Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 60-67
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148304

Hans汉斯

一类含有对数项的Kirchhoff-Choquard方程解的存在性

徐武波，蔡亚情

湖南工业大学理学院，湖南 株洲

收稿日期：2024年7月4日；录用日期：2024年8月7日；发布日期：2024年8月19日

摘　要

本文研究了一类具有对数非线性的Kirchhoff-Choquard方程解的存在性。利用经典山路引理，证明了相应的能量泛函具有山路结构，且满足PS条件，从而方程至少存在一个非平凡解。

关键词

Kirchhoff-Choquard方程，对数非线性项，非平凡解，山路引理

Existence of Solutions to the Kirchhoff-Choquard Equation with Logarithmic Term

Wubo Xu, Yaqing Cai

College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan

Received: Jul. 4th, 2024; accepted: Aug. 7th, 2024; published: Aug. 19th, 2024

Abstract

In this article, the existence of solutions to a Kirchhoff-Choquard equation with logarithmic nonlinearities is studied. By using the classical mountain pass lemma, we proved that the energy functional of the problem has a mountain pass structure and satisfies the PS condition, so the studies problem admits at least a nontrivial solution.

文章引用: 徐武波, 蔡亚情. 一类含有对数项的 Kirchhoff-Choquard 方程解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 60-67.
DOI: 10.12677/pm.2024.148304

Keywords

Kirchhoff-Choquard Equation, Logarithmic Term, Nontrivial Solution, Mountain Pass Theorem

1. 研究现状

近年来，具有对数非线性项或 Choquard 项的偏微分方程在量子力学、量子光学、核物理、输运和扩散现象、开放系统、有效量子引力、超流体理论和玻色–爱因斯坦凝聚中得到了许多应用[1]-[3]，关于相应的偏微分方程的定性性质、解的存在性和多重性已有许多结果，如对数项偏微分方程的研究见[4]-[9]及其中参考文献，对含 Choquard 项偏微分方程的研究见[10]-[14]及其中参考文献。在文献[4]中，Tian 考虑了如下方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u\log|u|, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界光滑区域且 $N\geq 1$，当

$$\max_{\Omega}|a(x)|<2\pi \mathrm{e}^{2-\frac{4|\Omega|_N}{Ne}},$$

其中 $|\Omega|_N$ 为 Ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的体积，作者通过 Nehari 流形和对数 Sobolev 不等式证明了方程(1)至少存在两个非平凡解。

在文献[6]中，Squassina 和 Szulkin 研究了下列方程解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = Q(x)u\log|u|, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $V(x),Q(x)\in C(\mathbb{R}^N)$ 并且满足 $\min_{\Omega}V(x)>0$，$\min_{\Omega}(V(x)+Q(x))>0$，作者将泛函分解为一个 C^1 泛函和一个凸下半连续泛函的和，从而得到不同几何解的存在性。Avenia [15]利用非光滑临界点理论证明了问题(2)存在唯一正解。

Yang [16]研究了以下拟线性 Choquard 方程：

$$-\Delta u + V(x)u - u\Delta(u^2) = \left(|x|^{-\mu} * |u|^p\right)|u|^{p-2}u,\ x\in\mathbb{R}^N, \tag{3}$$

其中 $\mu\in\left(0,\frac{N+2}{2}\right)$，$N\geq 3$ 和 $p\in\left(2,\frac{4N+4\mu}{N-2}\right)$，势函数 V 满足 $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ 和 $0<V_0\leq V(x)$，且 $\lim_{|x|\to\infty}V(x)=\infty$。作者通过摄动法，得到了问题(3)正解、负解和高能解的存在性。

在文献[17]中，Wen 和 Tang 利用约束变分方法、拓扑度理论和新的能量估计不等式分析了以下方程：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u\log|u|, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中参数 a,b 为两个正常数，$4<p<2^*$，$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界区域并且满足 $V:\Omega\to\mathbb{R}$，作者得到了问题(4)具有两个基态解和基态变号解的存在性。

