Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 68-73
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148305

一道全国大学生数学竞赛试题的多种解法探究

冯　旭，蔡学鹏*，廖汝豪

新疆农业大学数理学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年6月6日；录用日期：2024年7月22日；发布日期：2024年8月19日

摘　要

本文研究了2022年第十四届全国大学生数学竞赛预赛(数学A类)的一道试题，给出了此试题五种不同的解法。

关键词

母线，圆柱面，中轴线

The Exploration of Various Solutions to a Problem in the NMCUS

Xu Feng, Xuepeng Cai*, Ruhao Liao

College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 6th, 2024; accepted: Jul. 22nd, 2024; published: Aug. 19th, 2024

Abstract

This paper studies a question of the preliminary competition of the 14th National College Students Mathematics Competition in 2022 (Mathematics Class A), and gives five different solutions to this question.

Keywords

Generating Line, Cylindrical Surface, Axle Wire

*通讯作者。

文章引用: 冯旭, 蔡学鹏, 廖汝豪. 一道全国大学生数学竞赛试题的多种解法探究[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 68-73.
DOI: 10.12677/pm.2024.148305

1. 引言

全国大学生数学竞赛的设立初衷在于响应教育改革的迫切需求，致力于培养国家所需的高水平理论创新型人才。参与全国大学生数学竞赛能够有效激发学生的学习热情，进一步提升他们的数学素养。本文对 2022 年第十四届全国大学生数学竞赛(数学 A 类)一道试题进行拓展研究，得到此试题的多种解法，即，截平面法、空间中的距离公式、椭圆方程及其非标准形式、以及坐标变换和矩阵知识的应用[1]-[4]，这样有助于进一步理解数学问题的产生和延伸解题思路，提升学生解决数学问题的能力，拓展学生的数学视野和激发学生解决数学问题的兴趣，同时也能为学生解决大学生数学竞赛试题奠定一定的解析几何基础。

原题 已知圆柱面经过一条母线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$，以及两点 $(0,0,2)$ 与 $(1,-1,-1)$，求圆柱面的方程表达式。

试题分析：求解圆柱面方程的基本方法是通过已知的中轴线方程和半径来推导圆柱面的方程。本题则是通过已知三条母线的方程，利用五种方法来确定圆柱面的中轴线方程。解决此题所用到的知识点如下：

①：过点 $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 的直线方程为：$l':\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{1}$

②：已知过点 $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 且法向零为 $\boldsymbol{b}=\left(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\right)$ 的平面方程为 $\alpha_1\left(x-x_1\right)+\beta_1\left(y-y_1\right)+\gamma_1\left(z-z_1\right)=0$

③：空间中两条平行间距离公式：设 l_1',l_2' 上的任意两点分别为：$V_1\left(m_1,m_2,m_3\right),V_2\left(m_2,m_2,m_2\right)$，两直线的方向向量 $\boldsymbol{c}=\left(t_1,t_2,t_3\right)$，则距离公式为：$d'=\dfrac{\left|\boldsymbol{V_1V_2}\times\boldsymbol{c}\right|}{|\boldsymbol{c}|}$

首先求三条母线的方程：通过这一条母线方程的解析式我们可以求得圆柱面的母线的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，且过 $B_1(1,1,1)$，也易求得过 $B_2=(0,0,2)$，$B_3=(1,-1,-1)$ 的母线方程分别为

$$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{1};$$
$$l_3:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+1}{1}.$$

为方便本文叙述，令 Σ 表示所求圆柱面。

此题就转化为已知圆柱面的三条母线方程如何求解圆柱面 Σ 的方程问题。解决此题的常规思路有两步：第一步求出圆柱面半径 R 和中轴 L 的方程，第二步设 D 为圆柱面上一点，则以点 D 到中轴线 L 的距离 $d=\dfrac{|\boldsymbol{BD}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}$ 等于圆柱面半径 R 为依据求解圆柱面方程，其中 B 为中轴线上的任意一点，$\boldsymbol{a}$ 是中轴 L 的方向向量。

