Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 48-52
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147270

对称群S_3和S_4的c-可补充子群

赵 佳

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2024年5月31日；录用日期：2024年6月30日；发布日期：2024年7月18日

摘 要

在有限群中，子群的c-可补充性质对刻画群结构有着重要影响。这些性质比较抽象，因此找一些具体的例子对于理解这些性质至关重要。基于c-可补充子群的概念，本文从具体的3次对称群和4次对称群出发，研究了其子群的c-可补充性质，并完全确定了其所有的c-可补充子群。所得到的结论对探讨c-可补充子群的抽象性质和理论课题起到积极的作用。

关键词

c-可补充性质，c-可补充子群，对称群

c-Supplemented Subgroups in the Symmetry Groups S_3 and S_4

Jia Zhao

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: May 31st, 2024; accepted: Jun. 30th, 2024; published: Jul. 18th, 2024

Abstract

In finite groups, the c-supplemented properties of subgroups have a significant impact on characterizing group structures. These properties are relatively abstract, so finding specific examples is crucial for understanding these properties. Based on the concept of c-supplemented subgroups, this paper studies the c-complementary properties of subgroups from the symmetry groups of specific degrees 3 and 4, and completely determines all their c-complementary subgroups. The conclusions obtained have a positive impact on exploring the abstract properties and theoretical research of c-supplemented subgroups.

文章引用：赵佳. 对称群 S_3 和 S_4 的 c-可补充子群[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 48-52. DOI: 10.12677/pm.2024.147270

Keywords

***c*-Supplemented Properties, *c*-Supplemented Subgroups, Symmetry Groups**

1. 引言

本文中所有的群皆为有限群，相关术语和符号以文献[1]-[3]为标准。设 H 是群 G 的子群，称 H 在 G 中有补充，如果存在 G 的子群 K 使 $G = HK$，这时 K 叫作 H 在 G 中的补充子群。特别地，当 $H \cap K \le H_G$ 时，称 H 在 G 中是 c-可补充的，K 是 H 在 G 中的 c-可补充子群。这里，H_G 是 H 在 G 中的柱心，即包含在 H 中 G 的最大正规子群。

子群的 c-可补充性质与群结构有着紧密的联系，国内外群论学者对相关课题进行了深入研究，并利用它考察了有限群的结构。例如，2000 年，Wang [4]利用了子群的 c-可补充的相关性质，得到了群 G 是可解的充要条件。2012 年，Asaad [5]考察了 c-可补充性质与 Sylow 子群之间的联系，发现了其对 p-幂零群的影响。2021 年，在群 G 为 CN-群的条件下，Li 等[6]等揭示了 c-可补充性质对超可解群的影响。进一步的研究可参考文献[7]-[10]。为了加深对 c-可补充性质这一抽象性质的理解，本文在一些具体的群中，即在 3 次对称群 S_3 和 4 次对称群 S_4 中，分析了其子群的 c-可补充性质，并完全确定了它们的 c-可补充子群。

2. 基本引理

定义 1 [4]称子群 H 在 G 中是 c-可补充的，如果存在 G 的子群 K 使得 $G = HK$，$H \cap K \le H_G$，这里，H_G 是 H 在 G 中的柱心，即包含在 H 中 G 的最大正规子群。

引理 1 [1] **(拉格朗日定理)**设 G 是有限群，$H \le G$，则 $|G| = |H||G:H|$。其中，$|G:H|$ 表示有限群 G 的子群 H 在 G 中的指数。

引理 2 [1]设 G 是有限群，H 和 K 是 G 的有限子群，则 $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$。

引理 3 [11] 3 次对称群 S_3 一共有 6 个子群，其中除去两个平凡子群外，有 3 个 2 阶子群和 1 个正规子群。具体如下：

1) 2 个平凡子群：$\{(1)\}$；S_3。

2) 3 个 2 阶子群：$H_3 = \{(1),(12)\}$；$H_4 = \{(1),(13)\}$；$H_5 = \{(1),(23)\}$。

3) 1 个 3 阶子群：$H_6 = \{(1),(123),(132)\}$，且 $H_6 \trianglelefteq S_3$。

引理 4 [12] 4 次对称群 S_4 一共有 30 个子群，其中除去两个平凡子群之外，有 9 个 2 阶循环子群、4 个 3 阶循环子群、7 个 4 阶子群、4 个 6 阶子群、3 个 8 阶子群以及 1 个 12 阶子群。具体如下：

1) 两个平凡子群：$\{(1)\}$；S_4。

2) 2 阶子群：$H_3 = \{(1),(12)\}$；$H_4 = \{(1),(13)\}$；$H_5 = \{(1),(14)\}$；$H_6 = \{(1),(23)\}$；$H_7 = \{(1),(24)\}$；$H_8 = \{(1),(34)\}$；$H_9 = \{(1),(12)(34)\}$；$H_{10} = \{(1),(13)(24)\}$；$H_{11} = \{(1),(14)(23)\}$。

