Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 297-302
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147295

Hans汉斯

关于给定序列的分布性质

刘　萍

武汉理工大学理学院数学系，湖北　武汉

收稿日期：2024年6月13日；录用日期：2024年7月15日；发布日期：2024年7月31日

摘　要

本文主要研究了形如序列 $q_n y$ 的分布，令y为一个固定的实数，$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个正的整数序列，常数 $\alpha<1$，定义集合 $W_{y,\alpha}$ 如下所示：

$$W_{y,\alpha}=\left\{\gamma\in[0,1):\|q_n y-\gamma\|<\frac{1}{n^{\alpha}}\text{对无穷多个 } n\in\mathbb{N}\text{ 成立}\right\}.$$

序列 $\{q_n\}$ 为指数序列且取 $q_k=a^k=3^k$，则对 μ-几乎任意一个y，有 $\lambda(W_{y,\alpha})>0$ 成立。

关键词

Chung-Erdös不等式，Lebesgue测度，Fourier变换

On the Nature of Distribution of the Given Sequence

Ping Liu

Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei

Received: Jun. 13th, 2024; accepted: Jul. 15th, 2024; published: Jul. 31st, 2024

Abstract

The main idea of this paper is to study the distribution of the sequence with the form $q_n y$, let y be a fixed real number, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a positive integers sequence, constant $\alpha<1$, and define the set $W_{y,\alpha}$ as follows:

$$W_{y,\alpha}=\left\{\gamma\in[0,1):\|q_n y-\gamma\|<\frac{1}{n^{\alpha}}\text{ for infinitely many } n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Here, sequence $\{q_n\}$ is an exponential sequence and $q_k=a^k=3^k$. Then, for μ-almost every y, we

文章引用：刘萍. 关于给定序列的分布性质[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 297-302. DOI: 10.12677/pm.2024.147295

obtain that $\lambda(W_{y,\alpha})>0$.

Keywords

Chung-Erdös Inequality, Lebesgue Measure, Fourier Transform

1. 引言

令 y 为一个固定的实数，$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个正的整数序列，$\|\cdot\|$ 表示离最近整数的距离。定义集合如下所示：

$$W_{y,\alpha}=\left\{\gamma\in[0,1):\|q_n y-\gamma\|<\frac{1}{n^{\alpha}}\text{对无穷多个 } n\in\mathbb{N}\text{ 成立}\right\}. \tag{1}$$

当 $\alpha>1$ 时，根据 Borel-Cantelli 引理，显然有以上集合是一个 Lebesgue 零测集。

以上问题来自著名的 Littlewood 猜想[1]。丢番图逼近中的 Littlewood 猜想涉及的研究内容是具有相同分母的有理数同时逼近两个实数。非齐次 Littlewood 猜想阐述了以下问题，即：对于给定的实数对 (α,β)，有：

$$\liminf_{q\to\infty} q\cdot\|q\alpha\|\cdot\|q\beta\|=0. \tag{2}$$

对于以上集合 $W_{y,\alpha}$，Haynes 等在文章[2]中得出了以下结论：若序列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以指数级增长但不是超指数级增长，且 $\alpha<1/2$，考虑任意一个具有足够好的 Fourier 变换的测度，对于几乎每一个 y，集合 $W_{y,\alpha}$ 等于单位区间 $[0,1)$。此外，对任意 $x\in Bad$，集合 Bad 定义如下：

$$Bad=\left\{x\in[0,1):\liminf_{q\to\infty} q\|qx\|=0\right\},$$

存在一个具有最大 Hausdorff 维数的集合 $G\subseteq Bad$，使得对任意 $y\in G$ 以及任意 γ，有：

$$q\|qx\|\|qy-\gamma\|<\frac{1}{(\log q)^{1/2-\varepsilon}}. \tag{3}$$

事实上，(3)式中的上界在[3]中被 Chow 和 Zafeiropoulos 改进到 $(\log\log\log q)^{\varepsilon+1/2}/(\log q)^{1/2}$。注意到该上界的分母中的对数的指数幂是 1/2，这表明了当 $\alpha>1/2$ 时，关于集合 $W_{y,\alpha}$ 的性质的研究会更复杂，Pollington 等在[4]中的研究也证明了这一点。

