})=([n]\times[m])\setminus\{(0,0)\}.$$

显然，$\mathcal{A}\cup\mathcal{C}$ 是一个广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDF。

定理 3.6 当 $n,m\equiv 9,15(\mathrm{mod}\,24)$ 且 $n,m\geq 33$ 时，存在一个广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDF。

证 由引理 2.4，当 $n,m\equiv 9,15(\mathrm{mod}\,24)$ 且 $n,m\geq 33$ 时，$(n,\{3,5\},1)$-PDF 与 $(m,\{3,5\},1)$-PDF 存在。由引理 3.3，型为 m^3 的 $\{3,5\}$-SPGDD 与型为 m^5 的 $\{3,5\}$-SPGDD 存在。由引理 3.4，差剩余为 $\{\{0\}\times[m]\}$ 的广义 $(n\times m,\{3,5\},1)$-PDP 存在。再结合构造 2.2.2，结论得证。

推论 3.7 当 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ 时，广义 $(3\times m,\{3,5\},1)$-PDF 不存在。

证 令 $m=2t+1$，t 是整数且 $t\geq 1$。设一个广义 $(3\times m,\{3,5\},1)$-PDF 的基区组集为 $\mathcal{B}$。记 $\mathcal{B}$ 中大小为 3 的基区组集为 $\mathcal{B}_3$，大小为 5 的基区组集为 $\mathcal{B}_5$，且 $|\mathcal{B}_3|=x_3$，$|\mathcal{B}_5|=x_5$。那么有：

$$6x_3+20x_5=6t+2\text{。}\tag{2}$$

对每个 $B\in\mathcal{B}$，令 $\Delta(B_0)=\{b:(0,b)\in\Delta B,b>0\}$。列举基区组的所有可能形式，当 $B\in\mathcal{B}_3$ 时，$|\Delta(B_0)|=1$ 或 3；当 $B\in\mathcal{B}_5$ 时，$|\Delta(B_0)|=4,6$ 或 10。记 $\Delta(\mathcal{B}_0)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta(B_0)$，那么 $|\Delta(\mathcal{B}_0)|=t$。

当且仅当 $x_5=1+3k,\ k\geq 0$ 时，等式(2)有非负整数解 (x_3,x_5)。等式(2)有解时，其形式为 $(x_3,x_5)=(\delta,x_5)$，其中 $\delta=\dfrac{6t+2-20x_5}{6}$。因为 $B\in\mathcal{B}_3$ 时，$|\Delta(B_0)|\geq 1$；$B\in\mathcal{B}_5$ 时，$|\Delta(B_0)|\geq 4$，所以有：

$$|\Delta(\mathcal{B}_0)|\geq\delta\cdot 1+x_5\cdot 4=\frac{6t+2-20x_5}{6}+\frac{24x_5}{6}=t+\frac{1+2x_5}{3}>t,$$

与 $|\Delta(\mathcal{B}_0)|=t$ 矛盾。因此，当 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ 时，广义 $(3\times m,\{3,5\},1)$-PDF 不存在。

推论 3.8 当 $m\in\{5,7,9,11\}$ 时，广义 $(5\times m,\{3,5\},1)$-PDF 不存在。

证 若存在一个广义 $(n\times m,K,1)$-PDP，则 $(nm,K,1)$-PDP 也存在。但由引理 2.3，不存在 $(35,\{3,5\},1)$-PDF，

故而也不存在广义 $\left(5\times 7,\{3,5\},1\right)$-PDF。

假设存在一个广义 $\left(5\times m,\{3,5\},1\right)$-PDF，$m\in\{5,11\}$，基区组集为 $\mathcal{B}$。记 $\mathcal{B}$ 中大小为 3 和 5 的基区组集分别记为 $\mathcal{B}_3$ 和 $\mathcal{B}_5$，且 $|\mathcal{B}_3|=x_3$，$|\mathcal{B}_5|=x_5$。那么 $6x_3+20x_5=5m-1$ 存在非负整数解 (x_3,x_5)。当 $m\in\{5,11\}$ 时，唯一非负整数解分别为 $(4,0),(9,0)$。由引理 2.5 可知，$(5\times 5,3,1)$-PDF 与 $(5\times 11,3,1)$-PDF 不存在，因此当 $m\in\{5,11\}$ 时，广义 $\left(5\times m,\{3,5\},1\right)$-PDF 不存在。

