Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 30-40
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147268

关于方程$Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL\left(n\right)\right)$的正整数解

尹　秘[*]，向万国，王　军[#]，钟佐琴
云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2024年5月27日；录用日期：2024年6月29日；发布日期：2024年7月16日

摘　要

本文利用伪Smarandache函数、Smarandache LCM函数和广义Euler函数的基本性质，以及一些初等方法和技巧给出$\varphi_{14}\left(p^{\alpha}\right)$的准确计算公式，其中$p$是素数，且$\alpha$是正整数。由此，我们讨论数论函数方程$Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL\left(n\right)\right)$的可解性，结论是：该方程无正整数解。

关键词

伪Smarandache函数，Smarandache LCM函数，广义欧拉函数，可解性

On the Positive Integer Solutions to Equation $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL\left(n\right)\right)$

Mi Yin[*], Wanguo Xiang, Jun Wang[#], Zuoqin Zhong
School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: May 27th, 2024; accepted: Jun. 29th, 2024; published: Jul. 16th, 2024

Abstract

This paper applies the basic properties of pseudo-Smarandache, Smarandache LCM and generalized functions, as well as some elementary methods and techniques to obtain an accurate calculation formula of $\varphi_{14}\left(p^{\alpha}\right)$, where p is a prime number and α is a positive integer. Based on this formula, We discuss the solvability of the number-theoretic functional equation $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL\left(n\right)\right)$. It is

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 尹秘, 向万国, 王军, 钟佐琴. 关于方程$Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL\left(n\right)\right)$的正整数解[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 30-40.
DOI: 10.12677/pm.2024.147268

concluded that there is no positive integer solution to this equation.

Keywords

Pseudo-Smarandache Function, Smarandache LCM Function, Generalized Euler Function, Solvability

1. 引言

数论函数方程是数论中一类非常有研究价值的函数，它揭示了数论函数之间的本质联系。其中涉及很多数论函数，例如欧拉函数、广义欧拉函数及 Smarandache 函数。而欧拉函数 $\varphi(n)$ 的值等于序列 $0,1,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的整数个数[1]。欧拉函数是一类非常重要的函数，在 RSA 公钥密码体制中扮演着重要的角色，已经成为解决数论问题的一个重要工具。2007 年，Cai [2]在欧拉函数的基础上提出了广义欧拉函数的概念，他们定义了广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$：

$$\varphi_e(n)=\sum_{i=1,\ \gcd(i,n)=1}^{[n/e]}1.$$

即 $\varphi_e(n)$ 等于序列 $1,2,\cdots,[n/e]$ 中与 n 互素的整数个数，容易证明：

$$\varphi_e(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left[\frac{d}{e}\right].$$

其中，$[x]$ 是 Gauss 取整函数。

另一方面，著名的数论专家 F. Smarandache 定义了 Smarandache 函数。后来一些学者在此基础上进行了推广，提出了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 和 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$。伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小正整数 m，使得 $1+2+\cdots+m$ 能被 n 整除[3]，即：

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in Z^{+},n\,|\,\frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小正整数 k，使得 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数能被 n 整除[4]，即：

$$SL(n)=\min\left\{k:k\in Z^{+},n\,|\,lcm[1,2,\cdots,k]\right\}.$$

近年来，关于 $SL(n)$、$Z(n)$ 及 $\varphi_e(n)$ 几类数论函数相结合的方程备受学者们的关注，并且取得了一些好的结果。例如，高丽等[5]研究了方程 $Z(n^2)=\varphi(n)$ 的可解性，并获得了该方程的所有正整数解。赵祈芬等[6]研究了方程 $Z(n^k)=\varphi(n^2)$ 与 $Z(n^k)=\varphi(n^k)$ 的可解性，并获得了该方程的所有正整数解。白继文[7]研究了方程 $S(SL(n^2))=\varphi_2(n)$ 的可解性，并得到了其所有正整数解。朱杰等[8]对方程 $Z(n)=\varphi_e(SL(n))(e=2,3,4,6)$ 进行了研究，给出了其所有正整数解；李改利等[9]研究了方程 $Z(n^2)=\varphi_e(SL(n))(e=3,4)$ 的可解性，并给出了所有正整数解。

本文在上述学者研究的基础上，进一步讨论 $\varphi_{14}(p^\alpha)$ (p 为素数，α 为正整数)的准确计算公式，然后利用 $\varphi_{14}(p^\alpha)$ 的准确计算公式讨论数论函数方程 $Z(n^2)=\varphi_{14}(SL(n))$ 的可解性。