Kristensen 和 Persson 在文章[5]中研究了在 $1/2<\alpha<1$ 的情况下，关于集合 $W_{y,\alpha}$ 的性质。他们得出了一个结论，即：考虑序列 $\{q_n\}$，对具有正 Fourier 维数的测度 μ，对几乎任意一个 y，集合 $W_{y,\alpha}$ 具有正的 Lebesgue 测度。若此时加上条件 μ 是 Lebesgue 测度，则可以将序列 $\{q_n\}$ 的增长速度放宽至比线性增长快一点，同时得到集合 $W_{y,\alpha}$ 的 Lebesgue 测度等于 1。此外，若序列 $\{q_n\}$ 是缺项序列，Chow 和 Technau 在[6]中证明了对 μ-几乎任意一个 y，集合 $W_{y,\alpha}$ 等于单位区间 $[0,1)$。

Kristensen 和 Persson 在[5]中指出以上结果可能不是最优的，因此，本文研究并改进了此结果，考虑了给定序列的分布性质。我们用 λ 表示 $[0,1)$ 区间上的 Lebesgue 测度，μ 表示 $[0,1)$ 区间上的 Borel 概率测度，且定义测度 μ 的 Fourier 维数为：

$$\dim_F(\mu)=\sup\left\{A>2:|\hat{\mu}(\xi)|=O\left((\log|\xi|)^{-A}\right)\right\}. \tag{4}$$

令 $\hat{\mu}$ 表示该测度的 Fourie 变换，定义如下：

$$\hat{\mu}(\xi)=\int e^{2\pi ix\xi}d\mu(x). \tag{5}$$

类比[5]中的定理 1，本文的研究内容是在给定测度 μ 的 Fourier 维数如(4)的情况下，考虑集合 $W_{y,\alpha}$ 的 Lebesgue 测度。同时，本文考虑序列 $\{q_n\}$ 为指数序列，即：$a^k\ (a>1)$，特别地，为了方便计算，本文直接代入具体的序列 $a_k=3^k$ 进行计算。

研究形如序列 $q_n y$ 的小数部分的轨道分布引起了许多学者的关注。例如，如果序列 $q_n y$ 包含按递增顺序排列的形如 2^i3^j 的所有数字，Furstenberg [7]证明了其轨道要么是有限的，要么是稠密的。此外，他还猜测若其轨道是稠密的，则此时轨道也是均匀分布的。而在 Rudnick 和 Sarnak 在文章[8]中研究了关于 $n=1$ 时的序列。在这之后，形如这类序列的分布同样也引起了相当大的关注。

Littlewood 猜想至今仍未被解决，但是近几十年，许多数学家也取得了重要的研究进展。在度量数论中，连分数发挥着巨大作用。不过，到现在为止，单单依靠连分数工具中的渐进分式去解决 Littlewood 猜想及其相关引申问题几乎不太可能。

因此，介于 Littlewood 猜想以及其衍生问题的不断提出，相应的解决问题的新方法以及看待问题的新角度也在不断引入，尤其是对测度、维数等方面的性质的研究愈发深入。故而本文研究了由 Littlewood 猜想引申而来的关于序列 $q_n y$ 的分布性质，通过综合运用现代数学理论和严谨的推理证明，对该类问题进行了系统的探究，并得到了一个具有创新性的理论研究结果。

2. 主要定理及其证明

2.1. 主要定理

定理 1：若 μ 表示 $[0,1)$ 区间上具有正的傅里叶维数的测度，且 μ 满足条件：

$$|\hat{\mu}(\xi)|=O\left((\log|\xi|)^{-A}\right), \tag{6}$$

其中，常数 $A\geq 2$，序列 $\{q_n\}$ 为指数序列且 $a^k=3^k$，定义集合

$$W_{y,\alpha}=\left\{\gamma\in[0,1):\|q_n y-\gamma\|<\frac{1}{n^\alpha}\text{对无穷多个 } n\in\mathbb{N}\text{ 成立}\right\}. \tag{7}$$