据我们所知，Kirchhoff 方程为偏微分方程的经典问题，Choquard 方程的理论和应用研究被广大学者所关注，已经逐渐成为了一个国际研究的前沿问题，但研究 Kirchhoff-Choquard 方程的文献还比较少。本文基于以上文献的分析，引发出一个很自然的问题：含有对数非线性问题的 Kirchhoff-Choquard 方程在 Ω 中是否存在非平凡解？这对用非线性泛函分析去研究非线性偏微分方程具有实际意义。而问题中非线性对数项的出现使得能量泛函不满足单调性条件，Choquard 项的处理也很关键。因此，本文考虑使用经典不等式和一些放缩技巧来解决这个问题。因此，我们考虑这个方程所对应的能量泛函是否会满足山路引理和 Palais-Smale (PS)条件。

本文讨论如下含有对数非线性问题的 Kirchhoff-Choquard 方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=\lambda u\log|u|+\beta\left(\int_\Omega\frac{|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}y\right)|u|^{p-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个光滑有界区域，并且 $a>0,b\ge0,0<\mu<N,N\ge3,\lambda,\beta$ 是正实参数，$2<p<2_\mu^*$，此时 $2_\mu^*=\dfrac{2N}{N-2}$。下面给出本文的主要结果：

定理 1.1 如果 $V\in L^{3/2}(\Omega)$，且 $V_0=\inf\limits_{u\in\Omega}V(x)>-\infty$，则问题(5)至少存在一个非平凡解。

2. 理论基础

本文对 $H_0^1(\Omega)$ 空间的范数做出以下定义：

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=:\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

定义 $H_0^1(\Omega)$ 空间的内积为：

$$(u,v)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.$$

$L^p(\Omega)(1\le p<\infty)$ 为具有范数的 Lebesgue 空间并有以下定义：

$$|u|_p=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

$C,C_i,i=1,2,\cdots$ 表示不同的正常数。

定理 2.1 假设 E 是一个实的 Banach 空间，$I\in C^1(E,\mathbb{R})$ 满足 PS 条件且 $I(0)=0$。若 I 满足山路结构，即

i) 存在常数 $r,\eta>0$，当 $\|u\|=r$ 时，有 $I(u)\ge\eta$ 成立。

ii) 存在 $e\in H_0^1(\Omega)$，当 $\|e\|>r$ 时，有 $I(e)<0$ 成立。

定义

$$\Gamma=\{\gamma\in C[0,1],E:\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\},$$

那么，$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$ 是 I 的一个临界值。

为了得到我们的结果满足定理 2.1，问题(5)的能量泛函 I 可以定义为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4+\frac{1}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\log|u|\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2p}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为了方便，我们不妨定义

$$G(u) =: \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^p |u(y)|^p}{|x-y|^\mu} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

任给的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是问题(5)的弱解，是指如下等式成立：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (a\nabla u\cdot\nabla v + Vuv)\mathrm{d}x + b\|u\|^2(u,v)\\&= \lambda\int_\Omega uv\log|u|\mathrm{d}x + \beta\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

为了证明本文的主要结论，需要如下几个引理。

引理 2.2 (对数 Sobolev 不等式[18])设任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，c 是任意正常数，那么有

$$2\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \log\left(\frac{|u|}{|u|_2}\right)\mathrm{d}x + N(1+\log c)|u|_2^2 \le \frac{c^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x,$$

不妨定义当 $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ 时，都有 $u(x)=0$ 成立。由对数 Sobolev 不等式，有

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \log\left(\frac{|u|}{|u|_2}\right)\mathrm{d}x \le \frac{N}{2}(1+\log c)|u|_2^2 - \frac{c^2}{2\pi}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

引理 2.3 ([19]，引理 2.13)设 $N \ge 3$，$a \in L^{N/2}(\Omega)$，则泛函 $\psi: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$，

$$\psi(u) = \int_\Omega au^2\mathrm{d}x,\quad u\in H_0^1(\Omega),$$

是弱连续的。

引理 2.4 ([20]，定理 4.3)设 $t, q > 1, 0 < \mu < N$ 并且 $\frac{1}{t}+\frac{1}{q}+\frac{\mu}{N}=2,\ f(x)\in L^t(\mathbb{R}^N), h(x)\in L^q(\mathbb{R}^N)$，则存在一个正常数 $C(t,\mu,N,q)$ 使得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)||h(x)|}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le C(t,\mu,N,q)|f|_t|h|_q.$$