2. 相关引理及主要结果

引理 1 [10]设正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，则有：

$$SL(n)=\max\left\{p_i^{k_i}\right\}(1\le i\le s),$$

特别地，当 p 为素数及 $k\ge 1$ 时，$SL\left(p^k\right)=p^k$。

引理 2 [11]当 $p\ge 3$ 及 $k\ge 1$ 时，有 $Z\left(p^k\right)=p^k-1$。特别地，当 $p=2$ 时，则有 $Z\left(2^k\right)=2^{k+1}-1$。

引理 3 [12]对任意素数 p 及 $k\ge 1$，有 $\varphi\left(p^k\right)=p^k-p^{k-1}$。

定理 1 若 $n=p^\alpha$，则有 $\varphi_{14}(n)=\dfrac{\varphi(n)-\lambda_1+\lambda_2}{14}$，$(p,2)=1$ 且 $(p,7)=1$，且 p 为素数，$\lambda_2\equiv p^{\alpha-1}(\bmod 14)$，$\lambda_1\equiv p^\alpha\equiv p\lambda_2(\bmod 14)$，$1\le\lambda_1,\lambda_2\le 13$。

证明：当 $n=p^\alpha$ 时，由广义欧拉函数的性质得：

$$\varphi_{14}(n)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]=\mu(1)\left[\frac{p^\alpha}{14}\right]+\mu(p)\left[\frac{p^{\alpha-1}}{14}\right]=\frac{p^\alpha-\lambda_1}{14}-\frac{p^{\alpha-1}-\lambda_2}{14}=\frac{\varphi(n)-\lambda_1+\lambda_2}{14}.$$

其中，$1\le\lambda_1,\lambda_2\le 13$，$\lambda_2\equiv p^{\alpha-1}(\bmod 14)$，$\lambda_1\equiv p^\alpha\equiv p\lambda_2(\bmod 14)$。

推论 1 当 $n=p^\alpha$，$(p,2)=1$ 且 $(p,7)=1$，p 为素数。则有下面的结论：

1) $p\equiv 1(\bmod 14)$，

$$\varphi_{14}(n)=\frac{\varphi(n)}{14}.$$

2) $p\equiv 3(\bmod 14)$，

$$\varphi_{14}(n)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(n)\mp 2}{14},\alpha\equiv 1,4(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)\mp 6}{14},\alpha\equiv 2,5(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)\mp 4}{14},\alpha\equiv 3,6(\bmod 6).\end{cases}$$

3) $p\equiv 5(\bmod 14)$，

$$\varphi_{14}(n)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(n)\mp 4}{14},\alpha\equiv 1,4(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)\mp 6}{14},\alpha\equiv 2,5(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)\mp 2}{14},\alpha\equiv 3,6(\bmod 6).\end{cases}$$

4) $p\equiv 9(\bmod 14)$，

$$\varphi_{14}(n)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(n)-8}{14},\alpha\equiv 1,4(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)-2}{14},\alpha\equiv 2,5(\bmod 6),\\ \dfrac{\varphi(n)+10}{14},\alpha\equiv 3,6(\bmod 6).\end{cases}$$

5) $p\equiv 11\left(\bmod 14\right)$，

$$\varphi_{14}\left(n\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(n\right)-10}{14},\alpha\equiv 1,4\left(\bmod 6\right),\\ \dfrac{\varphi\left(n\right)+2}{14},\alpha\equiv 2,5\left(\bmod 6\right),\\ \dfrac{\varphi\left(n\right)+8}{14},\alpha\equiv 3,6\left(\bmod 6\right).\end{cases}$$

6) $p\equiv 13\left(\bmod 14\right)$，

$$\varphi_{14}\left(n\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(n\right)-12}{14},\alpha\equiv 1,3,5\left(\bmod 6\right),\\ \dfrac{\varphi\left(n\right)+12}{14},\alpha\equiv 2,4,6\left(\bmod 6\right).\end{cases}$$

