Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 1-5
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148296

函数的幂级数展开及其应用

朱　艳

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年6月25日；录用日期：2024年7月24日；发布日期：2024年8月7日

摘　要

函数的幂级数展开是高等数学课程中的重要内容之一，作为一个强有力的数学工具，在分析学中占有举足轻重的地位，它允许我们将复杂的函数表示为简单多项式的无限和。幂级数展开在数学、物理学、工程学等领域有广泛的应用，如求解微分方程、近似复杂函数、信号处理等。本文主要探究函数的幂级数展开在组合数学中的应用，利用其得到一些特殊的数列，包括斐波那契数列和卡特兰数。

关键词

幂级数展开，高等数学，斐波那契数列，卡特兰数

The Power Series Expansion of Functions and Its Application

Yan Zhu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jun. 25th, 2024; accepted: Jul. 24th, 2024; published: Aug. 7th, 2024

Abstract

The power series expansion of functions is one of the important contents in the course of advanced mathematics. As a powerful mathematical tool, it plays an important role in analysis. It allows us to express complicated functions as infinite sums of simple polynomials. The power series expansion is widely used in mathematics, physics, engineering and other fields, such as solving differential equations, approximating complicated functions, signal processing, etc. In this article, we mainly explore the application of power series expansion of functions in combinatorics, and use it to obtain some special sequences, including Fibonacci sequence and Catalan number.

文章引用：朱艳. 函数的幂级数展开及其应用[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 1-5. DOI: 10.12677/pm.2024.148296

Keywords

The Power Series Expansion, Advanced Mathematics, Fibonacci Sequence, Catalan Number

1. 引言

函数的幂级数展开作为一种重要的数学工具，其起源可以追溯到微积分的发展初期。牛顿在研究物体运动时，就使用了幂级数来近似表达函数。然而，幂级数的系统化理论是在 18 世纪由数学家泰勒提出的，他给出了著名的泰勒定理，为幂级数的展开提供了理论基础[1]。在 18 世纪初至 19 世纪末，我国数学家对幂级数的研究也非常活跃，形成了独特的研究领域[2]。此外，幂级数在微积分理论中占有重要地位，是研究函数表示、性质和进行近似计算的重要方法[3]。幂级数的展开包括但不限于泰勒级数、麦克劳林级数等。

斐波那契数列的起源可以追溯到 13 世纪初，由意大利数学家莱昂纳多 •斐波那契(Leonardo Fibonacci)提出，在 1202 年出版的《计算之书》(又译为《算盘书》) (Liber Abaci)这本书中，他介绍了印度的记数法，并且通过一个关于兔子繁殖的问题来引入斐波那契数列。斐波那契提出著名的兔子问题：如果一对兔子每个月都能生下一对小兔子，并且小兔子在第二个月末成熟后也能开始繁殖，那么在一年之后会有多少对兔子？这个问题的解答展示了斐波那契数列的增长模式。在他对这个数列的研究中发现其在自然界中随处可见，如植物的生长规律、树叶的排序方式，以及螺旋线的形状等。斐波那契数列的提出，不仅在数学上具有重要意义，而且在金融、自然科学、计算机科学等多个领域都有广泛的应用。

卡特兰数是组合数学中的一个重要数列，它的提出有着悠久的历史，并且涉及几位不同的数学家。最初，我国清代蒙古族数学家明安图在 1730 年的著作《割圜密率捷法》中使用了卡特兰数，然而，这个数列最终以比利时数学家欧仁・查理・卡特兰(Eugène Charles Catalan)的名字命名，他在 19 世纪中叶对这类数列进行了研究。卡特兰数在多种组合计数问题中出现，包括括号匹配问题、二叉树计数、格子路径计数问题等。组合学家 Richard P. Stanley 在他的专著[4]中列举了 66 种可以用卡特兰数统计的问题，这一数字在他的新著[5]中更新至 214。

本文将重点关注函数的幂级数展开在特殊数列计算中的应用，主要利用幂级数的展开计算斐波那契数列和卡特兰数。

2. 基本函数的幂级数展开

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,R)$ 内能展开成幂级数，则它的幂级数展开就是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数，即：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in U(x_0,R). \tag{1}$$

证明：我们只需要证明展开式中的泰勒系数等于 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 即可。设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，则 $f(x_0)=a_0$。对 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 左右两边同时求 n 阶导数即得

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)^n+\cdots$$

将 $x=x_0$ 代入上式得到 $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$，定理得证。

函数的幂级数展开分为直接法和间接法，直接法是利用定理 1 求函数的各阶导数进而得到幂级数展开；间接法是通过一些已知的幂级数展开变形或者逐项求导、求积分而得到。

2.1. 直接法

通过公式(1)，直接对函数求各阶导数我们可以得到下面一些基本函数的幂级数展开式：

(1) $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

(2) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

(3) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

(4) $\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$，$x\in[-1,1]$。

(5) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，$x\in(-1,1]$。

(6) $f(x)=(1+x)^\alpha$，其中 $\alpha\neq 0$ 是任意实数。

(ii) $\alpha=m$ 为正整数：

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\cdots+mx^{m-1}+x^m, x\in(-\infty,+\infty)。$$