3) 3 阶子群：

$H_{12}=\{(1),(123),(132)\}$；$H_{13}=\{(1),(124),(142)\}$；

$H_{14}=\{(1),(134),(143)\}$；$H_{15}=\{(1),(234),(243)\}$。

4) 4 阶子群：

$H_{16}=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$；$H_{17}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$；

$H_{18}=\{(1),(13),(24),(13)(24)\}$；$H_{19}=\{(1),(14),(23),(14)(23)\}$；$H_{20}=\{(1),(1234),(13)(24),(1432)\}$；

$H_{21}=\{(1),(1243),(14)(23),(1342)\}$；$H_{22}=\{(1),(1324),(12)(34),(1423)\}$。

其中，H_{16}是克莱因 4 元群 K_4。

5) 6 阶子群：

$H_{23}=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$；

$H_{24}=\{(1),(12),(14),(24),(124),(142)\}$；

$H_{25}=\{(1),(13),(14),(34),(134),(143)\}$；

$H_{26}=\{(1),(23),(24),(34),(234),(243)\}$。

6) 8 阶子群：

$H_{27}=\{(1),(13),(24),(12)(34),(14)(23),(13)(24),(1234),(1432)\}$；

$H_{28}=\{(1),(14),(23),(12)(34),(14)(23),(13)(24),(1243),(1342)\}$；

$H_{29}=\{(1),(12),(34),(12)(34),(14)(23),(13)(24),(1423),(1324)\}$。

7) 12 阶子群

$H_{30}=\{(1),(12)(34),(14)(23),(13)(24),(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243)\}$，其中 $H_{30}=A_4$ 是 4 次交错群。

3. 主要结果

结论 1 S_3 的所有子群都是 c-可补充的。

证明：设 H 是 S_3 的子群。根据定义 1 和引理 3，我们进行以下讨论：

1) 对于两个平凡子群 $\{(1)\}$ 和 S_3：

当 $H=\{(1)\}$ 时，显然在 S_3 中是 c-可补充的；

当 $H=S_3$ 时，取 $K=\{(1)\}$，显然在 S_3 中也是 c-可补充的。

2) 对于 2 阶子群 $H_i\,(i=3,4,5)$：

当 $H=H_i$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$。取 $K=H_6$，$S_3=H_iH_6$，且 $H_i\cap H_6=\{(1)\}\le H_G$，故 $H_i\,(i=3,4,5)$ 在 S_3 中是的 c-可补充的。

3) 对于 3 阶子群 H_6：

当 $H=H_6$ 时，其柱心 $H_G=H_6$。取 $K=H_j\,(j=3,4,5)$，有 $S_3=H_6H_j$，且 $H_6\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 H_6 在 S_3 中是的 c-可补充的。

结论 2 S_4 的 c-可补充子群：

1) 1 阶子群 $H=\{(1)\}$ 和 24 阶子群 S_4 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群分别为 S_4 和 $\{(1)\}$；

2) 2 阶子群 $H_i\,(i=3,\cdots,8)$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群是 A_4；

3) 3 阶子群 $H_i\,(i=12,\cdots,15)$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群是 8 阶子群 $H_j\,(j=27,28,29)$；

4) 4 阶子群 H_{16} 和 $H_i\,(i=20,\cdots,22)$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群是 $H_j\,(j=23,\cdots,26)$；

5) 6 阶子群 $H_i\,(i=23,\cdots,26)$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群是 4 阶子群 H_{16} 和 $H_j\,(j=20,21,22)$；

6) 8 阶子群 $H_i\,(i=27,28,29)$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充子群是 $H_i\,(i=12,\cdots,15)$；

7) 12 阶子群 $H=A_4$ 在 S_4 中是 c-可补充的，其 c-可补充的子群是 $H_j\left(j=3,\cdots,8\right)$。

证明：设 H 是 S_4 的子群。根据定义 1 和引理 4，我们进行以下分析：

1) 两个平凡子群 $\{(1)\}$ 和 S_4：

当 $H=\{(1)\}$ 时，显然在 S_4 中是 c-可补充的；

当 $H=S_4$ 时，取 $K=\{(1)\}$，其柱心 $H_G=S_4$，有 $S_4=HK$，$H\cap K=\{(1)\}\le S_4$。于是，H 在 S_4 中是 c-可补充的，故结论(1)成立。

2) 2 阶子群 $H_i\left(i=3,\cdots,11\right)$：

① 当 $H=H_i\left(i=3,\cdots,8\right)$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，由引理 2，取 $K=A_4$，有 $S_4=H_iA_4$，$H_i\cap A_4=\{(1)\}\le H_G$，故结论(2)成立；