2. 试题解法探究

解法分析 1 先确定与 l_1,l_2,l_3 垂直的横截圆平面方程，进而求得这三条母线与横截圆平面的三个交点，

连接这三个点可以得到一个直角三角形，从而可以计算出此横截圆的半径和横截圆的圆心坐标，由于所求圆柱面的中轴 L 过此圆心，于是可求得 L 的对称式方程，运用点到直线的距离公式得出圆柱面方程。

解法 1 (截面法)向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 是中轴线 L 的方向向量，我们可以在 l_1 上找到一点 $B_1(1,1,1)$，然后过 B_1 点作出一个平面 S，使得平面 S 与 l_1,l_2,l_3 都垂直，可以求解出平面 S 方程为 $x+z-2=0$，此平面与 l_2,l_3 交点坐标分别为 $B_2(0,0,2)$ 与 $B_3(2,-1,0)$，顺次连接 B_1,B_2,B_3 可得到 $\Delta B_1B_2B_3$，可得 $|B_1B_2|=\sqrt{3}$，$|B_1B_3|=\sqrt{6}$，$|B_2B_3|=3$，由勾股定理可得 $\Delta B_1B_2B_3$ 是直角三角形，其中 B_2B_3 为斜边，然后可以确定横截圆的圆心与 B_2B_3 的中点重合。易求出横截圆圆心坐标为 $O\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$，$R=\frac{|B_2B_3|}{2}=\frac{3}{2}$。

圆柱面的中轴线为过 O 点且与平面 S 垂直的直线，进而求得方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-1}{1}。$$

在圆柱面上的任一位置找一点记为 $D(x,y,z)$，可知此点与中轴线的距离为 $\frac{3}{2}$，计算公式如下：

$$\frac{|\boldsymbol{OD}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\left|\left(x-1,y+\frac{1}{2},z-1\right)\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{2}。$$

化简整理得到圆柱面的最终方程为：

$$x^2+2y^2+z^2-2xz+2y-4=0。$$

注：此种解题方法中由勾股定理可以求得 $\Delta B_1B_2B_3$ 为直角三角形，因此，大大简化了此题的难度，只需要运用圆周角的性质就可以确定圆心，如果 $\Delta B_1B_2B_3$ 变为一般的三角形，容易得出三条边长，已知三边可以通过海伦公式求解半径。

$$R=\frac{d_1d_2d_3}{4\sqrt{p(p-d_1)(p-d_2)(p-d_3)}},$$

其中 $p=\frac{d_1+d_2+d_3}{2}$。

代入计算可得：$\Delta B_1B_2B_3$ 外接圆半径 $R=\frac{3}{2}$，再根据圆心 $O(x,y,z)$，满足 $|\boldsymbol{OB}_1|=|\boldsymbol{OB}_2|=|\boldsymbol{OB}_3|$，可得圆心坐标为 $\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$。得出圆心后可以按照上面的步骤进行求解。海伦公式的引入使得此种解题方法具有了普遍性。

解法分析 2 已知母线 l_1,l_2,l_3 的方程，引入一种新的方法求解圆柱面中轴线的方程。分别以这三条母线为中轴线，以 R 为半径作 3 个新的圆柱面，这三个新的圆柱面的交线就是所求的圆柱面中轴线方程，然后在这三个圆柱面上各取一点，利用距离公式建立等式关系就可以求解圆柱面方程。

解法 2 (距离公式)因为圆柱面的中轴线平行于三条互相平行的母线 l_1,l_2,l_3，易知该中轴线到这三条母线的距离相等，以每条母线到中轴线的距离为半径作新的圆柱面，三个新的圆柱面相交得到一条唯一的公共轴。此公共轴方程即为所求的中轴线方程。在所求圆柱面的中轴线上任取一点，可记为 $E(x,y,z)$，在 l_1,l_2,l_3 上分别取 $F_1(1,1,1)$，$F_2(0,0,2)$，$F_3(1,-1,-1)$，可得方程如下：

$$\begin{cases} R=\dfrac{\left|\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{E}\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}; \\ R=\dfrac{\left|\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{E}\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}; \\ R=\dfrac{\left|\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{E}\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}. \end{cases}$$

