Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 25-30
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148300

Hans汉斯

一类Monge-Ampère系统径向解的存在性

景　娜

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年7月11日；录用日期：2024年8月8日；发布日期：2024年8月15日

摘　要

20世纪以来，随着科学技术的发展，出现了许多新型的偏微分方程，如椭圆型方程、双曲线型方程和抛物线方程等，这些偏微分方程求解问题都可以转化为求相应常微分方程的解或研究解的性质的问题。Monge-Ampère方程是一类完全非线性偏微分方程，起源于几何学，在微分几何，流体力学，最优化问题等领域有广泛应用。近年来，关于Monge-Ampère方程的研究已取得了很大的突破，众多学者运用不同的方法去讨论这类方程解的存在性，多解性及其唯一性，例如，不动点定理、上下解方法、单调迭代方法、变分理论、分歧理论等。基于Monge-Ampère方程模型的实际应用背景，本文主要讨论一类Monge-Ampère方程的Dirichlet问题，运用Krasnosel'skii-Precup不动点定理得到了其径向解存在的充分条件。

关键词

径向解，**Monge-Ampère**方程，**Krasnosel'skii-Precup**不动点定理

Existence of Radial Solutions for a Class of Monge-Ampère Systems

Na Jing

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 11th, 2024; accepted: Aug. 8th, 2024; published: Aug. 15th, 2024

Abstract

Since the 20th century, with the development of science and technology, there are many new types of partial differential equations, such as elliptic equations, hyperbolic equations and parabolic equations, etc. These partial differential equations can be transformed into the solution of the corresponding ordinary differential equations or the study of the nature of the solution of the problem. Monge-Ampère equations are a class of fully nonlinear partial differential equations that

文章引用: 景娜. 一类 Monge-Ampère 系统径向解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 25-30.
DOI: 10.12677/pm.2024.148300

originated in geometry and have wide applications in differential geometry, fluid mechanics, optimization problems, and other fields. In recent years, the research on Monge-Ampère equations has made great breakthroughs, and many scholars have used different methods to discuss the existence, multisolvability and uniqueness of the solutions of these equations, such as the fixed point theorem, the upper and lower solution method, the monotone iteration method, the theory of variations, the theory of divergence, etc. Based on the practical application background of the Monge-Ampère equation model, this paper focuses on the Dirichlet problem for a class of Monge-Ampère equations, and the sufficient condition for the existence of radial solutions of Monge-Ampère equations is obtained by applying the Krasnosel'skii-Precup fixed point theorem.

Keywords

Radial Solutions, Monge-Ampère Equation, Krasnosel'skii-Precup Fixed Point Theorem

1. 引言

本文拟讨论方程组

$$\begin{cases} \det D^2 u_1 = f_1\left(-u_1(x), -u_2(x)\right), & x \in B, \\ \det D^2 u_2 = f_2\left(-u_1(x), -u_2(x)\right), & x \in B, \\ u_1(x) < 0, u_2 < 0, & x \in B, \\ u_1(x) = u_2(x) = 0, & x \in \partial B \end{cases} \tag{1}$$

负径向解的存在性，利用 Krasnosel'skii-Precup 不动点定理给出其负径向解存在的充分条件，其中 $B = \left\{x \in \boldsymbol{R}^N : |x| < 1\right\}$，$\partial B$ 是 B 的边界，$\det D^2 u$ 表示 Monge-Ampère 算子，它等于 u 的 Hessian 矩阵的行列式，f_i 满足

(H) $f_1, f_2 : \boldsymbol{R}_+^2 \to \boldsymbol{R}_+$ 是连续不减的$\left(\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty)\right)$。

20 世纪以来，随着科学技术的发展，出现了许多新型的偏微分方程，如椭圆型方程、双曲线型方程和抛物线方程等，这些偏微分方程求解问题都可以转化为求相应常微分方程的解或研究解的性质的问题。Monge-Ampère 方程最早由法国数学家 Gaspard Monge 提出，他在 1784 年研究曲面理论和几何光学时引入了这种方程。法国物理学家和数学家 André-Marie Ampère 在 1820 年代对这些方程进行了进一步的研究，特别是与力学和物理问题相关的部分，方程因此得名"Monge-Ampère 方程"。Monge-Ampère 方程的发展与众多数学领域密切相关。无论是在纯数学研究中，还是在应用数学和实际问题中，Monge-Ampère 方程都展示了其强大的分析和描述能力。其丰富的数学结构和广泛的应用背景，使其成为现代数学研究中的一个重要课题，自 1988 年 Kutev [1]的工作之后，Monge-Ampère 相关问题的解的存在性问题一直是众多学者关注的热点话题[2]-[8]。例如，Liang 和 Chu [2]通过 Krasnosel'skii 不动点定理讨论了 Monge-Ampère 方程

$$\begin{cases} \det D^2 u = f\left(-u(x)\right), & x \in B, \\ u(x) = 0, & x \in \partial B \end{cases}$$