证明： 当 $p\equiv 1\left(\bmod 14\right)$ 时，易证 $\varphi_{14}\left(n\right)=\dfrac{\varphi\left(n\right)}{14}$。当 $p\equiv 3\left(\bmod 14\right)$，$\alpha\equiv 1\left(\bmod 6\right)$ 时，由推论 1 得 $\varphi_{14}\left(n\right)=\dfrac{\varphi\left(n\right)-\lambda_1+\lambda_2}{14}$，$1\le\lambda_1,\lambda_2\le 13$，且 $\lambda_2\equiv 3^{\alpha-1}\left(\bmod 14\right)$，$\lambda_1\equiv 3^{\alpha}\left(\bmod 14\right)$，则有 $\lambda_2\equiv 1\left(\bmod 14\right)$，$\lambda_1\equiv 3\left(\bmod 14\right)$，故 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$，便可得 $\varphi_{14}\left(n\right)=\dfrac{\varphi\left(n\right)-2}{14}$，证毕。其余情况类似可得。

定理 2 若 $n=2^{\alpha}7^{\beta}>14$ 且 $n\neq 28$，α,β 为非负整数，则有：

$$\varphi_{14}\left(2^{\alpha}7^{\beta}\right)=\begin{cases}3\cdot 7^{\beta-2}, & \alpha=0,\beta\ge 2,\\ 3\cdot 2^{\alpha-1}7^{\beta-2}, & \alpha\ge 1,\beta\ge 2,\\ \dfrac{2^{\alpha-2}+3}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 1\left(\bmod 3\right),\beta=0,\\ \dfrac{2^{\alpha-2}-1}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 2\left(\bmod 3\right),\beta=0,\\ \dfrac{2^{\alpha-2}-2}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 3\left(\bmod 3\right),\beta=0,\\ \dfrac{6\cdot 2^{\alpha-2}-3}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 1\left(\bmod 3\right),\beta=1,\\ \dfrac{6\cdot 2^{\alpha-2}+1}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 2\left(\bmod 3\right),\beta=1,\\ \dfrac{6\cdot 2^{\alpha-2}+2}{7}, & \alpha\ge 4\text{ 且 }\alpha\equiv 3\left(\bmod 3\right),\beta=1.\end{cases}$$

证明： 1) 若 $\alpha=0$，则 $n=7^{\beta}>14$，$\beta\ge 2$，这时有：

$$\varphi_{14}\left(7^{\beta}\right)=\sum_{d\mid 7^{\beta}}\mu\left(\frac{7^{\beta}}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]=\left[\frac{7^{\beta}}{14}\right]-\left[\frac{7^{\beta-1}}{14}\right]=\left[\frac{7^{\beta-1}}{2}\right]-\left[\frac{7^{\beta-2}}{2}\right]=3\cdot 7^{\beta-2}.$$

2) 若 $\alpha=1$，则 $n=2\cdot 7^{\beta}>14$，$\beta\ge 2$，这时有：

$$\begin{aligned}\varphi_{14}\left(2\cdot 7^{\beta}\right)&=\sum_{d\mid 2\cdot 7^{\beta}}\mu\left(\frac{2\cdot 7^{\beta}}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]=\sum_{d\mid 7^{\beta}}\mu\left(\frac{2\cdot 7^{\beta}}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]+\sum_{d\mid 7^{\beta}}\mu\left(\frac{7^{\beta}}{d}\right)\left[\frac{d}{7}\right]\\&=-\varphi_{14}\left(7^{\beta}\right)+7^{\beta-1}-7^{\beta-2}\\&=3\cdot 7^{\beta-2}.\end{aligned}$$

3) 若 $\alpha=2$，则 $n=2^2\cdot 7^\beta>14$， $\beta\ge 2$，这时有：

$$\begin{aligned}\varphi_{14}\left(4\cdot 7^\beta\right)&=\sum_{d|4\cdot 7^\beta}\mu\left(\frac{4\cdot 7^\beta}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]\\&=\mu(1)\left[\frac{4\cdot 7^\beta}{14}\right]+\mu(2)\left[\frac{2\cdot 7^\beta}{14}\right]+\mu(7)\left[\frac{4\cdot 7^{\beta-1}}{14}\right]+\mu(14)\left[\frac{2\cdot 7^{\beta-1}}{14}\right]\\&=6\cdot 7^{\beta-2}.\end{aligned}$$