得出 $x=1$， $y=-\dfrac{1}{2}$， $z=1$， $R=\dfrac{3}{2}$。最终带入化简得圆柱面中轴线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-1}{1}\text{。}$$

后续步骤同解法 1。

解法分析 3 中轴线 L 上任取一点记为 $P(x_0,y_0,z_0)$，在 l_1,l_2,l_3 上分别各取一点，分别记为 $Q_1(x_1,y_1,z_1)$，$Q_2(x_2,y_2,z_2)$， $Q_3(x_3,y_3,z_3)$。这些点可以看成以中轴线 L 上的点为圆心的圆周上，因此直线 l_1,l_2,l_3 上任一点到 L 距离相等。根据此等量关系列出方程，进而可以求解出圆柱面方程。

解法 3 (等距离法)设点 $P(x_0,y_0,z_0)\in L$，因此可得 L 的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}\text{。}$$

令点 $Q(x,y,z)\in\Sigma$，点 $Q_1(x_1,y_1,z_1)\in l_1$，由于 Q 到 L 的距离等于 Q_1 到 L 的距离，即可得

$$\frac{\left|\boldsymbol{PQ}\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\left|\boldsymbol{PQ}_1\times(1,0,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}},$$

对上式进一步化简可求得 Σ 方程

$$2(y-y_0)^2+(x-x_0-z+z_0)^2=2(y-y_1)^2+(x-x_1-z+z_1)^2.$$

由于 $Q_1(x_1,y_1,z_1)\in l_1$，即我们将 $\begin{cases}x_1-z_1=0\\ y_1=1\end{cases}$ 代入圆柱面方程得

$$2(y-y_0)^2+(x-x_0-z+z_0)^2=2(y_0-1)^2+(x_0-z_0)^2\text{。}$$

同样的方法，我们可在 l_2,l_3 上分别取一点记为 $Q_2(x_2,y_2,z_2)$ 和 $Q_3(x_3,y_3,z_3)$，于是得到圆柱面方程分别如下

$$2(y-y_0)^2+(x-x_0-z+z_0)^2=2y_0^2+(x_0-z_0+2)^2,$$

$$2(y-y_0)^2+(x-x_0-z+z_0)^2=2(y_0+1)^2+(x_0-z_0-2)^2.$$

求解可得 $x_0=z_0, y_0=-\dfrac{1}{2}$，代入可得所求圆柱面方程为

$$x^2+2y^2+z^2+2y-2xz-4=0\text{。}$$

解法分析 4 已知 l_1,l_2,l_3 的方程，找一个垂直于这三条母线的一个平面，此平面与这三条母线交于三点，将这三点两两连接得到三条线段，分别求这三条线段中垂面方程，这三个中垂面的交线方程即为所求的中轴线方程。平面 $z=0$ 去截这个圆柱面可以得到一个椭圆，设法求出椭圆的方程，与圆柱面的任意一条母线方程联立即可求解出圆柱面的方程。

解法 4 (构造椭圆)在 l_1 上取点 $M_1(1,1,1)$，过 M_1 找一个垂直 l_1,l_2,l_3 的平面 π，求得平面 π 的方程为 $x+z-2=0$。可以求得平面 π 分别与 l_2,l_3 交于点 $M_2(0,0,2)$，$M_3(2,-1,0)$。

于是可求得线段 M_1M_2 和线段 M_1M_3 的垂直平分面方程分别为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{3}{2}\right)=0,$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)-2y-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0。$$

解方程组

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{3}{2}\right)=0,\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)-2y-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0.\end{cases}$$