对称径向凸解的存在性。Lazer 和 McKenna [3]运用上下解方法讨论了当 $\det D^2 u = h(x)(-u)^p$ 时，上述问

题负凸解的存在性及唯一性。随后，Feng [4]运用相同方法讨论了 Monge-Ampère 系统

$$\begin{cases}\det D^2u_1 = \lambda h_1(|x|)f_1(-u_2(x)), & x\in B,\\ \det D^2u_2 = \lambda h_2(|x|)f_2(-u_1(x)), & x\in B,\\ u_1(x)=u_2(x)=0, & x\in\partial B\end{cases} \tag{2}$$

径向凸解的存在性，多重性及不存在性，其中 $\lambda>0$，权函数 $h_i\in C(B)$。上述文献是在单位球域中讨论了方程的相关解，Zhang [5]在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的光滑有界严格凸域上讨论了当(2)中的 $\lambda=1, h_i\equiv 1$ 且 $f_1(-u_2(x))=(-u_2(x))^{\alpha}$, $f_2(-u_1(x))=(-u_1(x))^{\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$ 时径向凸解的存在性，唯一性及不存在性。

在研究 Monge-Ampère 方程解的相关性质时，大部分文献使用的工具是 Krasnosel'skii 不动点定理，它是非线性分析中证明不同类型边值问题解的存在性的主要工具。对方程组而言，通过 Krasnosel'skii 定理获得的不动点 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 满足 $\|u\|>0$，但这并不能保证每个分量 $u_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，即不能保证不动点的所有分量都是非平凡的[9]，这一事实促使 Precup 建立了向量形式的 Krasnosel'skii 不动点定理[10]，此定理保证了不动点的所有分量都是非平凡的。2022 年，Jorge Rodrígurz-López [11]将 Krasnosel'skii-Precup 不动点定理定义在不同于 $\bar{K}_{r,R}$ 的域上，扩大了 Krasnosel'skii-Precup 不动点定理的适用范围。受上述文献启发，本文利用 Krasnosel'skii-Precup 不动点定理讨论系统(1)非平凡负径向解存在的充分条件。

2. 预备知识

令 $r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$。

为了求解(1)，取 $u_i(|x|)=u_i(r)(i=1,2)$ 将其转化为如下问题

$$\begin{cases}\left((u_1'(r))^N\right)' = Nr^{N-1}f_1(-u_1(r),-u_2(r)), & 0<r<1,\\ \left((u_2'(r))^N\right)' = Nr^{N-1}f_2(-u_1(r),-u_2(r)), & 0<r<1,\\ u_1(r)<0, u_2(r)<0, & 0\le r<1,\\ u_1'(0)=u_2'(0), u_1(1)=u_2(1)=0, & \end{cases} \tag{3}$$

令 $v_1(r)-u_1(r), v_2(r)=-u_2(r)$。则(3)等价于

$$\begin{cases}\left((-v_1'(r))^N\right)' = Nr^{N-1}f_1(v_1(r),v_2(r)), & 0<r<1,\\ \left((-v_2'(r))^N\right)' = Nr^{N-1}f_2(v_1(r),v_2(r)), & 0<r<1,\\ v_1(r)>0, v_2(r)>0, & 0\le r<1,\\ v_1'(0)=v_2'(0), v_1(1)=v_2(1)=0, & \end{cases} \tag{4}$$

那么问题(1)的负径向解等价于问题(4)的正解。

引理 2.1 [7] 令 $v\in C^1[0,1]$ 满足 $v(r)\ge 0, r\in[0,1]$。假设 $v'(r)$ 在 $[0,1]$ 上是不增的。那么

$$v(r)\ge \min\{r,1-r\}\|v\|, r\in[0,1],$$

此处 $\|v\|=\sup\limits_{r\in[0,1]} v(r)$。特别地

$$\min_{\frac{1}{4}\le r\le\frac{3}{4}} v(r)\ge\frac{1}{4}\|v\|。$$

定义

$$K_i=\left\{v_i\in C[0,1]:v_i(r)\geq 0,r\in[0,1],\min_{\frac{1}{4}\leq r\leq\frac{3}{4}}v_i(r)\geq\frac{1}{4}\|v_i\|\right\}(i=1,2)。$$