4) 若 $\alpha=3$，则 $n=2^3\cdot 7^\beta>14$， $\beta\ge 2$，这时有：

$$\begin{aligned}\varphi_{14}\left(8\cdot 7^\beta\right)&=\sum_{d|8\cdot 7^\beta}\mu\left(\frac{8\cdot 7^\beta}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]\\&=\mu(1)\left[\frac{2^3\cdot 7^\beta}{14}\right]+\mu(2)\left[\frac{2^2\cdot 7^\beta}{14}\right]+\mu(7)\left[\frac{2^3\cdot 7^{\beta-1}}{14}\right]+\mu(14)\left[\frac{2^2\cdot 7^{\beta-1}}{14}\right]\\&=12\cdot 7^{\beta-2}.\end{aligned}$$

5) 若 $\alpha\ge 4$，则 $n=2^\alpha\cdot 7^\beta>14$， $\beta\ge 0$，这时有：

① 若 $\beta=0$，则 $n=2^\alpha$，故有：

$$\varphi_{14}\left(2^\alpha\right)=\sum_{d|2^\alpha}\mu\left(\frac{2^\alpha}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]=\mu(1)\left[\frac{2^\alpha}{14}\right]+\mu(2)\left[\frac{2^{\alpha-1}}{14}\right]=\left[\frac{2^{\alpha-1}}{7}\right]-\left[\frac{2^{\alpha-2}}{7}\right].$$

i) 若 $\alpha\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$，则

$$\varphi_{14}\left(2^\alpha\right)=\frac{2^{\alpha-2}+3}{7}.$$

ii) 若 $\alpha\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，则

$$\varphi_{14}\left(2^\alpha\right)=\frac{2^{\alpha-2}-1}{7}.$$

iii) 若 $\alpha\equiv 3(\mathrm{mod}\,3)$，则

$$\varphi_{14}\left(2^\alpha\right)=\frac{2^{\alpha-2}-2}{7}.$$

② 若 $\beta=1$，则 $n=7\cdot 2^\alpha$，故有：

$$\begin{aligned}\varphi_{14}\left(7\cdot 2^\alpha\right)&=\sum_{d|7\cdot 2^\alpha}\mu\left(\frac{7\cdot 2^\alpha}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]\\&=\mu(1)\left[\frac{7\cdot 2^\alpha}{14}\right]+\mu(2)\left[\frac{7\cdot 2^{\alpha-1}}{14}\right]+\mu(7)\left[\frac{2^\alpha}{14}\right]+\mu(14)\left[\frac{2^{\alpha-1}}{14}\right]\\&=2^{\alpha-1}-2^{\alpha-2}-\left[\frac{2^{\alpha-1}}{7}\right]+\left[\frac{2^{\alpha-2}}{7}\right].\end{aligned}$$

i) 若 $\alpha\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$，则

$$\varphi_{14}\left(7\cdot 2^\alpha\right)=\frac{6\cdot 2^{\alpha-2}-3}{7}.$$

ii) 若 $\alpha\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，则

$$\varphi_{14}\left(7\cdot 2^\alpha\right)=\frac{6\cdot 2^{\alpha-2}+1}{7}.$$

iii) 若 $\alpha\equiv 3(\bmod 3)$，则

$$\varphi_{14}\left(7\cdot 2^{\alpha}\right)=\frac{6\cdot 2^{\alpha-2}+2}{7}.$$

③ 若 $\beta\ge 2$，则 $n=7^2\cdot 2^{\alpha}$，故有：

$$\begin{aligned}\varphi_{14}\left(7^{\beta}\cdot 2^{\alpha}\right)&=\sum_{d|7^{\beta}\cdot 2^{\alpha}}\mu\left(\frac{7^{\beta}\cdot 2^{\alpha}}{d}\right)\left[\frac{d}{14}\right]\\&=\mu(1)\left[\frac{7^{\beta}\cdot 2^{\alpha}}{14}\right]+\mu(2)\left[\frac{7^{\beta}\cdot 2^{\alpha-1}}{14}\right]+\mu(7)\left[\frac{7^{\beta-1}\cdot 2^{\alpha}}{14}\right]+\mu(14)\left[\frac{7^{\beta-1}\cdot 2^{\alpha-1}}{14}\right]\\&=3\cdot 2^{\alpha-1}\cdot 7^{\beta-2}.\end{aligned}$$

定理 3 数论函数方程：

$$Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)\tag{1}$$

无正整数解。

3. 主要结果的证明

定理 3 的**证明**：由引理 2 知 $n=1$，$Z(1)=1$，$SL(1)=1$，$\varphi_{10}\left(SL(1)\right)=0$，则 $Z(1)\ne\varphi_{14}\left(SL(1)\right)$，故 $n=1$ 不是方程的解。