可得中轴线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{0}=\frac{z}{1}。$$

因为坐标面 $z=0$ 与圆柱面不垂直且与圆柱面的母线不平行，所以坐标面 $z=0$ 与圆柱面的交线是一个椭圆。易得椭圆的中心为 $O\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，平面 $z=0$ 分别与 l_1,l_2,l_3 相交，可求得交点分别为 $N_1(0,1,0)$，$N_2(-2,0,0)$，$N_3(0,-1,0)$，求得椭圆方程是 $2x^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=9$。进一步我们可以得到 Σ 的一条准线 C 方程为

$$C:\begin{cases}2x^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=9,\\ z=0.\end{cases}$$

设点 $Q(x,y,z)\in\Sigma$，过 Q 点的母线与准线 C 交于点 (x_0,y_0,z_0)，则

$$\begin{cases}2x_0^2+4\left(y_0+\frac{1}{2}\right)^2=9,\\ z_0=0,\\ \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}.\end{cases}$$

化简得

$$x^2+2y^2+z^2+2y-2xz-4=0。$$

即上述方程为所求圆柱面方程。

解法分析 5 (坐标变换)由题意易知坐标平面分别与母线 l_1,l_2,l_3 不垂直，为了得到圆柱面的标准方程，需要坐标变换得到新的坐标系。在新的坐标系下，使得母线 l_1,l_2,l_3 与其中一个坐标平面垂直，最后通过相对应的坐标变换的逆变换进一步求得圆柱面方程。

解法 5 因为 z 轴正向 $\boldsymbol{c}=(0,0,1)$ 与直线 l_1,l_2,l_3 的方向向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 的夹角为 $\theta=\frac{\pi}{4}$，因此我们将坐

标系 $O\text{-}xyz$ 绕 y 轴逆时针旋转 θ，使得新 z 轴正方向与 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 相同，记旋转后的坐标系为 $O\text{-}XYZ$，则坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}。$$

在坐标系 $O\text{-}XYZ$ 中，我们可求得直线 l_1,l_2,l_3 的方程分别为

$$l_1:\begin{cases} X=0 \\ Y=1 \end{cases}，\quad l_2:\begin{cases} X=-\sqrt{2} \\ Y=0 \end{cases}，\quad l_3:\begin{cases} X=\sqrt{2} \\ Y=-1 \end{cases}。$$

于是容易求得在坐标系 $O\text{-}XYZ$ 中过直线 l_1,l_2,l_3 的圆柱面方程为

$$X^2+\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}。$$

于是我们再将新坐标 X,Y,Z 通过坐标变换公式变换为坐标 x,y,z，可得圆柱面方程为

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x-z)\right]^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}。$$

3. 小结

本题共采用了五种不同的求解方法，分别涉及到三角形的性质、截平面法、空间中的距离公式、椭圆方程及其非标准形式、以及坐标变换和矩阵知识的应用。这些解法各有优劣，前三种方法相对直观且易于理解，但计算复杂度和繁琐程度较高；第四种方法引入了椭圆方程，极大简化了计算量，但需要对非标准方程有深入理解；第五种方法则结合了坐标变换和高等代数中矩阵的相关知识，计算复杂度较高且对学生的思维能力提出了更高要求。但是此方法具有普遍性。总体而言，这种多角度的解题方法展示不同的数学思维方式，有助于培养学生的发散思维能力和独立解决问题的能力。通过这些方法的比较，学生可以从不同的角度理解和解决复杂的数学问题，提升他们在数学竞赛和实际应用中的能力。

基金项目

新疆自然科学基金(2022D01A218)；新疆农业大学教研教改项目(2024PTJG092)。

参考文献

[1] 闫雨轩，王玉. 一道全国大学生数学竞赛试题的五种解法[J]. 高等数学研究, 2023, 26(2): 22-24+48.
[2] 王建平，张香伟. 一道空间解析几何问题的八种解法[J]. 高等数学研究, 2014, 17(4): 77-79.
[3] 盖俊震. 空间解析几何中一道题的五种不同解法[J]. 产业与科技论坛, 2011, 10(22): 160-161.
[4] 朱永婷. 一道空间解析几何习题的多种解法[J]. 高等数学研究, 2019, 22(2): 37-38.