

一类有向斐波那契相似立方体的度相关计数性质

陈芳娣¹, 张诗晗^{1*}, 赵娟娟²

¹西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

²陕西师范大学平凉实验中学, 甘肃 平凉

收稿日期: 2024年6月27日; 录用日期: 2024年7月18日; 发布日期: 2024年7月30日

摘要

匹配型分配格将偏序集和平面基本二部图紧密地联系起来。本文根据一类匹配型分配格的Hasse图, 得到了一类有向斐波那契相似立方体, 并研究了其度序列多项式、出度多项式和出入度多项式。

关键词

匹配型分配格, 有向斐波那契相似立方体, 出度多项式, 出入度多项式

The Enumerative Properties Related to Degree of a Class of Directed Fibonacci-Like Cubes

Fangdi Chen¹, Shihan Zhang^{1*}, Xuxu Zhao²

¹College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

²Shaanxi Normal University Pingliang Experimental Middle School, Pingliang Gansu

Received: Jun. 27th, 2024; accepted: Jul. 18th, 2024; published: Jul. 30th, 2024

Abstract

The matchable distributive lattices closely connect the poset with the planar elementary bipartite graphs. In this paper, according to the Hasse diagrams of a class of matchable distributive lattices, a class of directed Fibonacci-like cubes is obtained and their degree sequence polynomials, out-degree polynomials and in-out degree polynomials are studied.

*通讯作者。

Keywords

Matchable Distributive Lattice, Directed Fibonacci-Like Cube, Out-Degree Polynomial, In-Out Degree Polynomial

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 研究背景

1993年, Hsu 定义了 Fibonacci 立方体 Γ_n [1] 作为新的内联网拓扑结构模型, 斐波那契立方体可以作为一个等距离子图嵌入到布尔立方体(超立方体)中, 它还包含一些其他特殊结构, 如 Lucas 立方体作为它的子图, 因此斐波那契立方体可以在容错计算中得到应用。Fibonacci 立方体及其相关立方体的很多性质被大量的学者研究[2]-[8]。特殊地, Fibonacci 立方体和 Lucas 立方体度序列多项式[9]也得到了研究。Zhang 等[10] [11]在平面基本二部图的完美匹配集合上建立了一个有限分配格——匹配型分配格的概念。斐波那契立方体是平面六 a 角系统 fibonaccenes 的共振图, 所以以有向斐波那契立方体作为 Hasse 图的分配格是匹配型分配格。Wang 等[12]研究了有限分配格的凸扩张, 给出 Fibonacci 立方体的一种更简单的画法。继而 Wang 等[13]提出了匹配型 Lucas 立方体的结构并且用一种统一的方式得到其度序列多项式。周玉玉等[14]提出了一类新的斐波那契相似立方体——匹配型分配格并研究了该类立方体的一些特殊性质。本文对周玉玉等[14]提出的斐波那契相似立方体给出了一个定向, 并讨论了其与出度、入度相关的多项式, 如度序列多项式、出度多项式及出入度多项式。

2. 预备知识

如果一个集合 P 有二元序关系 \leq 满足自反性、反对称性和传递性, 那称 P 为偏序集。如果 $x < y$ 且 $x \leq z < y$ 必有 $x = z$, 则称偏序集 P 中 y 覆盖 x 。偏序关系与其覆盖关系相互唯一确定, 偏序集的覆盖关系可以表示为以 P 中元素为顶点的有向图(通常画为 Hasse 图): 当且仅当 y 覆盖 x 时, (y, x) 是一条弧。设 Q 是偏序集 P 的一个子集, 若 $y \in Q$ 且 $y \leq z$, 则 $z \in Q$, 则称 Q 为 P 的一个滤子, $\mathcal{F}(P)$ 表示一个偏序集 P 的所有滤子。 P 的所有滤子 $\mathcal{F}(P)$ 按照反包含关系($Y' \leq Y$ 当且仅当 $Y' \supseteq Y$)构成的偏序集是个分配格, 称为滤子格, 而且 $\mathcal{F}(P) := (\mathcal{F}(P), \supseteq)$ 是一个有限分配格。在有限分配格 $\mathcal{F}(P)$ 中, $\hat{1}$ (或 $\hat{0}$) 表示最大(或最小)元, 从 $\hat{1}$ 到 $\hat{0}$ 按元素覆盖关系给分配格 $\mathcal{F}(P)$ 一个定向, 这样最大元 $\hat{1}$ 只有出度, 最大元 $\hat{1}$ 和最小元 $\hat{0}$ 之间的其他元素首先有入度然后有出度, 而最小元 $\hat{0}$ 只有入度, 这样的定向也是 Z -变换图顶点间的定向, 就可以定义并研究分配格的出度多项式及其出入度多项式。

引理 2.1 [12] 滤子格 $\mathcal{F}(P)$ 可以由分配格的凸扩张“田”得到, 对任意的 $x \in P$, 有:

$$\mathcal{F}(P) \cong \mathcal{F}(P-x) \text{ 田 } \mathcal{F}(P*x)$$

其中, $P-x$ 和 $P*x$ 分别表示 $P \setminus \{x\}$ 和 $P \setminus \{y \in P \mid y \leq x \text{ 或 } x \leq y\}$, 均为 P 的子偏序集。