令 $K=K_1\times K_2$。对于 $v=(v_1,v_2)\in K$，定义

$$T_i(v)(r)=\int_r^1\left(\int_0^s N\tau^{N-1}f_i(v_1(\tau),v_2(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s\,(i=1,2,r\in[0,1]) \tag{5}$$

令 $T=(T_1,T_2)$。显然 T 是全连续的且容易验证(4)等价于不动点方程

$$T(v_1,v_2)=v=(v_1,v_2)。$$

因此，如果 $v=(v_1,v_2)\in K$ 是 T 的不动点，那么 $-v=(-v_1,-v_2)$ 是(1)的一个负径向解。

对于 $r,R\in\boldsymbol{R}_+^2,r=(r_1,r_2),R=(R_1,R_2),0<r_i<R_i,\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)(i=1,2)$，考虑下列集合

$$K_{r,R}^{\varphi}=\left\{v=(v_1,v_2)\in K:r_i<\varphi_i(v_i),\|v_i\|<R_i,i=1,2\right\}；$$

$$\bar{K}_{r,R}^{\varphi}=\left\{v=(v_1,v_2)\in K:r_i\leq\varphi_i(v_i),\|v_i\|\leq R_i,i=1,2\right\}；$$

其中 $\varphi_i:K_i\to R_+$ 是锥 K_i 上的凹函数满足

$$\varphi_i(\lambda u+(1-\lambda)v)\geq\lambda\varphi_i(u)+(1-\lambda)\varphi_i(v)(u,v\in K_i,\lambda\in[0,1])。$$

注意到 $\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ 是一个凸闭集，集合 $\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ 是 K 的收缩核(Dugundji 扩张定理[12])。在 $\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ 中引入如下不动点定理。

引理 2.2 [11] 假设存在连续凹函数 $\varphi_i:K_i\to R_+$ 使得 $\varphi_i(v_i)\leq\|v_i\|,v_i\in K_i(i=1,2)$。集合 $K_{r,R}^{\varphi}$ 是非空的，$T=(T_1,T_2)\in\bar{K}_{r,R}^{\varphi}\to K$ 是紧算子，则对于每个 $i\in(1,2)$ 存在 $h_i\in K_i\setminus\{0\}$ 使得下列条件之一在 $\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ 中成立：

(a) 若 $\varphi_i(v_i)=r_i$ 且 $\mu\geq 0$，则 $T_i(v)+\mu h_i\neq v_i$；若 $\|v_i\|=R_i$ 且 $\lambda\geq 1$，则 $T_i(v)\neq\lambda v_i$；

(b) 若 $\varphi_i(v_i)=r_i$ 且 $\lambda\geq 1$，则 $T_i(v)\neq\lambda v_i$；若 $\|v_i\|=R_i$ 且 $\mu\geq 0$，则 $T_i(v)+\mu h_i\neq v_i$。

那么 $T=(T_1,T_2)$ 至少有一个不动点 $v=(v_1,v_2)\in K$ 满足 $r_i<\varphi_i(v_i)$ 且 $\|v_i\|<R_i(i=1,2)$。

3. 主要结果

接下来，我们给出一个 $T=(T_1,T_2)$ 在 K 上不动点存在的充分条件。

定理 3.1 假设(H)成立且存在 $\alpha_i,\beta_i>0$ 满足 $4\beta_i<\alpha_i,i=1,2$。若

$$f_i(\beta_1,\beta_2)>\frac{2^{4N-1}\beta_i^N}{N},\ f_i(\alpha_1,\alpha_2)<\frac{\alpha_i^N}{N}(i=1,2) \tag{6}$$

则(4)至少存在一个正解 $v=(v_1,v_2)\in K$ 满足 $r_i<\varphi_i(v_i)$ 且 $\|v_i\|<R_i(i=1,2)$。

证明 考虑(5)式定义的算子 $T=(T_1,T_2):\bar{K}_{r,R}^{\varphi}\to K$，且 $r_i=\beta_i,R_i=\alpha_i(i=1,2)$。定义 K_i 上的凹函数 $\varphi_i:K_i\to R_+$ 如下

$$\varphi_i(v_i)=\min_{r\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}v_i(r),i=1,2 \tag{7}$$