现设 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}>1$，其中 $k\ge 0$， $\alpha,\alpha_i\ge 0(i=1,2,\cdots,k)$， p_i 是不同的奇素数。

1) 若 $2^{\alpha}=\max\left\{2^{\alpha},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\right\}$，则必有 $\alpha\ge 1$。由引理 1 得 $SL(n)=2^{\alpha}$， $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)$。当 $\alpha=1$ 时，即 $n=2$， $\varphi_{14}\left(SL(2)\right)=0$。根据定义 $Z\left(2^2\right)=7$，故 $Z\left(2^2\right)\ne\varphi_{14}\left(SL(2)\right)$。当 $\alpha=2$ 时，即 $n=4$ 或 12，由引理 1 知 $SL(4)=SL(12)=4$，故 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}(4)=0$， $Z\left(4^2\right)=31$，故 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)\ne Z\left(n^2\right)$。当 $\alpha=3$ 时，n 的值为以下几种情况：

$$n\in\left\{2^3,2^3\times 3,2^3\times 5,2^3\times 7,2^3\times 3\times 5,2^3\times 3\times 7,2^3\times 5\times 7,2^3\times 3\times 5\times 7\right\}$$

由引理 1 知 $SL(n)=2^3$， $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}(8)=0$，显然 $Z\left(n^2\right)\ne 0$，故 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)\ne Z\left(n^2\right)$。

当 $\alpha\ge 4$ 时， $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)$，下面计算 $\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)$。考虑以下三种情形。

① 若 $\alpha\equiv 1(\bmod 3)$，由定理 2 知 $\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)=\frac{2^{\alpha-2}+3}{7}$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\frac{2^{\alpha-2}+3}{7}\left(\frac{2^{\alpha-2}+3}{7}+1\right)}{2}$$

则有 $2^{2\alpha+1}\mid\left(2^{\alpha-2}+3\right)\left(2^{\alpha-2}+10\right)$，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+3$ 或 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+10$ 成立。 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+3$ 显然不成立，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+10$，化简为 $2^{2\alpha}\mid 2^{\alpha-3}+5$， $2^{\alpha-3}+5$ 为奇数显然不成立。

② 若 $\alpha\equiv 2(\bmod 3)$，由定理 2 知 $\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)=\frac{2^{\alpha-2}-1}{7}$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\frac{2^{\alpha-2}-1}{7}\left(\frac{2^{\alpha-2}-1}{7}+1\right)}{2}$$

则有 $2^{2\alpha+1}\mid\left(2^{\alpha-2}-1\right)\left(2^{\alpha-2}+6\right)$，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}-1$ 或 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+6$ 成立。$2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}-1$ 显然不成立，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+6$，化简为 $2^{2\alpha}\mid 2^{\alpha-3}+3$，而 $2^{\alpha-3}+3$ 为奇数显然不可能成立。

③ 若 $\alpha\equiv 3(\bmod 3)$，由定理 2 知 $\varphi_{14}\left(2^{\alpha}\right)=\dfrac{2^{\alpha-2}-2}{7}$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\dfrac{2^{\alpha-2}-2}{7}\left(\dfrac{2^{\alpha-2}-2}{7}+1\right)}{2}$$

则有 $2^{2\alpha+1}\mid\left(2^{\alpha-2}-2\right)\left(2^{\alpha-2}+5\right)$，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}-2$ 或 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+5$ 成立。$2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}+5$ 显然不可能成立，故 $2^{2\alpha+1}\mid 2^{\alpha-2}-2$ 成立，化简为 $2^{2\alpha}\mid 2^{\alpha-3}-1$，$2^{\alpha-3}-1$ 为奇数显然不成立。综上所述方程(1)无解。

2) 若 $p_k^{\alpha_k}=\max\left\{2^{\alpha},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\right\}$，则必有 $\alpha_k\ge 1$，由引理 1 得 $SL(n)=p_k^{\alpha_k}$，$\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)$，下面计算 $\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)$ 的值。

情形一：若 $p_k=7$，$\alpha_k=1$ 时，n 的可能取值为：

$$n\in\left\{7,2\times7,2^2\times7,3\times7,5\times7,2\times3\times7,2^2\times3\times7,2\times5\times7,2^2\times5\times7,2\times3\times5\times7,2^2\times3\times5\times7\right\}$$