令 $f(x)=|u(x)|^p, h(x)=|u(y)|^p$，我们有

$$\left|\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le C(t,\mu,N,q)|u(x)|_t^p|u(y)|_q^p. \tag{7}$$

利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，存在一个常数 $\tilde{C}(t,\mu,N,q) > 0$ 使得

$$\left|\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \tilde{C}(t,\mu,N,q)|u|_{2_\mu^*}^{22_\mu^*},\ \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

通过 Sobolev 嵌入定理，我们可以得到存在 $C(t,\mu,N,q) > 0$ 使得

$$\left|\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le C(t,\mu,N,q)|u|^{22_\mu^*}.$$

最后，通过计算可以得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{\mu\frac{p}{2_\mu^*}}}\frac{1}{|x-y|^{\mu\left(1-\frac{p}{2_\mu^*}\right)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\le C_1\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{2_\mu^*}} \\ &\le C_2\|u\|^{2p},\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $2<p<2_\mu^*$。

3. 主要结果的证明

在本节中，我们首先利用一些常用的不等式和一些分析技巧来证明泛函 I 满足山路结构和 PS 条件。

引理 3.1 存在常数 $r,\eta>0$，当 $\|u\|=r$ 时，有 $I(u)\ge\eta$ 成立。

证明

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4+\frac{1}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\log|u|\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2p}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4+\frac{1}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\log\frac{|u|}{|u|_2}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\log|u|_2\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}|u|_2-\frac{\beta}{2p}G(u)\\ &\ge\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}|u|_2-\frac{\lambda c^2}{4\pi}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda N}{4}(1+\log c)|u|_2^2-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\log|u|_2\,\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2p}G(u)\\ &=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}|u|_2-\frac{\lambda c^2}{4\pi}\|u\|^2+\left[\frac{\lambda N}{4}(1+\log c)-\frac{\lambda\log|u|_2}{2}\right]|u|_2^2-\frac{\beta}{2p}G(u).\end{aligned}$$

取 $c=\sqrt{\frac{\pi a}{\lambda}}$，并利用(7)，我们有

$$\begin{aligned}I(u)&\ge\frac{a}{4}\|u\|^2+\frac{1}{8}\left(8+4V_0+3\log(\pi a)-4\log|u|_2\right)|u|_2^2-\frac{\beta}{2p}G(u)\\ &\ge\frac{a}{4}\|u\|^2+\frac{1}{8}\left(8+4V_0+3\log(\pi a)-4\log|u|_2\right)|u|_2^2-C_3|u(x)|_t^p|u(y)|_q^p\\ &\ge\frac{a}{4}\|u\|^2-C_4\|u\|^{2p}.\end{aligned}$$

只要正数 r 足够小且满足 $\|u\|=r$ 和 $|u|_2^2\le C_5\|u\|^2\le(\pi a)^{\frac{2}{3}}e^{4+2V_0}$ 时，则存在 $\eta>0$ 使得 $I(u)\ge\eta$ 成立。

引理 3.2 存在 $e\in H_0^1(\Omega)$，当 $\|e\|>r$ 时，有 $I(e)<0$ 成立。

证明

$$\begin{aligned}I(tu)&=\frac{at^2}{2}\|u\|^2-\frac{bt^4}{4}\|u\|^4+\frac{t^2}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega u^2\log|u|\mathrm{d}x+\frac{\lambda t^2}{4}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{\beta t^2}{2p}G(u)\\ &=\frac{at^2}{2}\|u\|^2-\frac{bt^4}{4}\|u\|^4+\frac{t^2}{2}\int_\Omega Vu^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda t^2\log t}{2}|u|_2^2-\frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega u^2\log|u|\mathrm{d}x+\frac{\lambda t^2}{4}|u|_2^2-\frac{\beta t^2}{2p}G(u)\end{aligned}$$