定义 2.2 [14] “L-si-Fibonacci”是在 Fibonacci 的左端第二个六角形下面连接了一个额外六角形的 Cata 型六角系统, 如下图 1 所示。本文中, 我们将 $n(\geq 3)$ 个六角形的 L-si-Fibonacci 记为 Y_n 。

定义 2.3 [14] 设 $n \geq 3$, 称在 Y_n 的内对偶图上的如图 2 所示的偏序集为 ψ_n , 它是由“栅栏”(即“Zigzag”偏序)添加一个极大元得到的。

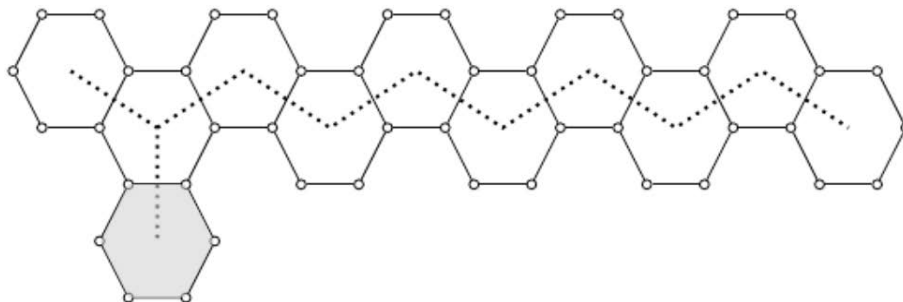


Figure 1. L-si-Fibonacci and its inner dual graph

图 1. L-si-Fibonacci 及其内对偶图

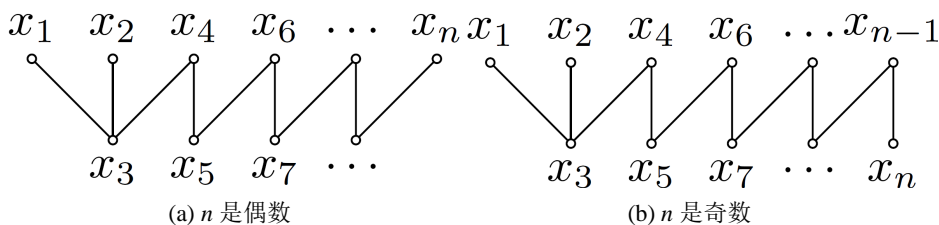


Figure 2. Partial order ψ_n

图 2. 偏序 ψ_n

定理 2.4 [11] 设 $n \geq 3$, $M(Y_n) \cong \mathcal{F}(\psi_n)$ 是 L-si-Fibonacci Y_n 的匹配型分配格, 其 Hasse 图同构于 Y_n 的有向 Z-变换图。

以 Ψ_3 为例, 给出具体的 Ψ_3 的构造过程。 Ψ_3 对应的偏序如下图 3 所示。

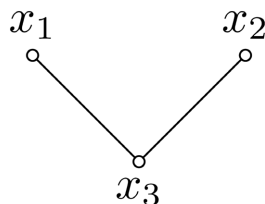


Figure 3. Partially ordered set Ψ_3 corresponding to Ψ_3

图 3. Ψ_3 对应的偏序集 ψ_3

其中, ψ_3 的滤子有 $\{\emptyset\}$ 、 $\{x_1\}$ 、 $\{x_2\}$ 、 $\{x_1, x_2\}$ 、 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 。然后按滤子的反包含关系构成一个滤子格, 是匹配型分配格, 覆盖关系为反包含关系, 集合之间差一个元素。根据这样的构造就能得到 Ψ_3 , 如图 4 所示。

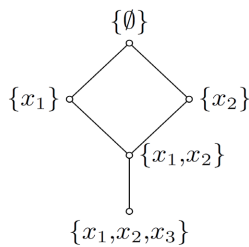


Figure 4. Ψ_3

图 4. Ψ_3

定理 2.5 [14] 当 $n \geq 5$ 时, 有:

$$\Psi_n \cong \Psi_{n-1} \boxplus \Psi_{n-2} \cong (\Psi_{n-2} \boxplus \Psi_{n-3}) \boxplus \Psi_{n-2}.$$

根据定理 2.5 就可以得到如图 5 所示的 Ψ_n 的递归结构图。

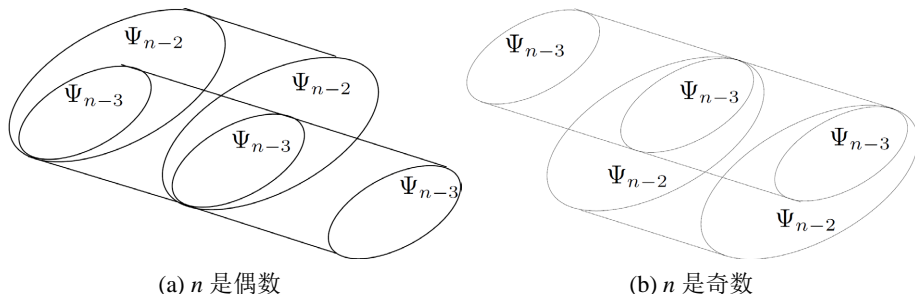


Figure 5. Recursive structure diagram of Ψ_n
图 5. Ψ_n 的递归结构图

前七个有向斐波那契相似立方体 $\Psi'_0, \Psi'_1, \Psi'_2, \Psi'_3, \Psi'_4, \Psi'_5, \Psi'_6$, 如图 6 所示, 其中 Ψ'_0 表示只有一个顶点的平凡格或图。

