Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 6-11
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148297

# 拉格朗日中值定理的应用及推广

**黄　晨，周可为**

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年6月18日；录用日期：2024年7月19日；发布日期：2024年8月13日

## 摘　要

在教学过程中，我们发现拉格朗日中值定理是学生学习微积分的巨大障碍，这是因为拉格朗日中值定理是微分中值定理的核心内容，是研究函数与导数之间联系的理论工具，在微积分学中起着至关重要的作用，应用十分广泛。本文重点研究拉格朗日中值定理在证明导数极限定理、求函数极限问题、证明不等式以及证明函数单调性方面的应用，以及拉格朗日中值定理的两个推广。希望本文可以对学生学习微积分有所帮助。

## 关键词

拉格朗日中值定理，函数，应用及推广

# The Application and Extension of Lagrange's Mean Value Theorem

**Chen Huang, Kewei Zhou**

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jun. 18th, 2024; accepted: Jul. 19th, 2024; published: Aug. 13th, 2024

## Abstract

**During the teaching process, we found that the Lagrange Mean Value Theorem is a significant obstacle for students learning calculus. The Lagrange Mean Value Theorem is the core content of the Mean Value Theorem in differential calculus. It is a theoretical tool for studying the relationship between functions and their derivatives and plays a crucial role in calculus, with a wide range of applications. This paper focuses on the application of the Lagrange Mean Value Theorem in proving the derivative limit theorem, solving limit problems of functions, proving inequalities, and proving the monotonicity of functions, as well as two extensions of the Lagrange Mean Value Theorem. It is hoped that this article can be of assistance to students in their study of calculus.**

文章引用：黄晨，周可为．拉格朗日中值定理的应用及推广[J]．理论数学, 2024, 14(8): 6-11.
DOI: 10.12677/pm.2024.148297

**Keywords**

**Lagrange's Mean Value Theorem, Function, Application and Extension**



## 1. 引言

拉格朗日中值定理也称为有限增量定理，视其重要性，又称为微分中值定理[1]。1797 年，法国数学家约瑟夫·拉格朗日在《解析函数论》中首次给出了拉格朗日中值定理以及证明，并提供了最初的形式：

函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点和 $x$ 之间连续，$A$ 和 $B$ 分别为 $f'(x)$ 的最大值和最小值，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 必取 $A$ 和 $B$ 中的一个值。

现代形式的拉格朗日中值定理由法国数学家 $O$.博内提出：

**定理 1** [2]：若函数 $f(x)$ 满足：

在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

在开区间 $(a,b)$ 上可导，

那么在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)。$$

总的来说，拉格朗日中值定理是连接函数增量、自变量增量及导数之间的桥梁，相比较罗尔中值定理和柯西中值定理，它对函数的要求更低，因此有更加广泛的应用。具体地，在研究函数的极限、证明不等式、证明导数极限定理以及证明函数单调性等方面都会用到拉格朗日中值定理。在化学、物理等其他专业领域，也可以利用拉格朗日中值定理来进行计算和研究，例如在化学中计算相对于时间的反应级数，在物理中研究航空重力异常向下延拓方法等。

## 2. 拉格朗日中值定理的应用

### 2.1. 在证明导数极限定理中的应用

**例 1** [2]：

1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a,b]$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处存在右导数，且 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$；

2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$[a,b)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=b$ 处存在左导数，并且 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$；

3) 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某领域 $U(x_0)$ 上连续，在 $U^\circ(x_0)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，并且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$。

**证明：**由导数定义可知 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，

故存在 $\xi_x \in (x,a)$，满足 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+} f'(\xi_x)$。

当 $x\to a^+$ 时，$\xi_x \to a^+$，那么 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(\xi_x)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$。这里只证明(1)，(2-3)同理可证。

## 2.2. 在求解极限问题中的应用

**例 2：** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$。

**解：** 对于函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，则存在 $\xi$ 位于 $\sin x$ 与 $x$ 之间，满足 $\cos(\sin x)-\cos x=-\sin\xi(\sin x-x)$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi(\sin x-x)}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi\left[-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right]}{x^4}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

显然在这一类题目中，当遇到同名的函数相减的时候，合理地运用拉格朗日中值定理可以简化极限运算。

## 2.3. 在证明不等式问题中的应用

**例 3：** 当 $x>0$ 时，证明 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

**证明：** 构造辅助函数，令 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$，因为 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，故 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$。当 $0<\xi<x$ 时，可得 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

**例 4：** 证明 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$。

**证明：** 构造辅助函数，令 $f(x)=\arctan x$，显然 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，则存在一点 $\xi$ 满足 $|\arctan a-\arctan b|=\dfrac{|a-b|}{|1+\xi^2|}$，显然 $|1+\xi^2|\ge 1$，所以 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$。

遇到同名函数相减时，应该要想到拉格朗日中值定理，拉格朗日中值定理可以将函数相减转化为导函数与一个式子相乘的结果，以此来简化运算。

## 2.4. 在证明函数单调性中的应用

**例 5：** 证明 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增。

**证明：** $f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln(1+x)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}\right)$，令 $g(x)=\ln x$，$g(x)$ 在 $[x,1+x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故存在 $\xi\in(x,1+x)$，使得 $f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\dfrac{1}{\xi}-\dfrac{1}{1+x}\right)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

## 3. 拉格朗日中值定理的推广

**定理 2** [3] [4]：若函数 $f$ 满足如下条件：

1) $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续；

2) $f$ 在开区间 $(a,b)$ 可导；

3) $f'(a)=f'(b)$，

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$。

**证明：**不妨假设 $f'(a)=f'(b)=0$，因为若 $f'(a)=f'(b)\neq 0$，则考虑 $g(x)=f(x)-xf'(a)$。显然 $g'(a)=g'(b)=0$，且当 $g'(\xi)=\dfrac{g(\xi)-g(a)}{\xi-a}$ 时，有