其中，$\alpha<1$，则对 μ -几乎任意一个 y，有 $\lambda(W_{y,\alpha})>0$ 成立。

要研究集合 $W_{y,\alpha}$ 的 Lebesgue 测度，只需考虑以 $q_k y$ 为球心，$k^{-\alpha}$ 为半径的球集在单位区间上的分布情况，从而得到关于集合 $W_{y,\alpha}$ 的测度的一个结论，也就是研究了关于形如序列 $q_n y$ 的分布性质。

引理 1：(Chung-Erdös 不等式[9])令 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一列事件，关于至少有一个事件发生的概率下界，存在以下不等式成立：

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\right)^2}{\sum_{1\leq i,j\leq n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)}.$$

2.2. 定理 1 的证明过程

首先，为了表示集合 $W_{y,\alpha}$ 中的元素 γ，即表示离序列 $q_k y$ 的距离为 $k^{-\alpha}$ 的点集，故我们只需定义球形集合 A_k，

$$A_k=A_k(y)=\left\{\gamma\in[0,1):\|q_k y-\gamma\|<k^{-\alpha}\right\}=B\left(q_k y,k^{-\alpha}\right).$$

也就是说，集合 A_k 表示以 $q_k y$ 为球心，$k^{-\alpha}$ 为半径的球集，显然该集合的 Lebesgue 测度为 $2k^{-\alpha}$，即：

$$\lambda\left(A_k\right)=2k^{-\alpha}.$$

为了研究球形集合 A_k 的上极限集合的测度大小，此时需要考虑集合 A_k 在单位区间上的重合程度，故我们假设整数 $m<n$，定义序列

$$S_{m,n}=\sum_{k=m}^{n}\lambda\left(A_k\right),\quad C_{m,n}=\sum_{m\le k,l\le n}\lambda\left(A_k\cap A_l\right).$$

也就是说，$C_{m,n}=\sum_{m\le k,l\le n}\lambda\left(A_k\cap A_l\right)$ 表示集合 A_m 到 A_n 中任意两个集合的交集的 Lebesgue 测度之和，而 $S_{m,n}=\sum_{k=m}^{n}\lambda\left(A_k\right)$ 表示其对角线元素的 Lebesgue 测度之和，显然有 $S_{m,n}\le C_{m,n}$。

为了得到集合 A_k 的上极限集合的勒贝格测度大小，我们可以类比文章[5]中的研究方法。对于 $p\ge 1$，考虑集合 $\Delta_{m,n}(p)$ 和它的补集：

$$\Delta_{m,n}(p)=\left\{y: C_{m,n}(y)>p\int C_{m,n}(y)\mathrm{d}\mu(y)\right\},$$
$$\mathcal{C}_{\Delta_{m,n}}(p)=\left\{y: C_{m,n}(y)\le p\int C_{m,n}(y)\mathrm{d}\mu(y)\right\}.$$

显然有 $\mu\left(\Delta_{m,n}(p)\right)\le p^{-1}$，$\mu\left(\Delta_{m,n}(p)\right)>1-p^{-1}$。固定 $p>1$，取一个急剧增长的序列 n_j 使得 $n_{j+1}/n_j\to\infty$ 成立，令 $G(p)=\limsup\mathcal{C}_{\Delta_{n_j,n_{j+1}}}(p)$，则有 $\mu\left(G(p)\right)>1-p^{-1}$ 成立。任取一个 $y\in G(p)$，由上极限集合的定义可知有无穷多个 j 满足：

$$C_{n_j,n_{j+1}}(y)\le p\int C_{m,n}(y)\mathrm{d}\mu(y). \tag{8}$$

对于这样的整数 j，由 Chung-Erdös 不等式可以得出：

$$\lambda\left(\bigcup_{k=n_j}^{n_{j+1}}A_k(y)\right)\ge\frac{S_{n_j,n_{j+1}}^2}{C_{n_j,n_{j+1}}}\ge\frac{S_j^2}{pC_j}. \tag{9}$$