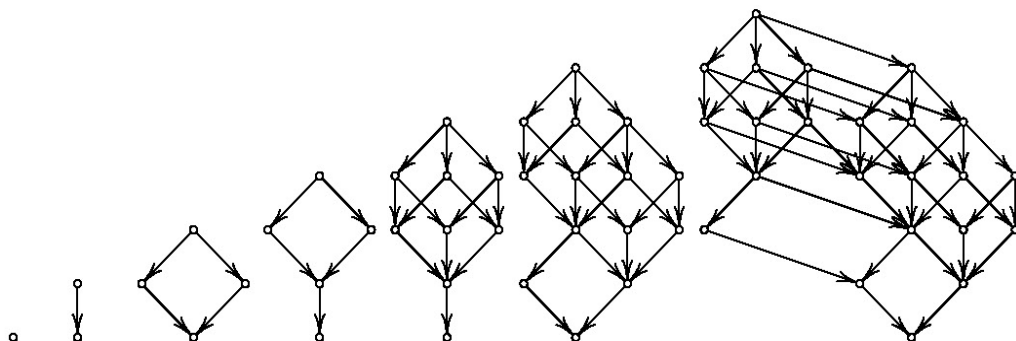


Figure 6. Directed Fibonacci-like cubes Ψ'_0, \dots, Ψ'_6
图 6. 有向斐波那契相似立方体 Ψ'_0, \dots, Ψ'_6

在画上述有向立方体的过程中, 若 y 覆盖 x , 则将 y 放在 x 上方, 当忽略掉所有弧的方向就得到偏序集的 Hasse 图。由此前七个斐波那契相似立方体, 也就是其 Hasse 图, $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6$, 如图 7 所示。

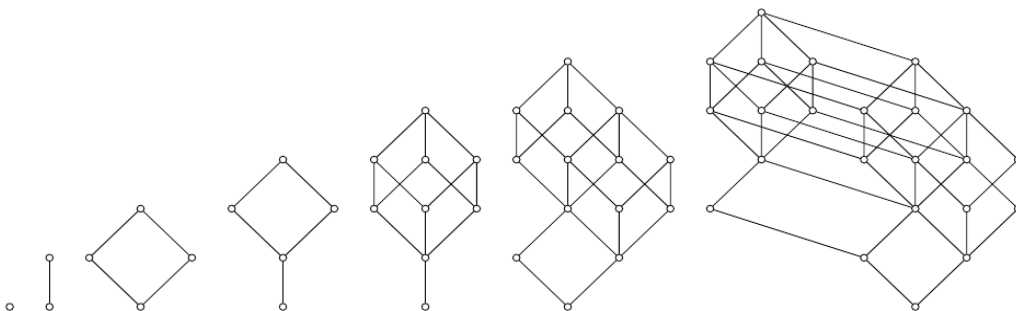


Figure 7. Fibonacci-like cubes Ψ_0, \dots, Ψ_6
图 7. 斐波那契相似立方体 Ψ_0, \dots, Ψ_6

3. 度相关计数性质

1) 度序列多项式

设 $d_{n,k} := d_k(\Psi_n)$ 表示 Ψ_n 中 degree 为 k 的顶点数目, 也可表示为 $d_{n,k} = \left| \left\{ v \in V(\Psi_n) \mid \deg_{\Psi_n}(v) = k \right\} \right|$, 则称如下计数多项式

$$D_n(x) = \sum_{k \geq 0} d_{n,k} x^k$$

为 Ψ_n 的度序列多项式。部分 $D_n(x)$ 如下:

$$D_0(x) = 1,$$

$$D_1(x) = 2x,$$

$$D_2(x) = 4x^2,$$

$$D_3(x) = x + 3x^2 + x^3,$$

$$D_4(x) = x + 7x^3 + x^4,$$

$$D_5(x) = 2x^2 + 7x^3 + 4x^4 + x^5,$$

$$D_6(x) = 2x^2 + 4x^3 + 12x^4 + 4x^5 + x^6.$$

通过在 Ψ_n 的递归结构中虚添一个 Ψ_{n-3} 及部分边, 如图 8 所示。可得 $d_{n,k}$ 的递归结构。

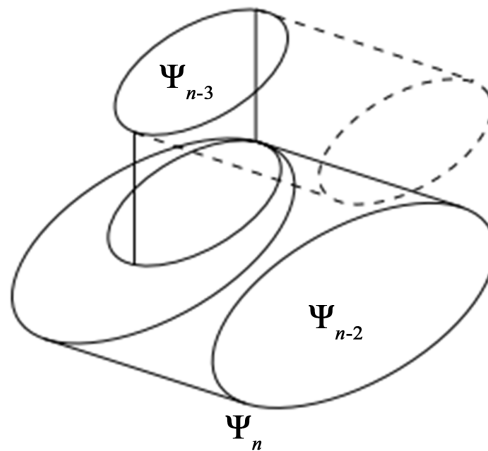


Figure 8. Modified recursive relationship diagram of Ψ_n

图 8. 修改过的 Ψ_n 的递归关系图

命题 3.1 当 $n \geq 5$ 时,

$$d_{n,k} = d_{n-1,k-1} + d_{n-2,k-1} - d_{n-3,k-2} + d_{n-3,k-1}.$$

由命题 3.1 可得如下推论。

命题 3.2 当 $n \geq 5$ 时,

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) + xD_{n-2}(x) + (x - x^2)D_{n-3}(x).$$