当 $p>2$ 且 $t\to\infty$ 时，我们有 $I(tu)\to-\infty$ 成立。当 t_0 足够大时，存在 $\|t_0u\|>r$ 且 $I(tu)<0$ 成立，显然存在 $e=t_0u$ 使得 $I(e)\to 0$，引理 3.2 的证明就完成了。

引理 3.1 和引理 3.2 的证明说明能量泛函 I 满足山路结构，接下来只要证明泛函 I 满足 PS 条件就完成了证明。

引理 3.3 泛函 I 满足 PS 条件。

证明 假设 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 是 I 的一个 PS 序列，那么存在 $z>0$ 使得对于所有的 n，都有 $I(u_n)\to z$ 成立，而且当 $n\to\infty$ 时，$I(u_n)\to 0$。首先，我们证明 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界。事实上，对所有的 n，通过 Sobolev 嵌入定理和式(8)，可得

$$\begin{aligned}
z+o(1)\|u_n\| &\geq I(u_n)-\frac{1}{p}\left(I(u_n),u_n\right)\\
&\geq\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{p}\right)\|u_n\|^2-\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{p}\right)\|u_n\|^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega Vu_n^2\mathrm{d}x\\
&\quad-\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{p}\right)\int_\Omega u_n^2\log|u_n|\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2p}G(u_n)\\
&\geq\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{p}\right)\|u_n\|^2-\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{p}\right)\|u_n\|^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega Vu_n^2\mathrm{d}x-\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{p}\right)|u_n|_3^3-\frac{\beta}{2p}G(u_n)\\
&\geq\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{p}-C_6\right)\|u_n\|^2-\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{p}\right)\|u_n\|^4+C_7\|u_n\|^3-C_8\|u_n\|^{2p}.
\end{aligned}$$

所以 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界。其次，我们证明 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有收敛子列. 因为 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，所以不妨设子列 $u_n\to u, n\to\infty$。于是有

$$\begin{aligned}
o_n&=\left(I'(u_n)-I'(u),u_n-u\right)\\
&=a\|u_n-u\|+\int_\Omega V(u_n-u)^2\,\mathrm{d}x+b\left[\|u_n\|^4-\|u_n\|^2(u_n,u)+\|u\|^2(u_n,u)+\|u\|^4\right]\\
&\quad-\int_\Omega\left(u_n\log|u_n|-u\log|u|\right)(u_n-u)\mathrm{d}x-G_n(x,y),
\end{aligned}$$

其中

$$G_n(x,y)=\int_\Omega\int_\Omega\frac{\left(|u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)\right)\left(u_n(y)-u(y)\right)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $2\leq\frac{2Np}{2N-\mu}<22^*$ 时，在空间 $L^{\frac{2Np}{2N-\mu}}$ 中有 $u_n\to u$，那么我们可以得到存在函数 $Q\in L^{\frac{2Np}{2N-\mu}}(\Omega)$ 使得 $|u_n(x)|,|u(x)|\leq Q(x)$ 成立。通过文献[19]中的定理 A.1 和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，有

$$|G_n(x,y)|\leq\int_\Omega\int_\Omega\frac{2|Q(x)|^p|Q(y)|^p}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\in L^1(\Omega\times\Omega).$$

事实上 $G_n(x,y)$ 在 $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ 几乎处处都为 0，这意味着

$$G_n(x,y)=o_n(1).\tag{9}$$

通过 Hölder 不等式，我们有

$$\left|\int_\Omega\left(u_n\log|u_n|-u\log|u|\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leq\left|u_n\log|u_n|-u\log|u|\right|_2|u_n-u|_2\to 0,\tag{10}$$

并且

$$\|u_n\|^4 - \|u_n\|^2 (u_n, u) + \|u\|^2 (u_n, u) + \|u\|^4 \ge \|u_n\|^4 - \|u_n\|^3 \|u\| + \|u\|^3 \|u_n\| + \|u\|^4 = \left(\|u_n\|^3 - \|u\|^3\right)\left(\|u_n\| - \|u\|\right) \ge 0. \tag{11}$$

因为 $V \in L^{3/2}(\Omega)$，由命题 2.2，我们有

$$\int_\Omega V (u_n - u)^2 \,\mathrm{d}x \to 0. \tag{12}$$

根据(9)~(11)，我们得到 $\|u_n - u\| \to 0$，这样我们就找到了一个收敛子列，即 $H_0^1(\Omega)$ 中任意 PS 序列都存在收敛子列。证毕。