其中，$S_j=S_{n_j,n_{j+1}}$，$C_j=\int C_{n_j,n_{j+1}}(y)\mathrm{d}\mu(y)$。且 S_j 和 C_j 满足：

$$\begin{cases} S_j=\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}}2k^{-\alpha}\ge 2\int_{n_j}^{n_{j+1}}x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{n_j}^{n_{j+1}}=\dfrac{2\left(n_{j+1}^{1-\alpha}-n_j^{1-\alpha}\right)}{1-\alpha}, \\ C_j=\int\left(S_j+2\sum_{l=n_j}^{n_{j+1}}\sum_{k=n_j}^{l-1}\lambda\left(A_k\cap A_l\right)\right)\mathrm{d}\mu(y). \end{cases} \tag{10}$$

因此，以上我们得到了关于集合 A_k 的上极限集合的一个下界。当 $k<l$ 时，由于当 $\left(q_k-q_l\right)y\notin B\left(0,2k^{-\alpha}\right)$ 时，有 $A_k\cap A_l=\varnothing$，当 $\left(q_k-q_l\right)y\in B\left(0,2k^{-\alpha}\right)$ 时，有 $A_k\cap A_l\subset A_l$，即 $\lambda\left(A_k\cap A_L\right)\le 2l^{-\alpha}$，所以我们可以得到：

$$\lambda\left(A_k\cap A_L\right)=2l^{-\alpha}\mathbf{1}_{B\left(0,2k^{-\alpha}\right)}\left(\left(q_k-q_l\right)y\right),$$

其中，$\mathbf{1}_{B\left(0,2k^{-\alpha}\right)}(y)$ 表示球集 $B\left(0,2k^{-\alpha}\right)$ 上的示性函数，其 Fourier 级数表示为：

$$\mathbf{1}_{B\left(0,2k^{-\alpha}\right)}(y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j\mathrm{e}^{i2\pi jy}.$$

同时，根据 $\hat{\mu}(\xi)=\int\mathrm{e}^{2\pi ix\xi}\mathrm{d}\mu(x)$，以及 $\left|\hat{\mu}(\xi)\right|=O\left(\left(\log|\xi|\right)^{-A}\right)$，假设 $a_0=4k^{-\alpha}$，且当 $j\ne 0$ 时，$\left|a_j\right|\le 1/|j|$，

序列 $q_k = 3^k$ 。从而我们有以下不等式成立：

$$\begin{aligned}\int \lambda\left(A_k \cap A_L\right)\mathrm{d}\mu &\le 2l^{-\alpha}\int \mathbf{1}_{B\left(0,2k^{-\alpha}\right)}\left(\left(q_k - q_l\right)y\right)\mathrm{d}\mu \\ &= 2l^{-\alpha}\int \sum_j a_j \mathrm{e}^{i2\pi j\left(q_k - q_l\right)y}\mathrm{d}\mu \\ &= 2l^{-\alpha}\left(a_0 + \sum_{j\ne 0} a_j \hat{\mu} j\left(q_k - q_l\right)\right) \\ &\le 2l^{-\alpha}\left(4k^{-\alpha} + \sum_{j\ne 0}\left|j\right|^{-1}\log\left(j\left(q_k - q_l\right)\right)^{-A}\right) \\ &\le cl^{-\alpha}\left(k^{-\alpha} + \sum_{j\ne 0}\frac{1}{j\left(\log j + \log 3^k + 1/2\log 3^{l-k}\right)^{-A}}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