因此, 可得 $D_n(x)$ 的生成函数。

定理 3.3 $D_n(x)$ 的生成函数为:

$$\sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n = \frac{1 + xy + (-x + 2x^2)y^2 + (2x^2 - 3x^3)y^3 + (x - 3x^2 + 2x^3)y^4}{1 - xy - xy^2 - (x - x^2)y^3}.$$

证明 由命题 3.2 得:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n &= \sum_{n \geq 5} D_n(x) y^n + \sum_{n=0}^4 D_n(x) y^n \\ &= \sum_{n \geq 5} (xD_{n-1}(x) + xD_{n-2}(x) + (x - x^2)D_{n-3}(x)) y^n + \sum_{n=0}^4 D_n(x) y^n \\ &= x \sum_{n \geq 5} D_{n-1}(x) y^n + x \sum_{n \geq 5} D_{n-2} y^n + x \sum_{n \geq 5} D_{n-3}(x) y^n - x^2 \sum_{n \geq 5} D_{n-3}(x) y^n + \sum_{n=0}^4 D_n(x) y^n \\ &= xy \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n - xy(D_0(x) + D_1(x)y + D_2(x)y^2 + D_3(x)y^3) + xy^2 \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n \\ &\quad - xy^2(D_0(x) + D_1(x)y + D_2(x)y^2) + xy^3 \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n - xy^3(D_0(x) + D_1(x)y) \\ &\quad - x^2 y^3 \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n + x^2 y^3(D_0(x) + D_1(x)y) + D_0(x) + D_1(x)y + D_2(x)y^2 \\ &\quad + D_3(x)y^3 + D_4(x)y^4 \\ &= (xy + xy^2 + xy^3 - x^2 y^3) \sum_{n \geq 0} D_n(x) y^n + 1 + xy + 2x^2 y^3 - 3x^3 y^3 - 3x^2 y^4 \\ &\quad + 2x^3 y^4 - xy^2 + 2x^2 y^2 + xy^4. \end{aligned}$$

推论 3.4 当 $n \geq 5$ 时, Ψ_n 中度为 k 的顶点个数为:

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= \sum_{j=0}^k \binom{j}{n-k-j} \left(2 \binom{n-2j-2}{k-j-2} + \binom{n-2j}{k-j} + \binom{n-2j-1}{k-j-1} - 3 \binom{n-2j-3}{k-j-3} \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \binom{j}{n-k-j-1} \left(2 \binom{n-2j-3}{k-j-2} + 2 \binom{n-2j-4}{k-j-3} - \binom{n-2j-2}{k-j-1} \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \left(\binom{j}{n-j-k-3} \binom{n-2j-4}{k-j-1} - 3 \binom{j}{n-k-j-2} \binom{n-2j-4}{k-j-2} \right). \end{aligned}$$

证明 利用二项式展开,

$$\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{j \geq n} \binom{j}{n} x^j.$$

我们先考虑部分展开,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(1-xy)(1-xy^2) - xy^3} \\ f(x, y) &= \frac{1}{(1-xy)(1-xy^2) - xy^3} \\ &= \frac{(1-xy)^{-1} (1-xy^2)^{-1}}{1 - xy^3 (1-xy)^{-1} (1-xy^2)^{-1}} \\ &= \sum_{t \geq 0} x^t y^{3t} (1-xy)^{-t-1} (1-xy^2)^{-t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t \geq 0} \frac{xy^t}{(1-xy)^{t+1}} \frac{(xy^2)^t}{(1-xy^2)^{t+1}} x^{-t} \\
&= \sum_{t \geq 0} \sum_{i \geq t} \binom{i}{t} (xy)^i \sum_{j \geq t} \binom{j}{t} (xy^2)^j x^{-t} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n-2j}{k-j} \binom{j}{n-k-j} x^k y^n
\end{aligned}$$

所以(其中符号 $[x^k]f(x, y)$ 表示 $f(x, y)$ 中 x^k 的系数)

$$[x^k][y^n]f(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{n-2j}{k-j} \binom{j}{n-k-j}.$$