假设当 $m=9$ 时存在一个广义 $\left(5\times 9,\{3,5\},1\right)$-PDF。定义：

$$\Delta\left(B_{i,0}\right)=\left\{(0,y)\in\Delta B: B\in\mathcal{B}_i, y>0\right\},\ i=3,5;$$

$$\Delta\left(B_{i,j}\right)=\left\{(j,y)\in\Delta B: B\in\mathcal{B}_i\right\},\ i=3,5,\ j=1,2;$$

$$\Delta\left(\mathcal{F}_j\right)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\Delta\left(B_{i,j}\right),\ i=3,5,\ j=0,1,2.$$

则有 $\left|\Delta(\mathcal{F})_0\right|=4$，$\left|\Delta(\mathcal{F})_1\right|=\left|\Delta(\mathcal{F}_2)\right|=9$。

通过列举基区组的所有可能形式，有 $\left(\left|\Delta\left(B_{3,0}\right)\right|,\left|\Delta\left(B_{3,1}\right)\right|,\left|\Delta\left(B_{3,2}\right)\right|\right)=(3,0,0)$ 或 $(1,2,0)$ 或 $(1,0,2)$ 或 $(0,2,1)$，$\left(\left|\Delta\left(B_{5,0}\right)\right|,\left|\Delta\left(B_{5,1}\right)\right|,\left|\Delta\left(B_{5,2}\right)\right|\right)=(10,0,0)$ 或 $(6,4,0)$ 或 $(4,6,0)$ 或 $(4,0,6)$ 或 $(3,4,3)$ 或 $(3,6,1)$ 或 $(2,6,2)$ 或 $(2,4,4)$。因为 $\Delta\mathcal{B}=6x_3+20x_5=44$，有唯一整数解 $(x_3,x_5)=(4,1)$。又因为 $\left|\Delta\left(\mathcal{B}_{3,1}\right)\right|$ 与 $\left|\Delta\left(\mathcal{B}_{5,1}\right)\right|$ 均为偶数，与 $\left|\Delta(\mathcal{F}_1)\right|=9$ 矛盾，即整数解 $(4,1)$ 不存在，因此不存在广义 $\left(5\times 9,\{3,5\},1\right)$-PDF。

4. 完美 $\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$ 几何正交码

定义 4.1 设 Z 为整数集合，令 n,m,λ_a,λ_c 为正整数。一个 $\left(n\times m,K,\lambda_a,\lambda_c\right)$-几何正交码 $\mathcal{C}$，是 $[0,n-1]\times[0,m-1]$ 上的组长取自正整数集 K 的子集(称为码字)族，且满足如下条件：

1) (非周期自相关性)：对任意 $B\in\mathcal{C}$ 和每个 $(s,t)\in Z\times Z\setminus\{(0,0)\}$，$\left|B\bigcap\left(B+(s,t)\right)\right|\le\lambda_a$；

2) (非周期互相关性)：对任意 $A,B\in\mathcal{C},A\ne B$ 和每个 $(s,t)\in Z\times Z$，$\left|A\bigcap\left(B+(s,t)\right)\right|\le\lambda_c$，

其中，$B+(s,t)=\left\{(x+s,y+t):(x,y)\in B\right\}$。

定义 4.2 当 $\lambda_a=\lambda_c=\lambda$ 时，一个 $\left(n\times m,K,\lambda_a,\lambda_c\right)$-几何正交码(geometric orthogonal codes)，记作 $\left(n\times m,K,\lambda\right)$-GOC。当 $|K|=1$ 时，称其为常重量的几何正交码；当 $|K|>1$ 时，称其为变重量的几何正交码。

定义 4.3 令 $\mathcal{C}$ 为 $[0,n-1]\times[0,m-1]$ 上 $k\left(k\in K\right)$ 长的子集族。对于任意的 $B\in\mathcal{C}$，令 $\Delta\mathcal{C}=\bigcup_{B\in\mathcal{C}}\Delta B$。若 $\Delta\mathcal{C}$ 包含 $[2n-1]\times[2m-1]$ 中每个元素至多一次，则称 $\mathcal{C}$ 为一个 $\left(n\times m,K,1\right)$-GOC。当 $\Delta\mathcal{C}=[2n-1]\times[2m-1]\setminus\{(0,0)\}$ 时，则称 $\mathcal{C}$ 为一个完美 $\left(n\times m,K,1\right)$-GOC。

Wang 等[3]首次提出了广义 $\left(n\times m,k,1\right)$-PDP 的概念，借助辅助设计完美差矩阵与幂等正交阵列，确定了 $n,m\equiv 17,23\pmod{24}$ 时，广义 $\left(n\times m,3,1\right)$-PDF 的存在性。Su 等[15]借助半完美可分组设计与半完美改进可分组设计，除部分例外值，确定了 $K=\{3,4\},\{3,4,5\}$ 时，广义 $\left(n\times m,K,1\right)$-PDF 存在的充要条件，同时给出了广义完美差族与完美几何正交码之间的等价关系。