由引理 1 知 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}(7)=0$，而 $Z\left(n^2\right)\neq 0$，显然 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)\neq Z\left(n^2\right)$。当 $\alpha_k=2$ 时，$\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(7^2\right)=3$，由引理 2 得 $Z\left(n^2\right)\neq 3$，故 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)\neq Z\left(n^2\right)$。当 $\alpha_k\ge 3$ 时，由定理 2 知 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(7^{\alpha_k}\right)=3\cdot7^{\alpha_k-2}$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{3\cdot7^{\alpha_k-2}\left(3\cdot7^{\alpha_k-2}+1\right)}{2}$$

则有 $7^{2\alpha_k}\mid 3\cdot7^{\alpha_k-2}\left(3\cdot7^{\alpha_k-2}+1\right)$，故 $7^{2\alpha_k}\mid 3\cdot7^{\alpha_k-2}$ 或 $7^{2\alpha_k}\mid 3\cdot7^{\alpha_k-2}+1$，$7^{2\alpha_k}\mid 3\cdot7^{\alpha_k-2}$ 显然不成立。故 $7^{2\alpha_k}\mid 3\cdot7^{\alpha_k-2}+1$，$3\cdot7^{\alpha_k-2}+1$ 为偶数，显然矛盾。

情形二：若 $\left(p_k,7\right)=1$，计算 $\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)$，需要讨论 p_k 为不同的值，分以下六种情形进行讨论。

① 若 $p_k\equiv 1(\bmod 14)$，根据推论 1 得 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{1}{14}\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k}\mid\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+14\right)$，即 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}$ 或 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+14$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}$ 成立，有 $p_k\mid p_k-1$，此时 $p_k=1$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+14$，当 $\alpha_k=1$ 时，则 $p_k^2\mid p_k+13$，故有 $p_k=13$ 与 $p_k\equiv 1(\bmod 14)$ 矛盾。当 $\alpha_k>1$ 时，$p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+14$，必有 $p_k=2$ 或 $p_k=7$，与 p_k 是奇素数且 $\left(p_k,7\right)=1$ 矛盾。综上所述，方程(1)无解。

② 若 $p_k\equiv 3(\bmod 14)$，下面对 α_k 分以下三种情况进行讨论。

i) 若 $\alpha_k\equiv 1,4(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)\mp 2}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2+14\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2+14$。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2$，则 $p_k=2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 2+14$，当 $\alpha_k\equiv 1(\bmod 6)$ 时，有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12$，则 $p_k=2$ 或 $p_k=3$，$p_k=2$ 与 p_k 为奇素数矛盾。故 $p_k=3$ 上式可以写成 $3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k}-3^{\alpha_k-1}+12$，化简得 $3^{2\alpha_k-1} \mid 3^{\alpha_k-1}-3^{\alpha_k-2}+4$，又因为 $3^{\alpha_k-1}-3^{\alpha_k-2}+4$ 为偶数显然不成立。当 $\alpha_k\equiv 4(\bmod 6)$ 时，有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+16$，故 $p_k=2$ 显然不成立。

ii) 若 $\alpha_k\equiv 2,5(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)\mp 6}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6+14\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6+14$。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6$ 成立，则有 $p_k=2$ 或 $p_k=3$，$p_k=2$ 时显然矛盾，当 $p_k=3$，上式为 $3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k}-3^{\alpha_k-1}\mp 6$，化简为 $3^{2\alpha_k-1} \mid 3^{\alpha_k-1}-3^{\alpha_k-2}\mp 2$，显然不可能成立。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 6+14$，则 $p_k=2$ 或 $p_k=5$，$p_k=2$ 显然矛盾。$p_k=5$ 与 $p_k\equiv 3(\bmod 14)$ 矛盾，综上所述方程(1)无解。

iii) 若 $\alpha_k\equiv 3,6(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)\mp 4}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4+14\right)$，$p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4$ 显然不可能成立，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4+14$，此时 p_k 的可能取值为 2,3,5，当 $p_k=2,5$ 时，与 $p_k\equiv 3(\bmod 14)$ 矛盾，当 $p_k=3$ 时，上式可以写为 $3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k}-3^{\alpha_k-1}\mp 4+14$，当 $\alpha_k\equiv 3(\bmod 6)$ 时，$3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k}-3^{\alpha_k-1}+10$ 显然矛盾。当 $\alpha_k\equiv 6(\bmod 6)$ 时，$3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k}-3^{\alpha_k-1}+18$，化简得 $3^{2\alpha_k-2} \mid 3^{\alpha_k-2}-3^{\alpha_k-3}+2$，$3^{\alpha_k-2}-3^{\alpha_k-3}+2$ 为偶数，显然不成立。综上所述，方程(1)无解。