记

$$\begin{aligned}
&\frac{1+xy+2x^2y^3-3x^3y^3-3x^2y^4+2x^3y^4-xy^2+2x^2y^2+xy^4}{(1-xy)(1-xy^2)-xy^3} \\
&= f(x, y) + xyf(x, y) + 2x^2y^3f(x, y) - 3x^3y^3f(x, y) - 3x^2y^4f(x, y) \\
&\quad + 2x^3y^4f(x, y) - xy^2f(x, y) + 2x^2y^2f(x, y) + xy^4f(x, y)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&[x^k][y^n] \frac{1+xy+2x^2y^3-3x^3y^3-3x^2y^4+2x^3y^4-xy^2+2x^2y^2+xy^4}{(1-xy)(1-xy^2)-xy^3} \\
&= [x^k][y^n]f(x, y) + [x^{k-1}][y^{n-1}]f(x, y) + 2[x^{k-2}][y^{n-3}]f(x, y) \\
&\quad - 3[x^{k-3}][y^{n-3}]f(x, y) - 3[x^{k-2}][y^{n-4}]f(x, y) + 2[x^{k-3}][y^{n-4}]f(x, y) \\
&\quad - [x^{k-1}][y^{n-2}]f(x, y) + 2[x^{k-2}][y^{n-2}]f(x, y) + [x^{k-1}][y^{n-4}]f(x, y) \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{n-2j}{k-j} \binom{j}{n-k-j} + \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-1}{k-j-1} \binom{j}{n-k-j} \\
&\quad + 2 \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-3}{k-j-2} \binom{j}{n-k-j-1} - 3 \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-3}{k-j-3} \binom{j}{n-k-j} \\
&\quad - 3 \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-4}{k-j-2} \binom{j}{n-k-j-2} + 2 \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-4}{k-j-3} \binom{j}{n-k-j-1} \\
&\quad - \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-2}{k-j-1} \binom{j}{n-k-j-1} + 2 \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-2}{k-j-2} \binom{j}{n-k-j} \\
&\quad + \sum_{j=0}^k \binom{n-2j-4}{k-j-1} \binom{j}{n-k-j-3}.
\end{aligned}$$

注释 1 当 $x=1$ 时, 求解命题 3.2 中 $D_n(x)$ 的递推关系, 可得 $\Psi_n (n \geq 2)$ 的顶点数为 $f(n)+3f(n-1)$, 其中 $f(n)$ 是第 n 个斐波那契数。

2) 入度和出度多项式

设 Ψ_n 的入度多项式为 $D_n^-(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_{n,k}^- x^k$, 其中 $d_{n,k}^-$ 表示 Ψ_n' 中入度为 k 的顶点个数。部分入度多项式

$D_n^-(x)$ 如下所示:

$$\begin{aligned}
 D_0^-(x) &= 1, \\
 D_1^-(x) &= 1, \\
 D_2^-(x) &= 1 + 2x + x^2, \\
 D_3^-(x) &= 1 + 3x + x^2, \\
 D_4^-(x) &= 1 + 4x + 3x^2 + x^3, \\
 D_5^-(x) &= 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3, \\
 D_6^-(x) &= 1 + 6x + 10x^2 + 5x^3 + x^4, \\
 D_7^-(x) &= 1 + 7x + 15x^2 + 11x^3 + 3x^4, \\
 D_8^-(x) &= 1 + 8x + 21x^2 + 21x^3 + 8x^4 + x^5, \\
 D_9^-(x) &= 1 + 9x + 28x^2 + 36x^3 + 19x^4 + 4x^5.
 \end{aligned}$$

引理 3.5 [12] 设 L 是一个有限分配格。如果 K 是 L 的一个割，则：

$$d_k^-(L \text{ 田 } K) = d_k^-(L) + d_{k-1}^-(K).$$

由引理 3.5 我们有如下命题。

命题 3.6 当 $n \geq 0$ 时， $d_{n,0}^- = 1$ ；当 $n \geq 3$ ， $k \geq 1$ 时，

$$d_{n,k}^- = d_{n-1,k}^- + d_{n-2,k-1}^-.$$

命题 3.7 当 $n \geq 3$ 时，

$$D_n^-(x) = D_{n-1}^-(x) + xD_{n-2}^-(x).$$

定理 3.8 $D_n^-(x)$ 的生成函数为：

$$\sum_{n \geq 0} D_n^-(x) y^n = \frac{1 + (x + x^2)y^2}{1 - y - xy^2}.$$

证明

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} D_n^-(x) y^n &= \sum_{n=3}^{\infty} D_n^-(x) y^n + \sum_{n=0}^2 D_n^-(x) y^n \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} (D_{n-1}^-(x) + xD_{n-2}^-(x)) y^n + \sum_{n=0}^2 D_n^-(x) y^n \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} D_{n-1}^-(x) y^n + x \sum_{n=3}^{\infty} D_{n-2}^-(x) y^n + \sum_{n=0}^2 D_n^-(x) y^n \\
 &= y \sum_{n=3}^{\infty} D_{n-1}^-(x) y^{n-1} + xy^2 \sum_{n=3}^{\infty} D_{n-2}^-(x) y^{n-2} + \sum_{n=0}^2 D_n^-(x) y^n \\
 &= y \sum_{n=0}^{\infty} D_n^-(x) y^n - y(D_0^-(x) + D_1^-(x)y) + xy^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n^-(x) y^n \\
 &\quad - xy^2 D_0^-(x) + D_0^-(x) + D_1^-(x)y + D_2^-(x)y^2 \\
 &= (y + xy^2) \sum_{n=0}^{\infty} D_n^-(x) y^n + 1 + xy^2 + x^2y^2.
 \end{aligned}$$