其中， $c>0$ 是一个常数。由(10)以及(11)，对于 S_j 和 C_j 有：

$$S_j = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}} 2k^{-\alpha} \ge 2\int_{n_j}^{n_{j+1}} x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{2}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{n_j}^{n_{j+1}} = \frac{2\left(n_{j+1}^{1-\alpha} - n_j^{1-\alpha}\right)}{1-\alpha}. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}C_j &\le S_j + 2\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{k=n_j}^{l-1}\lambda\left(A_k \cap A_L\right) \\ &\le S_j + c\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{k=n_j}^{l-1}\left(l^{-\alpha}\left(k^{-\alpha} + \sum_{j\ne 0}\frac{1}{j\left(\log j + \log 3^k + 1/2\log 3^{l-k}\right)^{A}}\right)\right) \\ &= S_j + c\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{k=n_j}^{l-1}\left(l^{-\alpha}\left(k^{-\alpha} + \sum_{j\ne 0}\frac{1}{j\left(\log j + \frac{l+k}{2}\log 3\right)^{A}}\right)\right) \\ &\le S_j + c\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{k=n_j}^{l-1} l^{-\alpha}k^{-\alpha} + c\sum_{j\ne 0} j^{-1}\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}} l^{-\alpha}\sum_{k=n_j}^{l-1}\frac{1}{\left(\log j + k\log 3\right)^{A}} \\ &\le S_j + \frac{c}{\left(1-\alpha\right)^2}\left(n_{j+1}+1\right)^{2-2\alpha} + c\sum_{j\ne 0}\frac{j^{-1}}{\left(\log j\right)^{A-1}}\sum_{l=n_j+1}^{n_{j+1}} l^{-\alpha} \\ &<<_j + \frac{c}{\left(1-\alpha\right)^2}\left(n_{j+1}+1\right)^{2-2\alpha} + \frac{c}{1-\alpha}\left(n_{j+1}+1\right)^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{13}$$

最后，结合不等式(9)、(12)以及(13)的结果，所以，我们可以得到以下结论：

$$\begin{cases}\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{S_j^2}{C_j} = \dfrac{c}{1-\alpha} \\ \lambda\left(\bigcup\limits_{k=n_j}^{n_{j+1}} A_k\left(y\right)\right) \ge \dfrac{S_j^2}{pC_j} = \dfrac{c}{p\left(1-\alpha\right)}.\end{cases} \tag{14}$$

也就是说，对任意 $y \in \bigcup\limits_{p>1} G\left(p\right)$ 和 $\mu\left(\bigcup\limits_{p>1} G\left(p\right)\right) = 1$，我们有 $\lambda\left(W_{y,\alpha}\right) > 0$ 成立。

定理证毕。

3. 总结与展望

对于文章[5]中的定理 1，文中提供了一个猜想，即定理 1 这个结论可以从正 Fourier 维数的测度推广

至完整的测度上。此外，文中进一步考虑了一类特殊情况，即 $\mu=\lambda$ 的情况，应用 Fubini 定理以及文章[8]中的一个引理，证明了在这种情况下，集合 $W_{y,\alpha}$ 是满的 Lebesgue 测度。然而，这个方法并不能直接用于验证文章[5]中的这个猜想，这就是接下来关于给定序列的分布性质的研究难点之一。

参考文献

[1] Littlewood, J.E. (1968) Some Problems in Real and Complex Analysis. D. C. Heath and Co., Raytheon Education Co.

[2] Haynes, A., Jensen, J.L. and Kristensen, S. (2014) Metrical Musings on Littlewood and Friends. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 457-466. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2013-11921-0

[3] Chow, S. and Zafeiropoulos, A. (2021) Fully Inhomogeneous Multiplicative Diophantine Approximation of Badly Approximable Numbers. *Mathematika*, **67**, 639-646. https://doi.org/10.1112/mtk.12095

[4] Pollington, A.D., Velani, S., Zafeiropoulos, A. and Zorin, E. (2022) Inhomogeneous Diophantine Approximation on M_0-Sets with Restricted Denominators. *International Mathematics Research Notices*, **2022**, 8571-8643. https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa307

[5] Kristensen, S. and Persson, T. (2023) On the Distribution of Sequences of the Form $(q_n y)$. arXiv: 2309.02893.

[6] Chow, S. and Technau, N. (2023) Dispersion and Littlewood's Conjecture. arXiv: 2307.14871.

[7] Furstenberg, H. (1967) Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation. *Mathematical Systems Theory*, **1**, 1-49. https://doi.org/10.1007/bf01692494

[8] Rudnick, Z. and Sarnak, P. (1998) The Pair Correlation Function of Fractional Parts of Polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, **194**, 61-70. https://doi.org/10.1007/s002200050348

[9] Chung, K.L. and Erdös, P. (1952) On the Application of the Borel-Cantelli Lemma. *Transactions of the American Mathematical Society*, **72**, 179-186. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1952-0045327-5