Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 69-74
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147273

Hans汉斯

常微分方程中积分因子的性质及其应用

骆俊任

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年6月7日；录用日期：2024年7月8日；发布日期：2024年7月22日

摘 要

积分因子是常微分方程中的一个重要内容，同时也是学生不易掌握和应用的一个知识点。利用积分因子不仅可以求解满足恰当积分条件的一阶微分方程，更可以和微分中值定理产生联系，因此积分因子在各种数学竞赛以及历年考研数学试题中频繁出现。本文在常微分方程教材的基础上，从恰当方程出发，介绍了积分因子以及相关性质。最后，给出了积分因子的一些应用。

关键词

积分因子，恰当方程，微分中值定理

The Properties and Applications of Integrating Factors in Ordinary Differential Equations

Junren Luo

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jun. 7th, 2024; accepted: Jul. 8th, 2024; published: Jul. 22nd, 2024

Abstract

The integrating factors are an important content in ordinary differential equations, and also a knowledge point that students find difficult to master and apply. Making use of the integrating factors can not only solve first-order differential equations that satisfy appropriate integration conditions, but also establish connections with the differential mean value theorem. Therefore, the integrating factors have frequently appeared in various mathematical competitions and past postgraduate mathematics exam questions. In this paper, based on the textbook of ordinary differential equations, we introduce integrating factors and related properties from appropriate equations. Finally,

文章引用: 骆俊任. 常微分方程中积分因子的性质及其应用[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 69-74.
DOI: 10.12677/pm.2024.147273

some applications of the integrating factors are presented.

Keywords

Integrating Factors, Appropriate Equations, Differential Mean Value Theorem

1. 引言

常微分方程的发展历史可以追溯到 17 世纪，对于一类特殊的一阶微分方程，牛顿利用无穷级数进行求解。在 18 世纪，瑞士大数学家欧拉提出了积分因子的概念，他还确定了采用积分因子方法的微分方程类型，证明了只要是可用变量分离求解的微分方程都可以用积分因子进行求解，但是反之不然[1]。

积分因子及其应用在常微分方程以及数学分析中有着重要的作用。如何求解积分因子一直是一个难点问题。另外，积分因子可以和罗尔定理结合应用，构造相应的辅助函数，更深刻地揭示辅助函数构造的原理，可以在教学过程中帮助学生理解和掌握如何构造辅助函数。

2. 积分因子的定义和性质

在常微分方程中，积分因子的性质和应用一直是教学的重点和难点。我们首先给出恰当方程的定义。

定义 1 [2]：称方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

为区域 $D\subseteq R^2$ 上的恰当方程，如果存在 D 上的可微函数 $U(x,y)$，使得：

$$\mathrm{d}U(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

上面的 $U(x,y)$ 称为 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的原函数。

对于恰当方程，我们可以很快得到，方程的通解为 $U(x,y)=C$。那么我们又该如何判断方程是否为恰当方程呢？我们有如下定理。

定理 2 [2]：设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在矩形区域 $D=(a,b)\times(c,d)$ 内连续可微，则方程(1)为 D 内的恰当方程当且仅当：

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

接下来，我们介绍积分因子的概念。

定义 3 [2]：如果不恒为零的函数 $\mu(x,y)$ 使得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

成为恰当方程，则称 $\mu(x,y)$ 是方程(1)的一个积分因子。

如果对于方程(1)，我们已经得到了一个积分因子 $\mu(x,y)$，使得：

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}U(x,y).$$

则对于任何连续可微的一元函数 $\Phi(t)$，函数 $\mu(x,y)\Phi(U(x,y))$（如果不恒为零)也是方程(1)的一个积分因子[2]。

但是如何求解积分因子一直是一个热点问题。目前常见的是观察法、分项组合法以及公式法，参见[3] [4]。我们以如下例子来说明分项组合法。

例 1 求解方程： $y^4\mathrm{d}x+\left(2x^2-3xy^3\right)\mathrm{d}y=0$ 。

解：将方程分组，即为：

$$\left(y^4\mathrm{d}x-3xy^3\mathrm{d}y\right)+2x^2\mathrm{d}y=0.$$

易得前一组的积分因子为 $\frac{1}{xy^4}$，且

$$\frac{1}{xy^4}\left(y^4\mathrm{d}x-3xy^3\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}\ln\left|\frac{x}{y^3}\right|.$$

那么对任何非零的连续可微函数 Φ， $\frac{1}{xy^4}\Phi\left(\frac{x}{y^3}\right)$ 也是第一组的积分因子。

对于第二组，有积分因子 $\frac{1}{x^2}$，

$$\frac{2x^2\mathrm{d}y}{x^2}=2\mathrm{d}y.$$

那么对任何非零的连续可微函数 ψ， $\frac{1}{x^2}\psi(y)$ 也是第二组的积分因子。

因此，我们待定 Φ 和 ψ，使得：

$$\frac{1}{xy^4}\Phi\left(\frac{x}{y^3}\right)=\frac{1}{x^2}\psi(y).$$

经过计算，可以得到，当 $\Phi(r)=\frac{1}{r}=\psi(r)$，上式成立。此时得到原方程的积分因子 $\frac{1}{x^2y}$，从而得到恰当方程为：

$$\frac{y^3\mathrm{d}x-3xy^2\mathrm{d}y}{x^2}+\frac{2\mathrm{d}y}{y}=0.$$

得到通解为：

$$-\frac{y^3}{x}+2\ln|y|=C.$$

最后补上特解 $x=0$ 和 $y=0$ 。

3. 应用举例

有了积分因子之后，由于积分因子是作为乘子乘到方程中的，可以很大程度地避免讨论分母出现零的情形，这对于学生求解微分方程提供了便利，尤其是针对可分离变量的微分方程。

利用积分因子，对于微分中值定理中需要用到罗尔定理构造辅助函数的题目有很大的帮助，便于学生理解和解题。由于大学的课程设置中，数学分析或者高等数学都是在大一，而常微分方程一般是在大二、大三，这就需要任课老师在平时的练习以及授课中适时地提醒学生将两者方法结合起来。