推论 3.9 当 $n \geq 0$ 时，

$$D_n^-(x) = \left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k-1}{k-1} + \sum_{k=2}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-2} \right) x^k;$$

利用二项式展开有如下证明。

证明

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} D_n^-(x) y^n &= \frac{1 + xy^2 + x^2 y^2}{1 - y - xy^2} \\
 &= (1 + xy^2 + x^2 y^2) \sum_{j \geq 0} (y + xy^2)^j \\
 &= \sum_{j \geq 0} (y + xy^2)^j + xy^2 \sum_{j \geq 0} (y + xy^2)^j + x^2 y^2 \sum_{j \geq 0} (y + xy^2)^j \\
 &= \sum_{j \geq 0} y^j (1 + xy)^j + \sum_{j \geq 0} xy^{j+2} (1 + xy)^j + \sum_{j \geq 0} x^2 y^{j+2} (1 + xy)^j \\
 &= \sum_{j \geq 0} \sum_{n-j=0}^j \binom{j}{n-j} x^{n-j} y^n + \sum_{j \geq 0} \sum_{n-j-2=0}^j \binom{j}{n-j-2} x^{n-j-1} y^n + \sum_{j \geq 0} \sum_{n-j-2=0}^j \binom{j}{n-j-2} x^{n-j} y^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=\frac{n}{2}}^n \binom{j}{n-j} x^{n-j} y^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=\frac{n}{2}-1}^{n-2} \binom{j}{n-j-2} x^{n-j-1} y^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=\frac{n}{2}-1}^{n-2} \binom{j}{n-j-2} x^{n-j} y^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k-1}{k-1} + \sum_{k=2}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-2} \right) x^k y^n.
 \end{aligned}$$

且易得

$$d_{n,k}^- = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k-2}.$$

注释 2 因为在有限分配格 $\mathcal{F}(P)$ 中, $d_{n,k}^+$ 和 $d_{n,k}^-$ 都等于 P 中只有 k 个元素的极大反链的个数[12], 也就是说, $d_{n,k}^+ = d_{n,k}^-$, 所以出度多项式与入度多项式是相同的。

3) 出入度多项式

称如下计数多项式

$$P(\Psi_n) := P(\Psi_n; x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} x^i y^j$$

为 Ψ_n 的出入度多项式, 其中 p_{ij} 表示 Ψ_n' 中出度为 i 、入度为 j 的顶点个数。部分出入度多项式 $P(\Psi_n)$ 如下所示:

$$\begin{aligned}
 P(\Psi_0) &= 1, \\
 P(\Psi_1) &= x + y, \\
 P(\Psi_2) &= x^2 + 2xy + y^2, \\
 P(\Psi_3) &= x^2 + y + 2xy + xy^2, \\
 P(\Psi_4) &= x^3 + y + 3x^2y + 3xy^2 + xy^3, \\
 P(\Psi_5) &= x^3 + xy + 3x^2y + x^3y + y^2 + 3xy^2 + 2x^2y^2 + xy^3 + x^2y^3, \\
 P(\Psi_6) &= x^4 + xy + x^2y + 4x^3y + y^2 + 3xy^2 + 5x^2y^2 + x^3y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^3 + x^2y^4.
 \end{aligned} \tag{1}$$

类似于图 6 的方式, 在图 4 Ψ_n 的递归图中虚补一个 Ψ_{n-4} , 之后用容斥原理就可得到如下结论。

命题 3.10

当 $n \geq 6$ 时,

$$P(\Psi_n) = \begin{cases} x(y+1)P(\Psi_{n-2}) + yP(\Psi_{n-3}) + xy(1-x)P(\Psi_{n-4}), & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ y(x+1)P(\Psi_{n-2}) + xP(\Psi_{n-3}) + xy(1-y)P(\Psi_{n-4}), & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

令 $A_m(x, y) = P(\Psi_{2m}; x, y)$, $B_m(x, y) = P(\Psi_{2m+1}; x, y)$, 则

$$\begin{cases} A_m(x, y) = x(y+1)A_{m-1}(x, y) + yB_{m-2}(x, y) + xy(1-x)A_{m-2}(x, y), (m \geq 3), \\ B_m(x, y) = y(x+1)B_{m-1}(x, y) + xA_{m-1}(x, y) + xy(1-y)B_{m-2}(x, y), (m \geq 3). \end{cases}$$

命题 3.11 当 $m \geq 5$ 时,

$$\begin{cases} A_m = (2xy + x + y)A_{m-1} - xy(xy + 2x + 2y - 1)A_{m-2} + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)A_{m-3} \\ \quad - x^2y^2(1-x)(1-y)A_{m-4} \\ B_m = (2xy + x + y)B_{m-1} - xy(xy + 2x + 2y - 1)B_{m-2} + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)B_{m-3} \\ \quad - x^2y^2(1-x)(1-y)B_{m-4}. \end{cases}$$