③ 若 $p_k\equiv 5(\bmod 14)$，下面对 α_k 分以下三种情况进行讨论。

i) 若 $\alpha_k\equiv 1,4(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}\left(SL(n)\right)=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)\mp 4}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}\left(SL(n)\right)$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4+14\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4+14$。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4$，则 $p_k=2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\mp 4+14$，当 $\alpha_k\equiv 1(\bmod 6)$ 时，

有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 10$，则 $p_k = 2$ 或 $p_k = 5$，$p_k = 2$ 与 p_k 为奇素数矛盾。故 $p_k = 5$ 上式可以写成 $5^{2\alpha_k} \mid 5^{\alpha_k} - 5^{\alpha_k-1} + 10$，化简得 $5^{2\alpha_k-1} \mid 5^{\alpha_k-1} - 5^{\alpha_k-2} + 2$，又因为 $5^{\alpha_k-1} - 5^{\alpha_k-2} + 2$ 为偶数显然矛盾。当 $\alpha_k \equiv 4 \pmod 6$ 时，有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 18$，故 $p_k = 2$ 或者 $p_k = 3$ 均与 $p_k \equiv 5 \pmod{14}$ 矛盾。

ii) 若 $\alpha_k \equiv 2,5 \pmod 6$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n)) = \varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \dfrac{\varphi(n) \mp 6}{14} = \dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{14}$，若 $Z\left(n^2\right) = \varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{14} + 1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6\right)\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 14\right)$，故有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 14$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 成立，则有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$ 均与 $p \equiv 5 \pmod{14}$ 矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 14$，此时 $p_k = 2$ 或 $p_k = 5$，当 $p_k = 2$ 时显然矛盾。当 $p_k = 5$ 时，$5^{2\alpha_k} \mid 5^{\alpha_k} - 5^{\alpha_k-1} + 20$，化简得 $5^{2\alpha_k-1} \mid 5^{\alpha_k-1} - 5^{\alpha_k-2} + 4$，与上述情况类似方程无解。

iii) 若 $\alpha_k \equiv 3,6 \pmod 6$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n)) = \varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \dfrac{\varphi(n) \mp 2}{14} = \dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{14}$，若 $Z\left(n^2\right) = \varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{14} + 1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2\right)\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 14\right)$，当 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2$ 时显然不可能成立，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 14$，此时 p_k 的可能取值为 2,3 与 $p_k \equiv 5 \pmod{14}$ 矛盾。故方程(1)无解。

④ 若 $p_k \equiv 9 \pmod{14}$，下面对 α_k 分以下三种情况进行讨论。

i) 若 $\alpha_k \equiv 1,4 \pmod 6$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n)) = \varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \dfrac{\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right) - 8}{14} = \dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{14}$，若 $Z\left(n^2\right) = \varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{14} + 1\right)}{2}.$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8\right)\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 6\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 6$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8$ 成立，则 $p_k = 2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 6$，则 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$ 均与 $p_k \equiv 9 \pmod{14}$ 矛盾。

ii) 若 $\alpha_k \equiv 2,5 \pmod 6$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n)) = \varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \dfrac{\varphi(n) - 2}{14} = \dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 2}{14}$，若 $Z\left(n^2\right) = \varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 2}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 2}{14} + 1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-2\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-2$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-2$ 成立，则有 $p_k=2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12$ 成立，则有 $p_k=2$ 或 $p_k=3$ 均与 $p\equiv 9(\bmod 14)$ 矛盾。

iii) $\alpha_k \equiv 3,6(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)+10}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+10}{14}\left(\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+10}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+10\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+24\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+10$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+24$ 成立，证明方法同上，两式均不成立。综上所述，方程(1)无解。