引理 4.4 [15]一个完美 $\left(n\times m,K,1\right)$-GOC 等价于一个广义 $\left((2n-1)\times(2m-1),K,1\right)$-PDF。

由定理 3.5~3.6，推论 3.7~3.8 及引理 4.4，可以得到以下结论。

定理 4.5 当 $n,m\equiv 1,4,5,8,13,16,17,20\pmod{24}$ 且 $n,m\notin\{2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,14,18,19,21,22\}$ 时，存在一个完美 $\left(n\times m,\{3,5\},1\right)$-GOC。

定理 4.6 当 $n,m \equiv 5,8,17,20 \pmod{24}$ 且 $n,m \geq 17$ 时，存在一个完美 $(n \times m, \{3,5\}, 1)$-GOC。

定理 4.7 当 $m \equiv 0,1 \pmod{2}$ 时，完美 $(2 \times m, \{3,5\}, 1)$-GOC 不存在。

定理 4.8 当 $m \in \{3,4,5,6\}$ 时，完美 $(3 \times m, \{3,5\}, 1)$-GOC 不存在。

基金项目

国家自然科学基金青年基金项目(11401326)；无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课(2023KFZR03)；内蒙古自治区高等学校科学研究项目(NJZY19021, NJZY22599, NJZY22600)。

参考文献

[1] Doty, D. and Winslow, A. (2017) Design of Geometric Molecular Bonds. *IEEE Transactions on Molecular*, *Biological and Multi-Scale Communications*, **3**, 13-23. https://doi.org/10.1109/tmbmc.2017.2668382

[2] Chee, Y.M., Kiah, H.M., Ling, S. and Wei, H. (2018) Geometric Orthogonal Codes of Size Larger than Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **64**, 2883-2895. https://doi.org/10.1109/tit.2017.2788140

[3] Wang, L., Cai, L., Feng, T., Tian, Z. and Wang, X. (2022) Geometric Orthogonal Codes and Geometrical Difference Packings. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **90**, 1857-1879. https://doi.org/10.1007/s10623-022-01078-4

[4] Bermond, J.C., Kotzig, A. and Turgeon, J. (1978) On a Combinatorial Problem of Antennas in Radio Astronomy. *Fifth Hungarian Colloquium*: *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai* 18, Kesthely, 28 June-3 July 1978, 135-149.

[5] Colbourne, C. and Charles, J. (2007) Handbook of Combinatorial Designs. CRC Publishing.

[6] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H. (1999). Design Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511549533

[7] Ge, G., Miao, Y. and Sun, X. (2010) Perfect Difference Families, Perfect Difference Matrices, and Related Combinatorial Structures. *Journal of Combinatorial Designs*, **18**, 415-449. https://doi.org/10.1002/jcd.20259

[8] Wang, X. and Chang, Y. (2010) Further Results on (*v*, 4, 1)-Perfect Difference Families. *Discrete Mathematics*, **310**, 1995-2006. https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.03.017

[9] Wu, D., Cheng, M. and Chen, Z. (2013) Perfect Difference Families and Related Variable-Weight Optical Orthogonal Codes. *Australasian Journal of Combinatorics*, **55**, 153-166.

[10] Sun, X., Yu, H. and Wu, D. (2021) Constructions and Applications of Perfect Difference Matrices and Perfect Difference Families. arXiv: 2110. 10367.

[11] Chen, Z. (2008) The Existence of Balanced Difference Families and Perfect Difference Families. Master's Thesis, Guangxi Normal University.

[12] Cao, H., Wang, L. and Wei, R. (2009) The Existence of HGDDs with Block Size Four and Its Application to Double Frames. *Discrete Mathematics*, **309**, 945-949. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.024

[13] Feng, T., Wang, X. and Chang, Y. (2013) Semi-Cyclic Holey Group Divisible Designs with Block Size Three. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **74**, 301-324. https://doi.org/10.1007/s10623-013-9859-7

[14] Abel, R.J.R. and Assaf, A.M. (2008) Modified Group Divisible Designs with Block Size 5 and Even Index. *Discrete Mathematics*, **308**, 3335-3351. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.06.039

[15] Su, X., Wang, L. and Tian, Z. (2022) Generalized Perfect Difference Families and Their Application to Variable-Weight Geometric Orthogonal Codes. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 113013. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113013