证明 由命题 3.10, 当 $m \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned} xA_{m-1} &= B_m - (x+1)yB_{m-1} - xy(1-y)B_{m-2} \\ &= \frac{A_{m+2} - x(y+1)A_{m+1} - x(1-x)yA_m}{y} - \frac{(x+1)y(A_{m+1} - x(y+1)A_m - x(1-x)yA_{m-1})}{y} \\ &\quad - \frac{xy(1-y)(A_m - x(y+1)A_{m-1} - x(1-x)yA_{m-2})}{y} \\ &= \frac{A_{m+2} - (2xy + x + y)A_{m+1} + xy(xy + 2x + 2y - 1)A_m}{y} \\ &\quad + \frac{xy(x + y - x^2y - xy^2)A_{m-1} + x^2y^2(1-x)(1-y)A_{m-2}}{y} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} A_{m+2} &= (2xy + x + y)A_{m+1} - xy(xy + 2x + 2y - 1)A_m + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)A_{m-1} \\ &\quad - x^2y^2(1-x)(1-y)A_{m-2}. \end{aligned}$$

所以, 当 $m \geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} A_m &= (2xy + x + y)A_{m-1} - xy(xy + 2x + 2y - 1)A_{m-2} + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)A_{m-3} \\ &\quad - x^2y^2(1-x)(1-y)A_{m-4}. \end{aligned}$$

类似地, 可以得到 B_m 的递推关系。

由命题 3.11, 可以得到 $P(\Psi_n)$ 的递推公式。

定理 3.12 当 $n \geq 10$ 时,

$$\begin{aligned} P(\Psi_n) &= (2xy + x + y)P(\Psi_{n-2}) - xy(xy + 2x + 2y - 1)P(\Psi_{n-4}) \\ &\quad + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)P(\Psi_{n-6}) - x^2y^2(1-x)(1-y)P(\Psi_{n-8}). \end{aligned}$$

根据定理 3.12 可以得到 $P(\Psi_n)$ 的生成函数。

定理 3.13 $P(\Psi_n)$ 的生成函数为:

$$\sum_{n \geq 0} P(\Psi_n)t^n = \frac{N(x, y, t)}{D(x, y, t)},$$

其中,

$$\begin{aligned} N(x, y, t) &= 1 + (x + y)t - (x^2 - x + xy - y + y^2)t^2 - (x^2y - y + y^2)t^3 \\ &\quad - (xy(1 - x + x^2 - y + 2xy) + y(y^2 - 1))t^4 + xy(-x + x^2 - y + xy + y^2)t^5 \\ &\quad + xy(x - 1)(y - 1)(x + 2y - 1)t^6 - xy(x - 1)(y - 1)(x + y - 1)t^7 \\ D(x, y, t) &= 1 - (x + y + xy)t^2 - xy(1 - x - y)t^4 - xy(x - 1)(y - 1)t^6 \end{aligned}$$

证明 由命题 3.10 和 1), 我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(\Psi_n)t^n &= \sum_{n \geq 10} P(\Psi_n)t^n + \sum_{n=0}^9 P(\Psi_n)t^n \\ &= \sum_{n \geq 10} ((2xy + x + y)P(\Psi_{n-2}) - xy(xy + 2x + 2y - 1)P(\Psi_{n-4}) \\ &\quad + xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)P(\Psi_{n-6}) - x^2y^2(1 - x)(1 - y)P(\Psi_{n-8}))t^n + \sum_{n=0}^9 P(\Gamma_n)t^n \\ &= ((2xy + x + y)t^2 - xy(xy + 2x + 2y - 1)t^4 + xy(xy^2 + x^2y - x - y + 1)t^6 \\ &\quad - x^2y^2(1 - x)(1 - y)t^8) \sum_{n \geq 0} P(\Psi_n)t^n - (2xy + x + y)t^2 \sum_{n=0}^7 P(\Psi_n)t^n \\ &\quad + xy(xy + 2x + 2y - 1)t^4 \sum_{n=0}^5 P(\Psi_n)t^n - xy(x^2y + xy^2 - x - y + 1)t^6 \sum_{n=0}^3 P(\Psi_n)t^n \\ &\quad + x^2y^2(1 - x)(1 - y)t^8 \sum_{n=0}^1 P(\Psi_n)t^n + \sum_{n=0}^9 P(\Psi_n)t^n \\ &= ((2xy + x + y)t^2 - xy(xy + 2x + 2y - 1)t^4 + xy(xy^2 + x^2y - x - y + 1)t^6 \\ &\quad - x^2y^2(1 - x)(1 - y)t^8) \sum_{n \geq 0} P(\Psi_n)t^n + 1 + (x + y)t + (x^2 - x - y + y^2)t^2 \\ &\quad + (y - 2x^2y - y^2 - xy^2)t^3 + (y - y^3 + xy(-1 + 2x - 2x^2 + 2y - 3xy - y^2))t^4 \\ &\quad + xy(-x + x^2 - 2y + xy + x^2y + 2y^2)t^5 \\ &\quad + xy(-1 + 2x - x^2 + 2y - 3xy + x^3y - 2y^2 + xy^2 + 2x^2y^2 + y^3)t^6 \\ &\quad + xy(1 - 2x + x^2 - 2y + 3xy - x^3y + y^2 - x^2y^2 - xy^3)t^7 \\ &\quad + x^2y^2(1 - 2x + x^2 - 3y + 4xy - x^2y + 2y^2 - 2xy^2)t^8 \\ &\quad + x^2y^2(-1 + 2x - x^2 + 2y - 3xy + x^2y - y^2 + xy^2)t^9 \end{aligned}$$