② 当 $H=H_i\left(i=9,10,11\right)$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$。因为 $H_i\le A_4$，所以 $S_4\ne H_iA_4$，4 次对称群 S_4 不能分解成 H_i 与 S_4 的真子群的乘积。但若 $K=S_4$，有 $S_4=H_iS_4$，$H_i\cap S_4=H_i>H_G$，不满足定义，故 $H_i\left(i=9,10,11\right)$ 在 S_4 中不是的 c-可补充的。

3) 3 阶子群 $H_i\left(i=12,\cdots,15\right)$：

当 $H=H_i$，其柱心 $H_G=\{(1)\}$。因为 $H_i\le A_4$，所以 $S_4\ne H_iA_4$；由引理 1 可知，S_4 可以分解成 3 阶子群和 8 阶子群 $H_j\left(j=27,28,29\right)$ 的乘积，又因为 $H_i\cap H_j=\{(1)\}$（$i=12,\cdots,15$；$j=27,28,29$），所以由引理 2 有，$S_4=H_iH_j$，$H_i\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 H_i 在 S_4 中是 c-可补充的。

4) 4 阶子群 $H_i\left(i=16,\cdots,22\right)$：

① 当 $H=H_{16}$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，取 $K=H_j\left(j=23,\cdots,26\right)$，有 $S_4=H_{16}H_j$，$H_i\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 H_{16} 在 S_4 中是 c-可补充的。

② 当 $H=H_i\left(i=17,18,19\right)$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，但 $S_4\ne H_iH_j\left(i=17,18,19;j=23,\cdots,26\right)$，故 $H_i\left(i=17,18,19\right)$ 在 S_4 中不是 c-可补充的。

③ 当 $H=H_i\left(i=20,21,22\right)$ 时，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，先考虑将 S_4 分解为 4 阶与 6 阶子群的乘积，由于 $H_i\cap H_j=\{(1)\}$，其中 $j=23,\cdots,26$，由引理 2，取 $K=H_j\left(j=23,\cdots,26\right)$，有 $S_4=H_iH_j$，$H_i\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 $H_i\left(i=20,21,22\right)$ 在 S_4 中是 c-可补充的。

5) 6 阶子群 $H_i\left(i=23,\cdots,26\right)$：

当 $H=H_i$，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，由 4)中的分析，取 $K=H_j\left(j=16,20,21,22\right)$，有 $S_4=H_iH_j\left(i=23,\cdots,26;j=16,20,21,22\right)$，$H_i\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 $H_i\left(i=23,\cdots,26\right)$ 在 S_4 中是 c-可补充的。

6) 8 阶子群 $H_i\left(i=27,\cdots,29\right)$：

当 $H=H_i$，其柱心 $H_G=\{(1)\}$，取 $K=H_j\left(j=12,\cdots,15\right)$，$S_4=H_iH_j\left(i=27,28,29;j=12,\cdots,15\right)$，$H_i\cap H_j=\{(1)\}\le H_G$，故 $H_i\left(i=27,28,29\right)$ 在 S_4 中是 c-可补充的。

7) 12 阶子群 A_4：

当 $H=A_4$，其柱心 $H_G=A_4$，取 $K=H_j\left(j=3,\cdots,8\right)$，有 $S_4=A_4H_j$，$A_4\cap H_j\le H_G$，故 A_4 在 S_4 中是 c-可补充的。

4. 总结

本文完全确定了三次对称群 S_3 和四次对称群 S_4 中的 c-可补充的子群。这有助于加深理解 c-可补充子群的定义和相关性质，也为后续研究其对有限群结构的影响提供了例子支撑。

基金项目

四川省自然科学基金项目(2022NSFSC1843)。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] 徐明曜, 黄建华, 李慧陵, 等. 有限群导引(下) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] Guo, W.B. (2000) The Theory of Classes of Groups. Science Press-Kluwer Academic Publishers.

[4] Wang, Y. (2000) Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups *c*-Supplemented. *Journal of Algebra*, **224**, 467-478. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8079

[5] Asaad, M. (2012) On *c*-Supplemented Subgroups of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **362**, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.03.041

[6] 李样明, 赵立博. 有限 CN-群与有限 *c*-可补群[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2021, 42(4): 379-392.

[7] Ballester-Bolinches, A., Wang, Y. and Xiuyun, G. (2000) *c*-Supplemented Subgroups of Finite Groups. *Glasgow Mathematical Journal*, **42**, 383-389.

[8] Heliel, A.A. (2014) A Note on *c*-Supplemented Subgroups of Finite Groups. *Communications in Algebra*, **42**, 2319-2330.

[9] Hall, P. (1937) A Characteristic Property of Soluble Groups. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 198-200. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.2.198

[10] 鲍宏伟, 张佳, 缪龙. 有限群的可补的 Sylow 子群[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(11): 898-901.

[11] 韩士安, 林磊. 近世代数[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2009.

[12] 郑伟. 论 4 次对称群的子群[J]. 科技信息, 2014(2): 69-70.