首先，固定 $i\in\{1,2\}$，令 $v=(v_1,v_2)\in\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$，其中 $\varphi_i(v_i)=r_i$。结合(7)，对于所有的 $r\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$，都有 $(v_1(r),v_2(r))\geq(r_1,r_2)$，再由假设(H)，得到 $f_i(v_1(r),v_2(r))\geq f_i(r_1,r_2)$。结合(6)，对于任意的 $r\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 有

$$
\begin{aligned}
T_i(v)(r) &= \int_r^1\left(\int_0^s N\tau^{N-1} f_i\left(v_1(r),v_2(r)\right)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\geq \int_{\frac{3}{4}}^1\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} N\tau^{N-1} f_i\left(v_1(r),v_2(r)\right)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\geq \int_{\frac{3}{4}}^1\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} N\tau^{N-1} f_i\left(r_1,r_2\right)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\geq \int_{\frac{3}{4}}^1\left(\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{4}\right)^{N-1} f_i\left(r_1,r_2\right)\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{4}\right)^{N-1} f_i\left(r_1,r_2\right)\right)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}
$$

显然，若 $v\in\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$， $\varphi_i(v_i)=r_i$， $\mu\geq 0$，取 $h_i\equiv 1$，则 $T_i(v)+\mu h_i\neq v_i$。

假设， $\lambda\geq 1$， $v\in\bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ 且 $\|v_i\|=R_i\,(i=1,2)$，由假设(H)，得到 $f_i\left(v_1(r),v_2(r)\right)\leq f_i\left(R_1,R_2\right)$， $r\in[0,1]$。结合(6)，可以得到

$$
\begin{aligned}
T_i(v)(r) &= \int_r^1\left(\int_0^s N\tau^{N-1} f_i\left(v_1(r),v_2(r)\right)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\leq \int_r^1\left(\int_0^s N\tau^{N-1} f_i\left(R_1,R_2\right)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\leq \int_r^1\left(Ns^N f_i\left(R_1,R_2\right)\right)^{\frac{1}{N}}\mathrm{d}s \\
&\leq \left(Nf_i\left(R_1,R_2\right)\right)^{\frac{1}{N}} \\
&\leq R_i \\
&\leq \|\lambda v_i\|
\end{aligned}
$$

故 $T_i\neq\lambda v_i$，这满足引理 2.2 的条件(a)，由此可知系统(4)至少存在一个正解 $v=(v_1,v_2)\in K$ 满足 $r_i<\varphi_i(v_i)$ 且 $\|v_i\|<R_i\,(i=1,2)$。

上述定理是在 T_1,T_2 都为压缩型算子的情形下成立的，还需注意 T_1,T_2 分别为压缩—拉伸型，或都为拉伸型的情形。

定理 3.2 假设(H)成立且存在 $\alpha_i,\beta_i>0$ 满足 $4\beta_1<\alpha_1$， $\alpha_2<\beta_2$。若

$$
f_1\left(\beta_1,\frac{1}{4}\alpha_2\right)>\frac{2^{4N-1}\beta_1^N}{N},\ f_1\left(\alpha_1,4\beta_2\right)<\frac{\alpha_1^N}{N},
$$

$$
f_2\left(\beta_1,\beta_2\right)>\frac{2^{4N-1}\beta_2^N}{N},\ f_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)<\frac{\alpha_2^N}{N},
$$

则 $T=(T_1,T_2)$ 在 $\left(\bar{U}_1\setminus V_1\right)\times\left(\bar{U}_2\setminus V_2\right)$ 中至少有一个不动点，其中

$$
V_1=\left\{v_1\in K_1:\varphi_1(v_1)<\beta_1\right\},U_1=\left\{v_1\in K_1:\|v_1\|_\infty<\alpha_1\right\},
$$

$$
V_2=\left\{v_2\in K_2:\|v_2\|_\infty<\alpha_2\right\},U_2=\left\{v_2\in K_2:\varphi_2(v_2)<\beta_2\right\}.
$$

证明 上述定理中 T_1 是压缩型算子，由定理 3.1 的证明可得 T_1 满足引理 2.2 的条件(a)，而 T_2 是拉伸型算子，类似地，可证 T_2 满足引理 2.2 条件(b)。