引理 3.1、引理 3.2 和引理 3.3 表明，能量泛函 I 满足山路结构和 PS 条件。根据定理 2.1，泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 内至少有一个非平凡临界点，也就是方程(5)至少存在一个非平凡解。因此，定理 1.1 的结论成立。

参考文献

[1] Carles, R. and Pelinovsky, D. (2014) On the Orbital Stability of Gaussian Solitary Waves in the Log-KdV Equation. *Nonlinearity*, **27**, 3185-3202. https://doi.org/10.1088/0951-7715/27/12/3185

[2] Troy, W.C. (2016) Uniqueness of Positive Ground State Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **222**, 1581-1600. https://doi.org/10.1007/s00205-016-1028-5

[3] Wang, Z. and Zhang, C. (2018) Convergence from Power-Law to Logarithm-Law in Nonlinear Scalar Field Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **231**, 45-61. https://doi.org/10.1007/s00205-018-1270-0

[4] Tian, S. (2017) Multiple Solutions for the Semilinear Elliptic Equations with the Sign-Changing Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **454**, 816-828. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.05.015

[5] Shuai, W. (2023) Two Sequences of Solutions for the Semilinear Elliptic Equations with Logarithmic Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **343**, 263-284. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.10.014

[6] Squassina, M. and Szulkin, A. (2014) Multiple Solutions to Logarithmic Schrödinger Equations with Periodic Potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 585-597. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0796-8

[7] Liu, T. and Zou, W. (2024) Sign-Changing Solution for Logarithmic Elliptic Equations with Critical Exponent. *Manuscripta Mathematica*, **174**, 749-773.

[8] Deng, Y., He, Q., Pan, Y. and Zhong, X. (2023) The Existence of Positive Solution for an Elliptic Problem with Critical Growth and Logarithmic Perturbation. *Advanced Nonlinear Studies*, **23**, Article ID: 20220049. https://doi.org/10.1515/ans-2022-0049

[9] Gilkey, P.B. and Grubb, G. (1998) Logarithmic Terms in Asymptotic Expansions of Heat Operator Traces. *Communications in Partial Differential Equations*, **23**, 777-792. https://doi.org/10.1080/03605309808821365

[10] He, Q., He, Y. and Lv, J. (2023) The Existence of Positive Solutions to the Choquard Equation with Critical Exponent and Logarithmic Term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **519**, Article ID: 126737. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126737

[11] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2014) Existence of Groundstates for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6557-6579. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2014-06289-2

[12] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2016) A Guide to the Choquard Equation. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 773-813. https://doi.org/10.1007/s11784-016-0373-1

[13] Luo, H., Ruf, B. and Tarsi, C. (2023) Bifurcation into Spectral Gaps for Strongly Indefinite Choquard Equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, **26**, Article ID: 2350001. https://doi.org/10.1142/s0219199723500013

[14] Deng, Y., Peng, S. and Yang, X. (2023) Uniqueness and Non-Degeneracy of Ground States for Choquard Equations with Fractional Laplacian. *Journal of Differential Equations*, **371**, 299-352. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.06.032

[15] D'avenia, P., Montefusco, E. and Squassina, M. (2014) On the Logarithmic Schrödinger Equation. *Communications in Contemporary Mathematics*, **16**, Article ID: 1350032. https://doi.org/10.1142/s0219199713500326

[16] Yang, X., Zhang, W. and Zhao, F. (2018) Existence and Multiplicity of Solutions for a Quasilinear Choquard Equation via Perturbation Method. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article ID: 081503. https://doi.org/10.1063/1.5038762

[17] Wen, L., Tang, X. and Chen, S. (2019) Ground State Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Equations with Logarithmic Nonlinearity. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 17, 1-13. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.47

[18] Gross, L. (1975) Logarithmic Sobolev Inequalities. *American Journal of Mathematics*, **97**, 1061-1083. https://doi.org/10.2307/2373688

[19] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[20] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) Analysis. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/gsm/014