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且在 $(0,\pi)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得：

$$f'(\xi)+f(\xi)\cot\xi=0.$$

证：由结论分析可知，需要构造一个函数 $g(x)$，使得 $g(x)$ 满足罗尔定理的条件，且 $g(x)$ 的导数含有 $f'(x)+f(x)\cot x$ 的因子，即 $f'(x)\sin x+f(x)\cos x$。因此，构造：

$$g(x)=f(x)\sin x,$$

那么 $g(x)\in C[0,\pi]$，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $g(0)=g(\pi)=0$。根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得：

$$g'(\xi)=f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$$

从而完成证明。

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$。证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得：

$$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证：观察结论可知，构造的辅助函数需要在求导之后含有因子 n，才能使得结论中的等式成立。因此，取：

$$g(x)=x^n f(x),$$

那么 $g(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $g(0)=g(1)=0$。根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得：

$$g'(\xi)=\xi^n f'(\xi)+n\xi^{n-1}f(\xi)=0.$$

又由于 $\xi\neq 0$，上式两边同除以 ξ^{n-1}，即得到所需结论。

事实上，以上两个例题都可以利用积分因子。但是数学分析或者高等数学都是在大一授课，此时学生还没有接触到积分因子这个知识点。因此，老师在授课的时候可以引导学生去思考构造的辅助函数和积分因子之间的联系，让学生自主思考，激发学生的学习兴趣。接下来，我们针对以上两个例题，简要说明下积分因子的构造。

对于例 1 中的结论：$f'(\xi)+f(\xi)\cot\xi=0$。先把 ξ 换成 x，即我们需要证明：

$$f'(x)+f(x)\cot x=0.$$

利用公式法，可以知道上式的积分因子为：

$$\mathrm{e}^{\int\cot x\mathrm{d}x}=\sin x,$$

所以构造辅助函数为 $g(x)=\sin xf(x)$。

对于例 2 中的结论：$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。同理，先把 ξ 换成 x，且 $x\neq 0$，即我们需要证明：

$$f'(x)+\frac{n}{x}f(x)=0.$$

利用公式法，可以知道上式的积分因子为：

$$\mathrm{e}^{\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x}=x^n,$$

所以构造辅助函数为 $g(x)=x^n f(x)$。

然而，有的题目是需要用到多次微分中值定理，相应的积分因子是需要用在后面构造辅助函数，这无疑是增加了题目的难度。

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=f'(0)=2$，$f(2)=-2$，对于 $x\in[0,2]$，$f(x)\neq 0$。证明至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得：

$$f(\xi)f'(\xi)-f''(\xi)=0.$$

证：根据需要证明的结论，我们知道，需要利用罗尔定理，构造相应的辅助函数 $g(x)$，使得 $g(x)$ 的导数含有因子 $f(x)f'(x)-f''(x)$。因此，可以构造：

$$g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)-f'(x),$$

根据题目中的已知条件，可以得到 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $(0,2)$ 内可导：

$$g(0)=\frac{1}{2}f^2(0)-f'(0)=0.$$

但是这仍然不够。为了使所构造的辅助函数 $g(x)$ 满足罗尔定理，我们需要得到至少存在一点 $\lambda\in(0,2)$，使得：

$$g(\lambda)=\frac{1}{2}f^2(\lambda)-f'(\lambda)=0.$$

根据已知条件，对于 $x\in[0,2]$，$f(x)\neq 0$。所以上式中 λ 换成 x，并同时除以 $f^2(x)$，即我们需要证明：

$$\frac{1}{2}-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=0.$$

因此，我们构造的辅助函数 $h(x)$ 的导数中需要含有因子 $\frac{1}{2}-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$。从而我们取：

$$h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{f(x)}.$$

那么 $h(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $(0,2)$ 内可导，且

$$h(0)=0+\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2}$$

以及

$$h(2)=1+\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2}=h(0).$$

所以 $h(x)$ 满足罗尔定理的条件，至少存在一点 $\lambda\in(0,2)$，使得：

$$h'(\lambda)=\frac{1}{2}-\frac{f'(\lambda)}{f^2(\lambda)}=0.$$

那么我们就完成了证明。

上面这个例题用了两次罗尔定理，构造了两次不同种类的辅助函数，这无疑是增加了题目的难度。事实上，对于：

$$\frac{1}{2}f^2(x)-f'(x)=0,$$

$\frac{1}{f^2(x)}$ 就是上式的积分因子。因此，了解并掌握积分因子对于学生利用微分中值定理构造辅助函数具有较大帮助。

基金项目

上海理工大学本科教学研究与改革项目(JGXM202310)。

参考文献

[1] 安然, 田十方, 刘晓薇. 一阶微分方程的积分因子研究[J]. 齐鲁工业大学学报, 2021, 35(1): 69-72.

[2] 楼红卫, 林伟. 常微分方程[M]. 第 1 版. 上海: 复旦大学出版社, 2007.

[3] 寸得偶, 晏林. 积分因子求法探讨[J]. 文山学院学报, 2016, 29(3): 107-112.

[4] 周正新, 李静怡, 颜跃新. 几类一阶微分方程的逆积分因子与可积性[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2018, 21(2): 13-16+20.