(ii) α 不是正整数：

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\begin{cases}x\in(-1,1), & 当\ \alpha\le -1,\\ x\in(-1,1], & 当\ -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & 当\ \alpha>0.\end{cases}$$

其中 $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},(n=1,2,\cdots)$ 且 $\binom{\alpha}{0}=1$。

对于形式稍微复杂的函数，我们可以将其整理出上述已知函数的形式，然后通过已知的幂级数展开来间接得到更多函数的幂级数展开，下面给出两个例子。

2.2. 间接法

例 1 将 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数。

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\quad x\in(-6,2)$$

例 2 将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数。

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ x\in(-1,1)$$

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

当 $x=-1$ 时，此级数收敛，且 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1).$$

3. 幂级数展开在组合数学中的应用

幂级数展开在诸多领域均有重要的应用，本节将利用幂级数的展开求解组合数学中两个重要的数列：斐波那契数列和卡特兰数。

例 3 (斐波那契数列通项求解)已知数列 F_n 满足如下递归关系：

$$F_1=F_2=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geq 3).$$

求其通项 F_n。

解：考虑生成函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n$， $|x|<R$。

$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n=x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty}F_n x^n=x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n\\&=x+x^2+x\sum_{n=2}^{\infty}F_n x^n+x^2\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n\\&=x+x^2+x(s(x)-x)+x^2 s(x)=x+(x+x^2)s(x).\end{aligned}$$

故而

$$s(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-ax}-\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}b^n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}x^n.$$

其中 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$， $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。对于 $\frac{1}{1-ax}$ 和 $\frac{1}{1-bx}$ 的幂级数展开，我们利用了上述基本函数中 $(1+x)^{-1}$ 的幂级数展开。因此由展开式的唯一性知

$$F_n=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

卡特兰数 C_n 有多种定义，我们给出其中两种如下：

01序列计数问题：现在有n个0和n个1，问有多少个长度为$2n$的序列，使得序列的任意一个前缀中1的个数都大于等于0的个数。

合法路径计数问题：在一个 $w\times h$ 的网格上，从 $(0,0)$ 出发，每次只可以向上走一格，或者向右走一格，在任意一个时刻，往右走的次数都不能少于往上走的次数，问走到 (n,n) 有多少种不同的合法路径。

下面利用幂级数的展开来计算卡特兰数。

例 4 (卡特兰数求解)已知卡特兰数 C_n 满足如下递推关系：

$$C_0 = 1,\ C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} \quad (n \ge 1)。$$

求其通项 C_n 。

解：令 $b_0 = 0$，且当 $n \ge 1$ 时，$b_n = C_{n-1}$，则 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$，且 $b_1 = C_0 = 1$。

考虑生成函数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$，$|x| < R$。将等式两边同时平方可以得到下述等式：

$$s^2(x) = b_1^2 x^2 + (b_1 b_2 + b_2 b_1) x^3 + (b_1 b_3 + b_2 b_2 + b_3 b_1) x^4 + (b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_1) x^n + \cdots$$

利用递推关系 $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$ 可得

$$s^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n = s(x) - b_1 x = s(x) - x.$$

于是有 $s^2(x) - s(x) + x = 0$，故而 $s(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$。由初值 $s(0) = 0$ 可知 $s(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$。

利用 $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ 可得

$$s(x) = \frac{1}{2} - \frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0.5}{n} (-4x)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{0.5}{n} (-4)^n x^n.$$

因此由展开式的唯一性知

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2} \binom{0.5}{n} (-4)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n!} \cdot 2^n \\ &= 2^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} = 2^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(2n-2) \cdot n!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

因此第 n 个卡特兰数为 $C_n = b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \dbinom{2n}{n}$。

4. 结语

本文首先介绍了函数幂级数展开的起源，然后给出了幂级数展开定理，并且列出了一些基本函数的幂级数展开，接着通过间接法计算了幂级数展开的两个实例，最后重点探讨了幂级数展开的应用，即：如何利用幂级数展开得到斐波那契数列和卡特兰数。

参考文献

[1] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[2] 徐传胜. 中国传统数学思想对幂级数理论的研究[J]. 西安电子科技大学学报(社会科学版), 2006, 16(2): 143-148.

[3] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[4] Stanley, R.P. (1999) Enumerative Combinatorics. Cambridge University Press.

[5] Stanley, R.P. (2015) Catalan Numbers. Cambridge University Press.