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}。$$

不妨构造辅助函数

$$h(x)=\begin{cases} f'(a) & x=a, \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\in(a,b], \end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to a^+}h(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_+'(a)=0=h(a)$，所以 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $(a,b]$ 上可导，即 $h'(x)=-\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}+\dfrac{f'(x)}{x-a}$。

1) 若 $h(b)=0$，则 $h(b)=h(a)=0$，由于 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $(a,b]$ 上可导，由罗尔中值定理可知存在 $h'(\xi)=0$，则 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$。

2) 若 $h(b)\neq 0$，不妨设 $h(b)>0$，则 $h'(b)=\dfrac{-h(b)}{b-a}<0$，易知存在 $x_1$ 满足 $a<x_1<b$ 使得 $h(a)<h(b)<h(x_1)$，那么存在 $x_2$ 满足 $a<x_2<x_1$ 使得 $h(x_2)=h(b)$，则由罗尔中值定理可知存在 $\xi\in(x_2,b)$ 满足 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$。

将定理 2 中的条件改为函数高阶可导且函数两端高阶导函数值相同后可以得到一个新的结论。

**定理 3：**若函数 $f$ 满足如下条件：

1) $f$ 在开区间 $(a,b)$ 内 $n$ 阶可导；

2) $f^{(n)}(a)=f^{(n)}(b)$，

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f(\xi)-f(a)=\sum_{i}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi-a)^i f^{(i)}(\xi)。$$

**证明：**不妨构造辅助函数

$$g_k(x)=xf^{(n-k+1)}(a)+\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(k-i)(x-a)^i f^{(n-k+i)}(x)，\quad k=1,2,\cdots,n。$$

当 $k=1$ 时，$g_1(x)=-f^{(n-1)}(x)+xf^{(n)}(a)$ 且 $g_1'(x)=-f^{(n)}(x)+f^{(n)}(a)$。显然 $g_1'(a)=g_1'(b)=0$，利用定理 2 的结论，可知存在一点 $\xi_1\in(a,b)$，满足

$$g_1'(\xi_1)=\frac{g_1(\xi_1)-g_1(a)}{\xi_1-a}，即 f^{(n-1)}(\xi_1)-f^{(n-1)}(a)=(\xi_1-a)f^{(n)}(\xi_1)；$$

当 $k=2$ 时，$g_2(x)=-2f^{(n-2)}(x)+(x-a)f^{(n-1)}(x)+xf^{(n-1)}(a)$ 且

$$g_2'(x)=-f^{(n-1)}(x)+(x-a)f^{(n)}(x)+f^{(n-1)}(a)。$$

显然 $g_2'(a)=g_2'(\xi_1)=0$，则存在一点 $\xi_2\in(a,\xi_1)$ 满足 $g_2'(\xi_2)=\dfrac{g_2(\xi_2)-g_2(a)}{\xi_2-a}$，即

$f^{(n-2)}(\xi_2)-f^{(n-2)}(a)=(\xi_2-a)f^{(n-1)}(\xi_2)-\dfrac{1}{2}(\xi_2-a)^2 f^{(n)}(\xi_2)$。

重复上述操作，存在 $\xi_{n-1}\in(a,b)$，$f'(\xi_{n-1})-f'(a)=\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi_{n-1}-a)^i f^{(i+1)}(\xi_{n-1})$，

考虑 $k=n$ 时，$g_n(x)=xf'(a)+\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i!}(n-i)(x-a)^i f^{(i)}(x)$。且

$$\begin{aligned}g_n'(x)&=-f'(x)+f'(a)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(x-a)^i f^{(i+1)}(x)\\&=f'(a)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(x-a)^i f^{(i+1)}(x).\end{aligned}$$

显然 $g_n'(a)=g_n'(\xi_{n-1})=0$，则存在 $\xi\in(a,\xi_{n-1})$，满足 $g_n'(\xi)=\dfrac{g_n(\xi)-g_n(a)}{\xi-a}$。

即

$$\begin{aligned}&(\xi-a)f'(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(i-1)!}(\xi-a)^i f^{(i)}(x)\\&=(\xi-a)f'(a)-n\big(f(\xi)-f(a)\big)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi-i)(\xi-a)^i f^{(i)}(\xi).\end{aligned}$$

则 $f(\xi)-f(a)=\sum_{i}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi-a)^i f^{(i)}(\xi)$。

## 4. 结束语

拉格朗日中值定理是微分学中的基本定理之一，是罗尔中值定理的推广，将拉格朗日中值定理从形式和应用上推广则得到柯西中值定理和泰勒中值定理。但本文仅研究拉格朗日中值定理，因为它是微分中值定理的核心内容。通过应用拉格朗日中值定理来证明导数极限定理以此来说明函数连续可微的问题，还可以用它来解决求极限问题，证明不等式以及证明函数的单调性问题。但本文所列举的问题肯定不能覆盖所有的问题，在遇到相关知识点时，还需通过对中值定理的了解，利用恰当的微分中值定理才能事半功倍。

## 致　谢

在本论文的研究和撰写过程中，我得到了许多人的帮助和支持，在此我要表达我最诚挚的感谢。

## 参考文献

[1] 储志俊, 张世唯. 高等数学[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2015: 86-87.

[2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 122-127.

[3] Flett, T.M. (1958) 2742. A Mean Value Theorem. *The Mathematical Gazette*, **42**, 38-39. https://doi.org/10.1017/s0025557200236267

[4] Molnárová, J. (2012) On Generalized Flett's Mean Value Theorem. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **2012**, Article 574634. https://doi.org/10.1155/2012/574634