定理 3.3 假设(H)成立且存在 $\alpha_i,\beta_i>0$ 满足 $\alpha_i<\beta_i,i=1,2$。若

$$f_1\left(\beta_1,\frac{1}{4}\alpha_2\right)>\frac{2^{4N-1}\beta_1^N}{N},\ f_1(\alpha_1,4\beta_2)<\frac{\alpha_1^N}{N},$$

$$f_2\left(\frac{1}{4}\alpha_1,\beta_2\right)>\frac{2^{4N-1}\beta_2^N}{N},\ f_2(4\beta_1,\alpha_2)<\frac{\alpha_2^N}{N},$$

则 $T=(T_1,T_2)$ 在 $(\bar{U}_1\setminus V_1)\times(\bar{U}_2\setminus V_2)$ 中至少有一个不动点，其中

$$V_i=\{v_i\in K_i:\|v_i\|_\infty<\alpha_i\},U_i=\{v_i\in K_i:\varphi_i(v_i)<\beta_i\}(i=1,2).$$

上述定理是在 T_1，T_2 都为 $(\bar{U}_1\setminus V_1)\times(\bar{U}_2\setminus V_2)$ 上的拉伸型算子的情形下成立的。证明过程类似于定理 3.2。

注 若有 $0\in V_i\subset\bar{V}_i\subset U_i$，$U_i$，$V_i$ 是 K_i 中的有界相对开集，且 $\bar{U}_i\setminus V_i$ 是 $\bar{U}_i$ 的收缩核，则定理 3.1~3.3 在满足上述条件的集合 $(\bar{U}_1\setminus V_1)\times(\bar{U}_2\setminus V_2)$ 中也是成立的。

基金项目

在本研究的完成过程中，特别感谢西北师范大学研究生科研资助项目(2023KYZZ-S118)对本研究项目的资助与支持。国家自然科学基金资助项目(11961060)。

参考文献

[1] Kutev, N.D. (1988) Nontrivial Solutions for the Equations of Monge-Ampere Type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **132**, 424-433. https://doi.org/10.1016/0022-247x(88)90071-6

[2] Liang, Z. and Chu, J. (2015) Radially Symmetric Convex Solutions for Dirichlet Problems of Monge-Ampère Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 3426-3433. https://doi.org/10.1002/mma.3789

[3] Lazer, A.C. and McKenna, P.J. (1996) On Singular Boundary Value Problems for the Monge-Ampére Operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **197**, 341-362. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0024

[4] Feng, M. (2022) A Class of Singular Coupled Systems of Superlinear Monge-Ampère Equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **38**, 925-942. https://doi.org/10.1007/s10255-022-1024-5

[5] Zhang, Z.T. and Qi, Z.X. (2015) On a Power-Type Coupled Systems of Monge-Ampère Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **46**, 717-730. https://doi.org/10.12775/TMNA.2015.064

[6] Feng, M. (2020) Convex Solutions of Monge-Ampère Equations and Systems: Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior. *Advances in Nonlinear Analysis*, **10**, 371-399. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0139

[7] Hu, S. and Wang, H. (2006) Convex Solutions of Boundary Value Problem Arising from Monge-Ampère Equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **16**, 705-720. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.705

[8] Dai, G.W. and Ma, R.Y. (2015) Eigenvalue, Bifurcation and Convex Solutions for Monge-Ampère Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **46**, 135-163. https://doi.org/10.12775/tmna.2015.041

[9] Canada, A. and Zertiti, A. (1996) Fixed Point Theorems for Systems of Equations in Ordered Banach Spaces with Applications to Differential and Integral Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **27**, 397-411. https://doi.org/10.1016/0362-546x(95)00024-p

[10] Precup, R. (2007) A Vector Version of Krasnosel'skiĭ's Fixed Point Theorem in Cones and Positive Periodic Solutions of Nonlinear Systems. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **2**, 141-151. https://doi.org/10.1007/s11784-007-0027-4

[11] Rodríguez-López, J. (2023) A Fixed Point Index Approach to Krasnosel'skiĭ-Precup Fixed Point Theorem in Cones and Applications. *Nonlinear Analysis*, **226**, Article 113138. https://doi.org/10.1016/j.na.2022.113138

[12] Andrzej, G. and James, D. (2003) Fixed Point Theory. Springer, 690.