由定理 3.13 中生成函数的分母 $D(x, y, t) = 1 - (x + y + xy)t^2 - xy(1 - x - y)t^4 - xy(x - 1)(y - 1)t^6$, 我们可以得到 $P(\Psi_n)$ 的另外一个递推关系。

推论 3.14 当 $n \geq 6$,

$$P(\Psi_n) = (x + y + xy)P(\Psi_{n-2}) + xy(1 - x - y)P(\Psi_{n-4}) + xy(x - 1)(y - 1)P(\Psi_{n-6}).$$

注释 3 出入度多项式是综合出度和入度的一个二元多项式, 度序列多项式、出度多项式和入度多项式是其特殊形式。分析出入度多项式 $P(\Psi_n; x, y) = \sum_{i,j} p_{ij}x^i y^j$, 当 $y = x$ 时, 此时 p_{ij} 表示 Ψ_n 中度为 $i + j$ 的顶点个数; 当 $x = 1$ 时, 此时 y^j 前面的系数 $\sum_{i \geq 0} p_{ij}$ 表示 Ψ_n 中出度为 j 的顶点个数; 当 $y = 1$ 时, 此时 x^i 前面的系数 $\sum_{j \geq 0} p_{ij}$ 表示 Ψ_n 中入度为 i 的顶点个数。由此可知, $P(\Psi_n; x, 1)$ 、 $P(\Psi_n; 1, x)$ 、 $P(\Psi_n; x, x)$ 和 $P(\Psi_n; 1, 1)$

分别是 Ψ_n 的出度多项式、入度多项式、度多项式和顶点个数。这就给了我们一种得到定理 3.3 和定理 3.8 的新方式，同时也检验了前后所得结论的一致性。

斐波那契立方体的研究具有重要的应用价值，尤其在实现常见的系统通信源语方面。我们新建立的斐波那契相似立方体在性质和结构方面都与斐波那契立方体有很强大的关联，下一步期待能将我们得到的立方体，尤其是有向立方体的相关性质与容错计算、系统通信源语等方面联系起来。

基金项目

国家自然科学基金(12161081)。

参考文献

- [1] Hsu, W.J. (1993) Fibonacci Cubes-A New Interconnection Topology. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **4**, 3-12. <https://doi.org/10.1109/71.205649>
- [2] Munarini, E., Cippo, C.P. and Zagaglia Salvi, N. (2001) On the Lucas Cubes. *The Fibonacci Quarterly*, **39**, 12-21.
- [3] Klavžar, S. and Žigert Pleteršek, P. (2005) Fibonacci Cubes Are the Resonance Graphs of Fibonaccenes. *The Fibonacci Quarterly*, **43**, 269-276.
- [4] Klavžar, S. and Mollard, M. (2011) Cube Polynomial of Fibonacci and Lucas Cubes. *Acta Applicandae Mathematicae*, **117**, 93-105. <https://doi.org/10.1007/s10440-011-9652-4>
- [5] Munarini, E. and Zagaglia Salvi, N. (2002) On the Rank Polynomial of the Lattice of Order Ideals of Fences and Crowns. *Discrete Mathematics*, **259**, 163-177. [https://doi.org/10.1016/s0012-365x\(02\)00378-3](https://doi.org/10.1016/s0012-365x(02)00378-3)
- [6] Saygi, E. and Egecioğlu, Ö. (2016) Counting Disjoint Hypercubes in Fibonacci Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **215**, 231-237. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.07.004>
- [7] Saygi, E. and Egecioğlu, Ö. (2018) q -Counting Hypercubes in Lucas Cubes. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 190-203. <https://doi.org/10.3906/mat-1605-2>
- [8] Mollard, M. (2012) Maximal Hypercubes in Fibonacci and Lucas Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 2479-2483. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.06.003>
- [9] Klavžar, S., Mollard, M. and Petkovšek, M. (2011) The Degree Sequence of Fibonacci and Lucas Cubes. *Discrete Mathematics*, **311**, 1310-1322. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.03.019>
- [10] Lam, P.C.B. and Zhang, H. (2003) A Distributive Lattice on the Set of Perfect Matchings of a Plane Bipartite Graph. *Order*, **20**, 13-29.
- [11] Zhang, H., Yang, D. and Yao, H. (2014) Decomposition Theorem on Matchable Distributive Lattices. *Discrete Applied Mathematics*, **166**, 239-248. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.09.008>
- [12] Wang, X., Zhao, X. and Yao, H. (2018) Convex Expansion for Finite Distributive Lattices with Applications. arXiv: 1810.06762.
- [13] Wang, X., Zhao, X. and Yao, H. (2018) Structure and Enumeration Results of Matchable Lucas Cubes. arXiv: 1810.07329.
- [14] 周玉玉, 陈芳娣, 赵娟娟. 一类斐波那契相似立方体及其计数性质[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3676-3689.