⑤ 若 $p_k \equiv 11(\bmod 14)$，下面对 α_k 分以下三种情况进行讨论。

i) 若 $\alpha_k \equiv 1,4(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)-10}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-10}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-10}{14}\left(\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-10}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-10\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+4\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-10$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+4$ 成立，则 p_k 为 2 或 5 均与 $p\equiv 11(\bmod 14)$ 矛盾。

ii) 若 $\alpha_k \equiv 2,5(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)+2}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2}{14}\left(\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+16\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+16$ 成立。均有 $p_k=2$ 与 $p\equiv 11(\bmod 14)$ 矛盾。

iii) 若 $\alpha_k \equiv 3,6(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)+8}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8}{14}$，若 $Z\left(n^2\right)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8}{14}\left(\frac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid \left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+24\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+22$ 成立。当 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+8$ 时显然不成立，当 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+22$ 成立，则 $p_k=2$ 或 $p_k=11$，当 $p_k=2$ 显然不成立，当 $p_k=11$ 时，上式为 $11^{2\alpha_k} \mid 11^{\alpha_k}-11^{\alpha_k-1}+22$，化简为 $11^{2\alpha_k-1} \mid 11^{\alpha_k-1}-11^{\alpha_k-2}+2$，显然不成立。综上所述，方程(1)无解。

DOI: 10.12677/pm.2024.147268

⑥ 若 $p_k \equiv 13(\bmod 14)$，下面对 α_k 分以下三种情况进行讨论。

i) 若 $\alpha_k \equiv 1,3,5(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi(n)-12}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-12}{14}$，若 $Z(n^2)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-12}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-12}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k}\mid\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-12\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}-12$ 或 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+2$ 成立，则 p_k 为 2 与 p_k 为奇素数矛盾。

ii) 若 $\alpha_k \equiv 2,4,6(\bmod 6)$，由推论 1 得 $\varphi_{14}(SL(n))=\varphi_{14}\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\dfrac{\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)+12}{14}=\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12}{14}$，若 $Z(n^2)=\varphi_{14}(SL(n))$ 成立，则有下面的式子成立：

$$2^{2\alpha}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid\frac{\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12}{14}\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12}{14}+1\right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k}\mid\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12\right)\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+28\right)$，故 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+12$ 或 $p_k^{2\alpha_k}\mid p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}+28$ 成立。均有 $p_k=2$ 或 $p_k=7$ 与 $p_k\equiv 13(\bmod 14)$ 矛盾。综上所述方程(1)无解。

由此，便完成了定理 3 的证明。

4. 结语

本文利用伪 Smarandache 函数、Smarandache LCM 函数以及广义欧拉函数的基本性质，讨论了数论函数方程 $Z(n)=\varphi_{14}(SL(n))$ 的可解性，证明了该方程无正整数解。在此基础上，可进一步讨论数论函数方程 $Z(n)=\varphi_{pq}(SL(n))$ 的可解性，其中 p,q 是不同的素数。

参考文献

[1] 柯召, 孙琦. 数论函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021: 33.

[2] Cai, T.X. (2002) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (I). *Acta Arithmetica*, **103**, 313-320.

[3] Sandor, J. (2002) On a Dual of the Pseudo Smarandache Function. *Smarandache Notions Journal*, **13**, 18-23.

[4] Murthy, A. (2000) Some New Smarandache Sequences, Functions and Partitions. *Smarandache Notions Journal*, **11**, 179-183.

[5] 高丽, 鲁伟阳, 郝虹斐. 一类包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程[J]. 河南科学, 2013, 31(10): 1597-1599.

[6] 赵祈芬, 高丽. 包含伪 Smarandache 函数与欧拉函数的两个方程[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2017, 35(3): 55-58.

[7] 白继文, 赵西卿. 关于数论函数方程 $S(SL(n^2))=\varphi(n)$ 的解[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2017, 37(4): 31-33.

[8] 朱杰, 廖群英. 方程 $Z(n)=\varphi_e(SL(n))$ 的可解性[J]. 数学进展, 2019, 48(5): 541-554.

[9] 李改利, 高丽, 戴妍百, 等. 一类包含 Smarandache LCM 函数与广义欧拉函数的方程[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2023, 45(2): 181-187.

[10] 杨张媛, 赵西卿, 白继文. 两个数论函数方程解的探讨[J]. 江西科学, 2018, 36(4): 579-581.

[11] 马荣. Smarandache 函数及其相关问题研究[M]. 香港: 教育出版社, 2012.

[12] 高丽, 赵祈芬. 一类包含伪 Smarandache 函数与欧拉函数的方程[J]. 河南科学, 2017, 35(2): 180-183.